

حکیم عمر خیام به عنوان عالم جبر

به اتمام
علامتین مصاحب

به مناسبت گنجه بین المللی بزرگداشت
حکیم عمر خیام نیشابوری



کمیسیون ملی یونسکو در ایران



انجمن آثار و مفاصله فرهنگی

٩٤٢ ٩٢٧٧ ٥٤ ٩٢٧٧

ISBN-964-6278-56-6



١٤٤٣ هـ

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِیْمِ

f. 319

حکیم عمر خیام

به عنوان

عالم حبر

مشکل برستون و ترجمه فارسی آثار خیام در علم جبر و تحلیل
کارهای جبری وی، با مقدمات و حواشی



کتابخانه تخصصی ادب و پیشا

به اهتمام

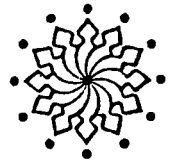
غلامحسین مصاحب

تهران ۱۳۳۹ ه. ش.



کمیسیون ملی یونسکو در ایران

به مناسبت گنگره بین المللی بزرگداشت
نصدمین سال وفات حکیم عمر خیام نیشابوری
و یکصدمین سال تولد غلامحسین مصاحب

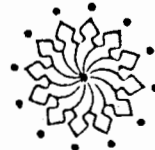


انجمن آثار و معارف فراهنکی

شماره ۲۱۵



کمیسیون ملی یونسکو در ایران



انجمن آثار و مفاخر فرهنگی

شماره ۲۱۵

به مناسبت کنگره بین‌المللی نهمدهمین سال وفات حکیم عمر خیام نیشابوری

حکیم عمر خیام به‌عنوان عالم جبر

به‌اهتمام: غلامحسین مصاحب

ناشر: انجمن آثار و مفاخر فرهنگی با همکاری کمیسیون ملی یونسکو در ایران

امور چاپ: اصغر نوری

چاپ اول، ۱۳۳۹. چاپ دوم، ۱۳۷۹

تیراژ: ۲۰۰۰ نسخه

لیتوگرافی: ارغوان چاپ و صحافی: آذروش

قیمت: ۱۵۰۰ تومان

مصاحب غلامحسین، ۱۲۸۹ - ۱۳۵۸.

حکیم عمر خیام به عنوان عالم جبر مشتمل بر متون و ترجمه فارسی آثار خیام در علم جبر و تحلیل کارهای جبری وی، با مقدمات و حواشی / به اهتمام غلامحسین مصاحب. - تهران: انجمن آثار و مفاخر فرهنگی: کمیسیون ملی یونسکو در ایران، ۱۳۷۹.

بیست و سه، ۳۲۴ ص.: مصور، نمونه، نمودار. ISBN 964-6278-56-6 ریال ۱۵۰۰۰۰

فهرست‌نویسی بر اساس اطلاعات فیبا.

ص.ع. به انگلیسی: G . H. Mossaheb . Hakim Omare Khayyam Algebraist...

شامل رساله فی براهین الجبر و المقابله؛ رساله؛ عکس رساله خیام در تحلیل یک مسئله به معادله ی درجه سوم.

۱. خیام، عمر بن ابراهیم، - ۵۱۷ ق. -- معلومات -- جبر. ۲. جبر -- متون قدیمی تا قرن ۱۴. الف. انجمن آثار و مفاخر فرهنگی. ب. ایران. کمیسیون ملی یونسکو در ایران. ج. خیام، عمر بن ابراهیم، - ۵۱۷ ق. رساله فی براهین الجبر و المقابله. د. خیام، عمر بن ابراهیم، - ۵۱۷ ق. رساله. ه. خیام، عمر بن ابراهیم، - ۵۷۱ ق. رساله در تحلیل یک مسئله به معادله ی درجه سوم. و. عنوان. ز. عنوان: رساله فی البراهین الجبر و المقابله. ح. عنوان: رساله. ط. عنوان: رساله در تحلیل یک مسئله به معادله ی درجه سوم.

۹۵۷/م ۱۳۷۹ ۵۱۲ QA۱۵۵/خ ۹۵۷/م

۷۹ - ۹۲۸ کتابخانه ملی ایران

ISBN 964-6278-56-6

شابک ۹۶۴-۶۲۷۸-۵۶-۶

پیشگفتار انجمن

به نام خداوند جان و خرد

مسعودی مؤرخ بزرگ اسلامی می‌گوید ایرانیان از هر قومی دیگر سزاوارترند که دانش‌ها از آنان فراگرفته شود هر چند که اخبار آنان کهنه و مناقب و رسومشان با گذشت زمان و حوادث روزگار فراموش گشته است. (التنبیه و الاشراف، ص ۹۲) و مراد او از حوادث روزگار با احتمال قوی حمله اسکندر به ایران است که در روایات آمده که او کتابهای دین مجوس را سوزاند ولی کتابهای نجوم و طب و فلسفه آنان را به زبان یونانی ترجمه کرد، (مختار الحکم و محاسن الکلم، ص ۲۳۳) که بیت زیر از نظامی گنجوی به آن حادثه و ترجمه علوم ایرانیان به زبان یونانی اشارت دارد:

خردنامه‌ها را ز لفظ دری بیونان زبان کرد کسوت‌گری

با وجود این ایرانیان از حفظ و نگهداری بازمانده میراث علمی خود دریغ نورزیدند و آن را در مکانهای امن نگه داشتند. مسعودی در سال ۳۰۳ هجری در شهر استخر فارس نزد یکی از خاندانهای کهن ایرانی کتاب بزرگی را دیده که بسیاری از علوم ایرانیان را در بر داشته (مأخذ پیشین) و ابن حوقل از قلعة الجص (= دیر

گچین) از نواحی ازجان فارس یاد می‌کند که در آنجا مجوس ساکن بوده‌اند و به درس و بحث یادگارهای علمی خود (= ایذاکارات) می‌پرداخته‌اند. (صورة الارض، ص ۲۴۲). مسلمانان در زمان مأمون با تأسیس «بیت الحکمة» وسائل ترجمه علوم اوائل (= علوم یونانی) را از یونانی و سریانی به عربی فراهم ساختند و بسیاری از آثار علمی آنان در زمینه‌های مختلف علوم در دسترس دانشمندان اسلامی قرار گرفت و به موازات آن در نواحی مختلف ایران مراکزی برای تحقیق و بررسی علم و دانش فراهم آمد از جمله «خانه حکمت» در بلخ که ناصر خسرو (دیوان، ص ۷۹) در بیت زیر به آن اشاره کرده است:

حکمت را خانه بلخ بود و کنون خانه‌ش ویران و بخت وارون شد
این تلاقی فرهنگ‌ها و نقل و انتقال دانش‌ها موجب شکوفائی و پیشرفت دانش
در قرون اولیه اسلام شد و دانشمندانی مانند رازی و بیرونی و فارابی و ابن سینا
ظهور کردند و هر کدام با استفاده از میراث علمی اصیل و دخیل موجود، آثار
گرانبهای بیادگار گذاشتند که پایه و مایه دانش جدید در قرن‌های بعد گردید.

پیشینیان فلسفه را در تقسیم نخستین به دو قسم نظری و عملی تقسیم می‌کردند.
فلسفه نظری به طبیعی و تعلیمی (= ریاضی) و الهی تقسیم می‌گشت و حساب و
هندسه و هیئت و موسیقی از شعبه‌های ریاضیات بشمار می‌آمد. ابن سینا در
تقسیم‌بندی خود در کتاب شفا که علوم فلسفی را به نظری و عملی تقسیم کرده
است، می‌گوید: در فلسفه نظری که هدف آن استکمال نیروی نظری نفس است علم
به اموری پیدا می‌شود که تحت اعمال و احوال ما نیست و این قسم از فلسفه به
طبیعی و تعلیمی و الهی تقسیم می‌شود و وجه این تقسیم آنست که این فلسفه
نظری اگر علم به احوال موجود مقارن با ماده در حدود و وجود باشد طبیعی، و اگر
مفارق از ماده در حدود و وجود باشد الهی، و اگر مفارق از ماده فقط در حدّ باشد
تعلیمی است. موضوع تعلیمی (= ریاضی) یا مقداری است که در ذهن مجرد از
ماده است و آن هندسه است و یا مقداری است که در ذهن مأخوذ با ماده است و آن

هیئت است و یا عدد مجرّد از مادّه است و آن حساب است و یا عدد در مادّه است و آن موسیقی است. (الهیات شفا، ص ۴؛ شرح الهیات شفا ملاً مهدی نراقی، ص ۱۰).

در اهمّیت علم حساب و هندسه دانشمندان اسلامی اشارات متعدّدی داشته‌اند از جمله کرجی می‌گوید: علم حساب پایه‌اش بالاتر و مصلحتش فراگیرتر و فایده‌اش تمام‌تر از همه علوم است. همه طبقات مردم با اختلاف ادیان و زبان‌ها بدان نیازمندند زیرا صلاح جمهور و استواری امور بدان وابسته است (البدیع فی الحساب، ص ۷) و در مورد هندسه دانشمندان اسلامی تصریح کرده‌اند که هم برای فیلسوف و هم برای پزشک ضروری است.

فارابی در کتاب ماینبعی ان یقدم قبل تعلّم الفلسفة می‌گوید که افلاطون بر سر در معبدش نوشته بود مَنْ لَمْ یَكُنْ مُهَنْدِسًا فَلَا یَدْخُلْ عَلَیْنَا هر که هندسه نمی‌داند بر ما وارد نشود (مبایذی الفلسفة القدیمة، ص ۱۱).

ابن هندو می‌گوید که هندسه چشم عقل را باز می‌کند که یک چشم عقل از هزاران چشم سر بهتر است. (مفتاح الطب، ص ۶۶).

ابوالفتح عمر بن ابراهیم نیشابوری معروف به «خیّام» یا «خیّامی» در زمانی زندگی می‌کرد که میراث علمی ایرانی و هند و یونانی در ریاضیات در اختیار او بوده است. وجود زیچ شهریار و کتابهای البزیدج فی الموالید (بزیدج معرّب ویچتیک = گزیده، مختارات) و الاندرز غر فی الموالید (= اندرزگر) و استعمال اصطلاحات فارسی همچون «هیلاج» و «کدخداه» و «جانبختان» در میان مسلمانان نشانه تأثیر ریاضیات و نجوم ایرانی در تمدن اسلامی بوده است (تاریخ نجوم اسلامی، ص ۲۳۰، ۲۶۱، ۲۶۲، ۱۸۵) و حتی ریاضی دان قرن هفتم هجری غضنفر تبریزی در رساله المشاطه لرساله الفهرست خود در اثبات مطلبی پس از ارجاع به تنکلوشای بابلی و برخی از منابع کلدانی می‌گوید: و کذا فی البزیدجات الفارسیّة (فهرست کتابهای رازی، ص ۱۹۹). از منابع مهم هندی سده‌اند که نزد مسلمانان به سندهند

مشهور است و زیج ارکند در دسترس مسلمانان بوده و آن را به «راستی که اندرو کژی نیاید» تفسیر کرده‌اند. (التفهیم بیرونی، ص ۱۴۷) و حتی در ادب عرب هم به آن اشاره شده است. بحتری در دیوان خود جلد ۲، ص ۱۶۰ می‌گوید:

أَلَسْتُ بِالسَّانِدِ هَذَا بَصِيرٍ إِنَّ لَمْ تَقُقْ حَاسِبِيهِ تَتَّصِفُ

حتی کتابی از کیفیت ضرب و تقسیم نزد هندیان تحت عنوان فی الضرب و القسمة بالهندي از ابوالمجد ابن عطية در دسترس مسلمانان بوده است (مجموعه رسائل علمی موجود در موزه بریتانیا، شماره ۷۴۷۳، اضافات، ص ۱۷۰).

خیام که دارای استعدادی خارقالعاده و حافظه‌ای قوی بود چنانکه کتابی را در اصفهان هفت بار خواند و حفظ کرد و در ادب عرب چنان مهارتی داشت که به تحقیق و تفحص ابیات حماسه ابوتمام می‌پرداخت (تاریخ حکماء الاسلام، بیهقی، ص ۱۲۲). از این موقعیت استفاده کرد و به فراگیری اجزاء حکمت از ریاضیات و معقولات اشتغال ورزید و به قول بیهقی «ابن بجدت» (= ماهر، حاذق، مسلط) این علوم گردید. خاصه آنکه در نتیجه تکفیر و تفسیق علمای ظاهر در خراسان که هندسه را زندقه و مدخل کفر و شر می‌دانستند، این دانش‌ها رو به ضعف نهاده بود، چنانکه ناصر خسرو گله و شکایت می‌کند از اینکه در زمین خراسان و مشارق حاسبی کامل یافت نمی‌شود و او برای رفع این کاستی کتاب غرائب الحساب و عجائب الحسب را تألیف کرده است (جامع الحکمتین، ص ۳۰۸). خیام در چنین محیطی به دفاع از علوم ریاضی پرداخت و در آثار خود سخن از اهمیّت و قداست و ضرورت دانستن این علوم به میان آورد و در آغاز کتاب فی شرح ما اشکل من مصادرات کتاب اقلیدس چنین می‌گوید:

«تحقیق و تحصیل علوم با برهانهای یقینی بر هر که طالب نجات و سعادت ابدی است واجب است بویژه کلیات و قوانینی که با آن می‌توان به امور زیر به اندازه طاقت انسانی راه یافت: تحقیق معاد و اثبات نفس و بقای آن و تحصیل اوصاف واجب الوجود و فرشتگان و ترتیب خلقت و اثبات نبوت و اثبات خواجه»

فرمانروای میان مردم که با اذن خداوند تعالی فرمان‌دهنده و بازدارنده آنان است. آن بخش از حکمت که بنام ریاضی خوانده می‌شود ادراک آن از جهت تصوّر و تصدیق آسان‌ترین بخش است زیرا آنچه از آن که مربوط به عدد می‌شود امری آشکار است و آنچه که مربوط به هندسه است بر هر که دارای فطرتی سلیم و اندیشه‌ای تیز و حدسی نیکوست، پنهان نمی‌ماند. این بخش از بخش‌های حکمت موجب می‌شود که آدمی از ورزش اندیشه بهره‌مند شود و ذهن او ورزیده گردد و نفس او از هر چه که برهانی برای آن نیست نفرت پذیرد» (ص ۳۰۹، چاپ رشدی راشد).

در این جا اضافه می‌نماید که اقلیدس و آثار او بویژه کتاب الاصول او در خراسان معروف و مشهور بوده است. پیش از خیّام، ناصر خسرو (دیوان، ص ۱۴۵) می‌گوید:

وگر دیدی مرا عاجز نگشتی در اقلیدس به پنجم شکل مأمون
و پس از خیّام، عطار نیشابوری (خسرونامه، ص ۲۷۳) می‌گوید:

گرفته تخته افلاک جدول نشسته شب که اقلیدس کند حل
انجمن آثار و مفاخر فرهنگی که وارث انجمن آثار ملی سابق گردیده بر خود واجب می‌داند که با کمک و مساعدت متولیان علم این کشور به تحقیق و بررسی آثار بزرگان و دانشمندان این مرز و بوم پردازد و آنان را به نسل جوان که نگاهبان فرهنگ و سنت این کشور خواهند بود معرفی نماید. این انجمن در طی عمر هشتادساله خود ده‌ها کتاب نفیس از علمای اسلام و ایران و تحقیقات و پژوهش‌های دانشمندان معاصر را درباره آنان چاپ و منتشر ساخته است که آنچه درباره حکیم عمر خیّام است می‌توان از کتابهای زیر نام برد:

۱. حکیم عمر خیّام بعنوان عالم جبر، دکتر غلامحسین مصاحب، ۱۳۳۹ ه. ش.
۲. طریخانه (رباعیات حکیم عمر خیّام نیشابوری)، یار احمد بن حسین رشیدی تبریزی، با مقدمه و تصحیح و تحشیه جلال‌الدین همائی، ۱۳۴۲.
۳. نادره ایام حکیم عمر خیّام و رباعیات او، اسماعیل یکانی، ۱۳۴۲.

۴. ختّامی نامه (جلد اوّل)، جلال الدّین همائی، ۱۳۴۶.

اکنون که کمیسیون ملی یونسکو در ایران، کنگره بین‌المللی بزرگداشت نهصدمین سال وفات حکیم عمر ختّام نیشابوری را در زادگاه او، نیشابور، برگزار می‌کند مناسب دانسته شد کتاب حکیم عمر ختّام بعنوان عالم جبر که به وسیله دانشمند فقید مرحوم دکتر غلامحسین مصاحب نگارش یافته و در سال ۱۳۳۹ بوسیله انجمن منتشر شده با همکاری کمیسیون ملی یونسکو در ایران تجدید چاپ و به شرکت‌کنندگان در کنگره عرضه گردد.

مهدی محقق

رئیس هیأت مدیره و عضو شورای علمی

انجمن آثار و مفاخر فرهنگی

اردیبهشت ماه ۱۳۷۹

مقدمه

موضوع کتاب حاضر معرفی آثار و تحقیقات حکیم عمر خیام است در علم جبر. از خیام فعلاً دو رساله در این باب در دست داریم، یکی رساله‌ی او در علم جبر، و دیگری رساله‌ای در تحلیل يك مسئله‌ی هندسی به معادله‌ی درجه‌ی سوم و حل این معادله بوسیله‌ی قطوع مخروطی.

محققین تاریخ علوم دقیقه رساله‌ی خیام را در جبر از شاهکارهای علمی قرون وسطی شمرده‌اند، و این نه از آنست که این رساله در بسط علم جبر تأثیری داشته، بلکه اهمیت رساله از اینست که در آن برای اول دفعه قسمتی از یکی از مباحث عمده‌ی جبر یعنی مبحث معادلات درجات اول و دوم و سوم، فی حد ذاته و قطع نظر از فواید عملی آن، منظم‌اً مورد بحث قرار می‌گیرد، و عبارت مختصر و مفید ج. سارتن، محقق معروف تاریخ علوم، «خیام اول کسی است که به تحقیق منظم علمی در معادلات درجات اول و دوم و سوم پرداخته و طبقه‌بندی تحسین - آوری از این معادلات آورده است... و رساله‌ی وی در علم جبر، که مشتمل بر این تحقیقات است، معرفی يك فکر منظم علمی است؛ و این رساله یکی از برجسته‌ترین آثار قرون وسطانی و احتمالاً برجسته‌ترین آنها در این علم است.»

نگارنده که همواره شوقی به مطالعه‌ی تاریخ ریاضیات در دوره‌ی اسلامی داشته‌ام، چندین سال پیش، در صدد معرفی رساله‌ی خیام در جبر به فارسی زبانان برآمدم^۵، و بدین منظور کتابی بنام جبر و مقابله خیام پرداختم که مشتمل بود بر متن رساله‌ی خیام و ترجمه‌ی ملخصی از آن و نیز مقدماتی که در فهم جبر خیام و شناساندن ارزش

(۵) جا دارد که این صفحه را به ذکر جمیل استاد بزرگوار خود مرحوم غلامحسین رهنما مزین کنم. اولین آشنائی من با کارهای جبری خیام بوسیله‌ی نسخه‌ای بود که از روی کتاب جبر عمر خیام و بیکه برای آن مرحوم استنساخ شده بود.

علمی آن مفید و بلکه ضروری مینمود. این کتاب در سال ۱۳۱۷ هـ ش به همت آقای نصرالله سبوحی، مدیر کتابفروشی و چاپخانه‌ی مرکزی، چاپ و نشر شد، و بدین ترتیب، برای نخستین بار رساله‌ی گرانبهای خیام در دسترس فارسی‌زبانان قرار گرفت. این کتاب ظاهراً فعلاً کمیاب است، و در هر صورت، در سراسر آن، آثار خامیهای ایام جوانی مؤلف هویدا است، و بعضی مطالب آن شدیداً محتاج تنقیح و تجدید نظر است. در تابستان سال ۱۳۳۸، از طرف انجمن محترم آثار ملی به نگارنده تکلیف شد که کتابی در معرفی کارهای جبری خیام و بالاخص مشتمل بر متون آثار او و ترجمه‌ی فارسی آنها تهیه کنم، ولی بنده با اینکه سخت مشتاق انجام چنین خدمتی بودم، ابتداءً بجهاتی در قبول آن تردید داشتم، ولی در این امر چنان شور و خلوص نیتی در آن انجمن دیدم که دریغ آمد باین خدمت تن درندهم. پس انجام این تکلیف را که فرصت مناسبی برای معرفی صفحات درخشانی از تاریخ علوم در دوره‌ی اسلامی بود بعهده گرفتم، و به تهیه‌ی کتاب حاضر پرداختم.



رؤوس مطالب کتاب را با نظری به فهرست مندرجات آن میتوان دریافت. بعلاوه فهرست عمومی الفبائی آخر کتاب (صص ۳۰۹ - ۳۲۴) راهنمای جامعی به مطالب کتاب است. معذک، ذکر نکاتی چند در این مقام مفید بنظر میرسد.

(۱) **متون آثار خیام.** آنچه از آثار خیام که در این کتاب آمده است یکی رساله‌ی اوست در علم جبر، و دیگری رساله‌ای از وی که در نسخه‌ی موجود آن عنوان خاصی ندارد، و ما برای تسهیل آنرا رساله در تحلیل يك مسئله و گاهی باختصار رساله‌ی تحلیل نامیده‌ایم، و تا حدی که اطلاع داریم اولین بار است که این رساله طبع میشود.

متن رساله‌ی خیام از روی متن وپکه، که تفصیل آن در صفحات ۱۴۱-۱۴۲ کتاب حاضر آمده است، چاپ شده است.

از رساله‌ی تحلیل تنها نسخه‌ای که بهنگام چاپ کتاب در دسترس نگارنده بود

همان بود که چندین سال پیش از روی نسخه‌ای متعلق به عباس اقبال آشتیانی استنساخ نموده بود (رجوع کنید به صفحات ۱۵۱ - ۱۵۲ کتاب حاضر)، و چون با تمام کوششی که برای یافتن نسخه‌ی اصلی بعمل آمد از آن خبری نیافت، به چاپ نسخه‌ای که خود استنساخ کرده بود مبادرت نمود. خوشبختانه در جریان طبع کتاب بتوسط آقای محمد تقی دانش پژوه اطلاع حاصل شد که نسخه‌ی اصلی رساله در کتابخانه‌ی مرکزی دانشگاه تهران مخزون است. پس به همت انجمن آثار ملی و مساعدت فضلالی محترم، آقایان دکتر ذبیح‌الله صفا و محمد تقی دانش پژوه و دیگر اولیاء کتابخانه‌ی مرکزی دانشگاه تهران عکسی از آن نسخه فراهم شد، و برای تمیم فایده در کتاب حاضر درج گردید (ص ۲۸۲ - ۲۹۲)، تا خوانندگان اصل کلام منسوب به خیام را نیز در دست داشته باشند، و بعلاوه بدین ترتیب میتوان انحرافات را که ممکن است بین متن چاپی رساله‌ی تحلیل با متن اصلی موجود باشد کشف کرد.

مطالب خارج از سخن خیام را، که به جهتی در متون یا ترجمه‌های فارسی آنها درج شده، در داخل علامت [] قرار داده‌ایم. در متون رسایل خیام این اضافات تقریباً منحصر است به شماره‌هایی که بمنظور طبقه‌بندی مطالب مورد بحث خیام درج کرده‌ایم. در باب طبقه‌بندی مطالب اشاراتی در بند (۴) همین مقدمه آمده است. در این جا کافی است گفته شود که شماره گذاری در متون و ترجمه‌های آنها بنحوی است که فقط اولین رقم سمت چپ، که نماینده‌ی قسمتی از قسمتهای کتاب است، تفاوت میپذیرد، و بدین ترتیب، خواننده به آسانی میتواند ترجمه‌ی هر فصل یا جزئی از متون خیام را به آسانی پیدا کند. مثلاً مطلبی که در قسمت اول تحت شماره‌ی ۱۰۸۰۴۰۱ آمده ترجمه‌ی آن در قسمت پنجم تحت شماره‌ی ۵۰۸۰۴۰۱ مضبوط است.

در شکل‌های رسائل خیام، برای تسهیل کار، هم حروف عربی را بر طبق متون وی قرار داده‌ایم، و هم حروف الفبای لاتینی را. تناظر حروف دو الفبا مستخرج است

از تناظری که ریاضیون دوره‌ی اسلامی در نقل شکلهای آثار یونانی به عربی تثبیت کرده بودند، از این قرار

ا	ب	ج	د	ه	و	ز	ح	
A	B	C	D	E	F	G	H	
ط	ی	ک	ل	م	ن	س	ع	ف
T	I	K	L	M	N	O	S	F

(۴) ترجمه‌ی فارسی رسائل خیام . برای اینکه خوانندگان ناآشنا به زبان

عربی از استفاده از رسائل خیام محروم نمانند، ترجمه‌ی فارسی هر دو رساله‌ی جبری وی در کتاب حاضر آمده است (صص ۱۵۹-۲۵۰ و ۲۵۲-۲۷۹).

در این باب باید به اطلاع خوانندگان برساند که در کتاب جبر و مقابله خیام که سابقاً بتوسط نگارنده تهیه شده بود، از ترجمه کردن تمام جبر خیام خودداری کرده بودیم، و فقط قسمت‌های اساسی آنرا که مبین فکر ریاضی خیام است به فارسی برگردانیده بودیم، و مباحث حل معادلات که در رساله‌ی خیام بسیار طولانی است با استفاده از زبان امروز جبر تلخیص شده بود. حسن این طریقه اینست که خواننده، بی آنکه گرفتار بحث‌های خیام - که بعلت بیخبری وی از فواید استعمال حروف و علامات بسیار طولانی و ملال انگیز است - شود، روش عمومی او را در حل و بحث معادلات درمی‌یابد. از طرف دیگر، طریقه‌ی مذکور مشکلاتی را که خیام و دیگر ریاضیون قدیم با آنها مواجه بوده‌اند پوشیده میدارد، و در نتیجه، ممکن است ارزش پیشرفت‌ها و موفقیت‌های ایشان را کمتر از آنچه هست جلوه دهد. بنابراین، در کتاب حاضر، هر دو اثر خیام را تماماً به فارسی نقل کرده‌ایم (قسمت‌های پنجم و ششم کتاب). در ترجمه‌ی رسائل خیام به فارسی، منت‌های کوشش بعمل آمده‌است که عبارات فارسی معانی متون را - آنچنانکه مترجم فهمیده است - برساند، و هر جا مطلبی بر وی مبهم بوده یا آنچه او فهمیده با ترجمه‌های فرانسوی و انگلیسی جبر خیام اختلافی دارد صریحاً ذکر کرده است. خلاصه اینکه در نقل متون خیام به فارسی، تا آنجا که

بر مترجم ممکن بوده امانت را رعایت کرده است ، ولی از ترجمه‌ی تحت اللفظ احتراز نموده .

در مواردی ، برای آسان کردن فهم مطالب یا طبقه بندی آنها ، عباراتی به ترجمه‌ی کلام خیام اضافه نموده است ، ولی این اضافات را در داخل علامت « [] » درج کرده است . بالاخص ، عناوین مطالب در ترجمه‌ها از این جمله است ، و چنانکه گفته شد ، تناظر شماره های مطالب متون و ترجمه‌های آثار خیام موجب تسهیل کار مراجعه کننده خواهد بود . و البته اضافات مختصر مذکور غیر از حواشی مفصلی است که در ذیل قسمتهای پنجم و ششم کتاب برای توضیح مطالب خیام آورده است .

بالاخره ، چون ممکن است کسانی فقط خواستار اطلاع مجملی از کارهای جبری خیام و ارزش آنها باشند ، ولی مجال مطالعه‌ی آثار او را نداشته باشند ، در قسمت چهارم کتاب تحلیلی از کارهای خیام درجبر و از رسائل وی به زبان کنونی ریاضیات آورده‌ایم که از شاخ و برگهای ملال انگیز و درازی سخن که لازمه‌ی جبر لفظی است پیراسته است .

(۴) مطالب تاریخی کتاب . برای اینکه اهمیت تحقیقات خیام در حل معادلات

جبری چنانکه شاید معلوم شود ، کافی نیست که تنها کتاب او مورد تحلیل و بررسی قرار گیرد ، بلکه باید محل وی و کارهای او در تاریخ ریاضیات ، و بالاخص در تاریخ علم جبر ، معلوم شود ، و این امر مستلزم اینست که نظری به بسط این علم تا زمان خیام بیفکنیم ، و اگر طالب تحقیق جامعتری باشیم ، اقتضای زمان خیام هم کافی نیست ، و باید لااقل به آغاز پیدایش روشهای جدید جبر ، که این علم را بکلی از حالت رکود و سترونی خارج ساخته به يك علم بالان (یا ، باصطلاح فرنگی ، دینامیک) ارتقا داد نیز نظر افکند .

استقصاء در تاریخ جبر خود موضوع کتابها است ، و طالبین آن باید به کتابهایی که محققین و متخصصین فن در این باب تألیف و تصنیف کرده‌اند مراجعه نمایند . آنچه از این موضوع جالب که برای معرفی مقام خیام در علم جبر مفید و شاید ضروری

است با کمال ایجاز در قسمت سوم کتاب حاضر (صص ۷۷ - ۱۲۸) آمده است. ضمناً در این باب توجه خوانندگان را باین نکته جلب میکنیم که، در قسمت مذکور، هدف نوشتن تراجم احوال اشخاص نبوده است، و چون در این باب در اول صفحه‌ی ۹۶ کتاب توضیحی داده‌ایم مطلب را مکرر نمیکنیم.

(۴) **طبقه‌بندی و شماره‌گذاری.** برای تسهیل ارجاع، مطالب کتاب را بر حسب تقسیمات جزء آنها طبقه‌بندی و شماره‌گذاری کرده‌ایم. به قسمتهای ششگانه‌ی کتاب بترتیب شماره‌های ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ داده شده است. هر يك از قسمتهای ششگانه، در تقسیم اول، به چند قسمت جزء اصلی (مثلاً «فصول») تقسیم میشود، و این قسمتهای جزء با افزودن رقمی در سمت راست رقم نماینده‌ی قسمت اولیه مشخص میگردد، و هكذا. مثلاً قسمت سوم کتاب (شماره‌ی ۳) مشتمل بر هفت قسمت جزء است، که ششمین آنها (شماره‌ی ۳۰۶) در باب معادلات جبری است (صفحات ۱۱۰ - ۱۲۱)، و این قسمت جزء (یعنی ۳۰۶) خود مشتمل بر چند قسمت جزء است، که فی‌المثل چهارمین آنها (شماره‌ی ۳۰۶۰۴) در باب جمل معادله (ص ۱۱۲) و هشتمین آنها (شماره‌ی ۳۰۶۰۸) در باب دستگاههای چند مجهولی است، و هكذا. چنانکه در بند (۱) این مقدمه گفته شد، تناظر تقسیمات متون آثار خیام و ترجمه‌های آنها کار مراجعه‌کننده را بسیار آسان میکند.

(۵) توجه به نکات ذیل برای تسهیل کار نقادان - هم آنانکه با سعی صدر و اطلاع کافی بخود زحمت بررسی موضوعی را که نقادی میکنند میدهند، و هم نقادان مزدور و حرفه‌ای - خالی از فایده نیست.

(الف) در متن و حواشی کتاب (نه در شماره‌های ترتیب صفحات) رقم صفر به صورت ۰ (و گاهی بعلت نبودن وسیله، به علامات 0 و 0) ضبط شده است تا از نقطه متمایز باشد. ضرورت استعمال علامات متمایز برای صفر و نقطه و پنج بر هر کس که با رقم سر و کار دارد، یا لاقلاً از مفهوم عدد و مقدار خبری دارد، آشکار است، و برای ریاضیدانان از بدیهیات اولیه.

(ب) کلمه‌ی «ابن» در این کتاب همه‌جا بهمین صورت ضبط شده مگر استثناءً در نقل عبارت دیگران .

(ج) در این کتاب «کسره‌ی اضافه» بعد از هاء غیر ملفوظ همانطور که تلفظ میشود نوشته شده (مانند «کسره‌ی بجای «کسره» و «بوسیله‌ی بجای «بوسیله»»). در این باب نگارنده با عده‌ای که برهانی جز فحش و ناسزا دارند صحبت کرده است، و دلیلی جز اینکه چون صورت «بوسیله» و امثال آن رسم الخط معمول بوده و لهذا باید آنرا حفظ کرد نشنیده است، ولی کسانی که این عقیده را دارند توانسته‌اند بگویند که چرا در مورد «خانه‌ای» یا «خانه‌بی» احترام رسم الخط قدیم رعایت نمیشود، و توانسته‌اند بگویند که چرا از بین تمام علامات صرف کلمات فارسی فقط باید کردن این یاء بیچاره را شکست. اگر سری به مدارس ابتدائی بزنند ملاحظه خواهند فرمود که اطفال ما «خانه‌ی حسن» را «خانه حسن» میخوانند، و اگر هم مواجه با علامت «ء» فوقانی شوند متحیر میشوند که چرا این علامت «همزه» را باید «ی» بخوانند. و نیز اگر دقیقترین و صحیحترین کتابها را از حیث چاپ ملاحظه فرمایند مشاهده خواهند فرمود که در کمتر موردی علامت «ء» فوقانی ضبط میشود. البته میشود گفت که چشم معلم و شاگرد و حروف‌چین و مصحح و خواننده همه کور شود، و درست‌یاد بدهند و درست‌یاد بگیرند و درست بچینند و درست تصحیح کنند و درست بخوانند، ولی آیا سزاوار نیست که بجای کور کردن این همه چشم از دیگران، چشمهای خود را باز کنیم و انصاف را حکم قرار دهیم، و «کسره‌ی اضافه» را در مورد مورد بحث همانطور که تلفظ میشود بنویسیم؟

(د) ما را از استعمال ارقام رومی به همان طریق که در نزد مردم مغرب زمین مرسوم است هیچگونه باکی نیست، و مثلاً بجای «صلاح‌الدین یوسف اول» نوشته‌ایم «صلاح‌الدین یوسف I» (ذیل صفحه‌ی ۱۵۵).

(۵) علامات اختصاری که در کتاب حاضر بکار رفته به شرح ذیل است :

ص	صفحه	صص	صفحات
ه ق	هجری قمری	ق م	قبل از میلاد (مسیح)
ه ش	هجری شمسی	ب م	بعد از میلاد (مسیح) .



امیدواریم مقدمات و حواشی و تعلیقاتی که در این کتاب آورده‌ایم خوانندگان را در شناختن مقام خیام و ارزش تحقیقات او در علم جبر و مبانی کارهای وی در این علم یاری کند .

در تهیه‌ی این کتاب جمعی از بزرگان و دوستان پیوسته مشوق نگارنده بوده‌اند یا از جهاتی وی را یاری کرده‌اند ، و تشکر از مساعدتهای ایشان بر بنده فرض است . در تمام مدت تهیه و چاپ کتاب ، انجمن آثار ملی در فراهم ساختن وسایل کار با کمال خلوص نیت اقدام نمود ، و نگارنده ، علاوه بر عرض تشکر از سهمی که از مزایای کومکهای آن انجمن برده‌ام ، از خداوند متعال مسئلت میکنم که انجمن را در زنده کردن آثار علمی گذشتگان ما ، که بقول تیمسار سپهبد فرج‌الله آق‌اولی ، رئیس محترم هیئت مدیره‌ی انجمن ، بیش از پیش مورد توجه انجمن واقع شده است ، موفق فرماید .

استاد علامه ، جناب آقای سید حسن تقی‌زاده ، که همواره مشوق بنده در کارهای علمی بوده‌اند ، قسمتهای سوم و چهارم کتاب را از نظر گذرانیده نکات مهمی را به نگارنده تذکر دادند که در تنقیح مطالب کتاب بسیار مؤثر بوده است ، و بدین وسیله تشکرات خالصانه‌ی خود را به محضر دانشپور ایشان تقدیم میکنم .

از مساعدتهای برادر ارجمند آقای محمود مصاحب و دوست گرام آقای احمد بطحائی در مقابله‌ی کتاب صمیمانه تشکر میکنم . بالاخره ، از متصدیان چاپخانه‌ی

بهمن - مخصوصاً آقای محمود مطیر ، مدیر چاپخانه ، و آقای عباس تقی زادگان ، مسئول شعبه‌ی حروفچینی - که در حدود وسایل موجود در خوبی چاپ کتاب بذل جهد نموده‌اند سپاسگزاری مینمایم .

غلامحسین مصاحب

تهران

آذرماه ۱۳۳۹ هجری شمسی

فهرست مندرجات

۱. قسمت اول

صفحه	
۵۶ - ۷	رساله‌ی جبر خیام (متن)

۲. قسمت دوم

۷۴ - ۵۹	متن رساله‌ی خیام در تحلیل يك مسئله (متن)
---------	--

۳. قسمت سوم

نظر اجمالی به تاریخ علم جبر از ایام قدیم
تا زمان خیام

۸۰ - ۷۷	§ ۳۰۱ ملاحظات کلی و مقدماتی
۹۲ - ۸۰	§ ۳۰۲ جبر در یونان
۹۵ - ۹۲	§ ۳۰۳ جبر در هند
۱۰۷ - ۹۵	§ ۳۰۴ جبر در دوره‌ی اسلامی
۱۱۰ - ۱۰۷	§ ۳۰۵ تاریخچه‌ی علم جبر در دوره‌ی اسلامی
۱۲۱ - ۱۱۰	§ ۳۰۶ معادلات جبری
۱۲۸ - ۱۲۱	§ ۳۰۷ معادلات درجه‌ی سوم و درجات بالاتر

۴. قسمت چهارم

ملاحظات کلی در باب کارهای جبری خیام

۱۳۲ - ۱۳۰	§ ۴۰۱ خیام و آثار ریاضی او
۱۳۸ - ۱۳۳	§ ۴۰۲ خیام بعنوان عالم جبر
۱۵۰ - ۱۳۸	§ ۴۰۳ جبر خیام

- ۴۰۴ § رساله در تحلیل يك مسئله ۱۵۱ - ۱۵۵
- ۴۰۵ § اصطلاحات ریاضی خیام ۱۵۷ - ۱۵۵

۵. قسمت پنجم

رساله‌ی جبر خیام (ترجمه‌ی فارسی)

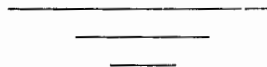
- مقدمه ۱۵۹ - ۱۶۱
- ۵۰۱ § تعریفات و اصطلاحات ۱۶۱ - ۱۶۵
- ۵۰۲ § طبقه بندی معادلات ۱۶۶ - ۱۷۰
- ۵۰۳ § حل مفردات ۱۷۰ - ۱۷۴
- ۵۰۴ § معادلات سه جمله‌ای درجه‌ی دوم ۱۷۴ - ۱۸۳
- ۵۰۵ § مقترنات سه تائی درجه‌ی سوم قابل تحویل به درجه‌ی دوم ۱۸۳ - ۱۸۷
- ۵۰۶ § مقدمات حل معادلات درجه‌ی سوم ۱۸۷ - ۱۹۳
- ۵۰۷ § مقترنات سه تائی درجه‌ی سوم ۱۹۳ - ۲۰۹
- ۵۰۸ § مقترنات چهارتائی سه با يك ۲۰۹ - ۲۲۱
- ۵۰۹ § مقترنات چهارتائی دو با دو ۲۲۱ - ۲۳۳
- ۵۰۱۰ § معادلات کسری ۲۳۳ - ۲۴۱
- ۵۰۱۱ § نقد کارهای ابوالجود ۲۴۱ - ۲۵۰

۶. قسمت ششم

رساله در تحلیل يك مسئله (ترجمه‌ی فارسی)

- ۶۰۱ § طرح مسئله ۲۵۰ - ۲۵۵
- ۶۰۲ § تحلیل مسئله به مثلث معین ۲۵۷ - ۲۵۵

۲۶۲ - ۲۵۷	§ ۶۰۳ خواص مثلث معین و معادله‌ی حل آن
۲۶۹ - ۲۶۲	§ ۶۰۴ کلیاتی در باب معادلات
۲۷۳ - ۲۶۹	§ ۶۰۵ حل معادله‌ی مثلث معین
۲۷۷ - ۲۷۳	§ ۶۰۶ حل مسئله‌ی ۶۰۱
۲۷۸	§ ۶۰۷ در محاسبه‌ی مقدار تقریبی جواب
۲۷۹	(پایان رساله)
۲۸۰	مسئله
۲۹۲ - ۲۸۲	عکس رساله‌ی خیام در تحلیل يك مسئله
	☆ ☆ ☆
۳۰۳ - ۲۹۳	ملحقات
۳۰۷ - ۳۰۴	ماخذ
۳۲۴ - ۳۰۹	فهرست عمومی الفبائی



قسمت اول

رساله‌ی جبر خیام

(متن)

رسالة

في براهين الجبر والمقابلة

لعمر الخيامي

مقالة
فى الجبر و المقابلة
للحكيم الاوحد
ابى الفتح عمر بن ابراهيم
الخيامى

رسالة الحكيم الفاضل

غياث الدين ابي الفتح عمر بن ابراهيم الخيامي النيشابوري

قدس الله روحه العزيز

في البراهين على مسائل الجبر و المقابلة



الحمد لله رب العالمين والعاقبة للمتقين و لا عدوان الا على الظالمين والصلوة على الانبياء و خصوصاً على محمد و آله الطاهرين اجمعين ان احد المعاني التعليمية المحتاج اليها في جزء الحكمة المعروف بالرياضي هو صناعة الجبر والمقابلة الموضوعه لاستخراج المعهولات العديده و المساحيه و ان فيها اصنافا يحتاج فيها الى اصناف من المقدمات معتاصه جداً فتعدّر حلها على اكثر الناظرين فيها اما المتقدمون فلم يصل اليها منهم كلام فيها لعلمهم لم يتفطنوا لها بعد الطلب والنظر او لم يضطرّ البحث اياهم الى النظر فيها اولم ينقل الى لساننا كلامهم فيها و اما المتأخرون فقد عنّ للماهاني منهم تحليل المقدمة التي استعملها ارشميدس مسلمة في الشكل الرابع من المقالة الثانية من كتابه في الكرة والاسطوانة بالجبر فتأدى الى كعاب و اموال و اعداد متعادلة فلم يتفق له حلها بعد ان افكر فيها ملياً فجزم القضاء بانه ممتنع حتى نبغ ابو جعفر الخازن و حلها بالقطع المخروطية ثم اقتقر بعده جماعة من المهندسين الى عدة اصناف منها فبعضهم حل البعض و ليس لواحد منهم في تعديد اصنافها و تحصيل انواع كل صنف

منها والبرهان عليها كلامٌ يعتدُّ به الاعلى صنفين ساز كرهما و انى لم ازل كنت شديد الحرص على تحقيق جميع اصنافها و تمييز الممكن من الممتنع فى انواع كل صنف يبراهين لمعرفتى بان الحاجة اليها فى مشكلات المسائل ماسة جداً و لم اتمكن من التجرد لتحصيل هذا الخبر والمواظبة على الفكر فيه لاعتراض ما كان يعوقنى عنه من صروف الزمان فانا قد منينا بانقراض اهل العلم الاعصابة قليلى العدد كثيرى المحن همهم افتراض (*) غفلات الزمان ليتفرغوا فى اثنائها الى تحقيق و ايقان علم و اكثر المتشبهين بالحكماء فى زماننا هذا يلبسون الحق بالباطل و لا يتجاوزون حدّ التدليس و الترائى بالمعرفة و لا ينفقون القدر الذى يعرفونه من العلوم الا فى اغراض بدنية خسيصة و ان شاهدوا انساناً معيناً بطلب الحق و ايثار الصدق مجتهداً فى رفض الباطل و الزور و ترك المراياة والخداع استخفوه و سخروا منه والله المستعان على كل حال و اليه المفزع و لما من الله تعالى على بالانقطاع الى جناب سيدنا الاجل الاوحد قاضى القضاة الامام السيد ابى طاهر ادام الله علاه و كبت حسدته و اعداءه بعد اليأس من مشاهدة كامل مثله فى كل فضيلة عملية و نظرية و جمع بين انفاذ فى العلوم و تثبت فى الاعمال و طلب الخير لكل واحد من ذى جنسه فانشرح بمشاهدته صدرى و ارفع بمصاحبتة ذكرى و عظم بالاقبتباس من انواره امرى واشتد بالآائه و نعمه ازرى فلم اجد بدا من ان انحو نحو تلافى ما قوتنيه ريب الزمان من تلخيص ما اتحققه من لباب المعانى الحكيمية تقرباً الى مجلسه الرفيع و ابتدأت بتعديد هذه الاصناف من المقدمات الجبرية ان الرياضيات اولى بالتقديم و اعتصمت بجبل التوفيق من الله تعالى راجياً منه ان يوقنى لاتباع هذا بتحقيق ما تمهى اليه بحثى و بحث من تقدمنى من العلوم التى هى اهم من غيرها متمسكاً بالعرورة الوثقى من عصمته انه ولى الاجابة و عليه التكلان فى كل حال

[§ ١٠١٠١] اقول بعون الله و حسن توفيقه ان صناعة الجبر و المقابلة صناعة

علمية موضوعها العدد المطلق و المقادير الممسوحة من حيث هى مجهولة و مضافة الى

(*) درسخه ليدن (§ ٤٠٣٠٢٠١) چين است . در متن ويكه (§ ٤٠٣٠٢٠١)

بجای «همهم افتراض» عبارت «فهمهم افتراض» انتخاب شده است .

شيء معلوم به يمكن استخراجها وذلك الشيء اما كميّة واما نسبة على وجه لا يشار كها فيه غيرها و يدلك عليه تصفحها و مطلوبها العوارض التي تلحق موضوعها بما هو موضوع لها بالصفة المذكورة و تمامها الوقوف على الطرق التعليمية التي تتفطن بها لهذا النوع المذكور من استخراج المجهولات العددية او المساحية [§ ١٠١٠٢] و المقادير هي الكمية المتصلة وهي اربعة الخط و السطح و الجسم و الزمان على ما هو مذكور مجملا في قاطيغورياس و مفضلا في الحكمة الاولى و قوم يعدون المكان نوعاً قسيماً للسطح تحت جنس المتصل و التحقيق يبطل عليهم هذا الرأى و تصحح ان المكان هو سطح بحال و موضع تحقيقه غير ما نحن فيه ولم تجر العادة بذكر الزمان في موضوعات مسائل الجبر و لو ذكر لجاز

[§ ١٠١٠٣] و عادة الجبريين ان يسموا في صناعتهم المجهول الذي يراد استخراج شئاً و مضروبه في مثله مالا و مضروب ماله فيه كعباً و مضروب ماله في مثله مال مال و مضروب كعبه في ماله مال كعب و مضروب كعبه في مثله كعب كعب و على هذا القياس بالغاً ما بلغ و معلوم من كتاب اقليدس في الاصول ان هذه المراتب كلها متناسبة اعنى نسبة الواحد الى الجذر كنسبة الجذر الى المال و كنسبة المال الى الكعب فيكون نسبة العدد الى الجذور كنسبة الجذور الى الاموال و كنسبة الاموال الى الكعاب و كنسبة الكعاب الى اموال المال بالغاً ما بلغ

[§ ١٠١٠٤] و يجب ان يتحقق ان هذه الرسالة لا يفهمها الا من يكون متقناً لكتاب اقليدس في الاصول و كتابه في المعطيات و مقالاتين من كتاب بلونيوس في المخروطات و ان من سدّ عنه معرفة واحد من هذه الثلاثة فلا سبيل له الى تحقيقها و لقد تكلفت ألا احيل في هذه الرسالة الا على هذه الكتب الثلاثة

[§ ١٠١٠٥] و استخراجات الجبر انما تتم بالمعادلة اعنى بمعادلة هذه المراتب بعضها ببعض على ما هو مشهور و اذا استعمل الجبرى مال المال في المساحات فان ذلك على سبيل المجاز لا على سبيل التحقيق اذ محال ان يكون في المقادير مال المال و الذى يقع في المقادير هو البعد الواحد و هو الجذر او الضلع اذا اصنيف الى مرتبة

ثم البعدان و هو السطح و المال في المقادير هو السطح المربع ثم الثلاثة الابعاد و هو الجسم و المكعب في المقادير هو المجسم الذي يحيط به ست مربعات واذ لا بعد آخر فلا يقع فيها مال المال فضلا عما فوقه و اذا قيل مال المال في المقادير فانما يقال ذلك لعدد اجزائها عند المساحة لالذواتها ممسوحة و بينهما فرق فمال المال لا يقع في المقادير لا بالذات و لا بالعرض وليس كالزوج و الفرد فانهما يقعان فيها بالعرض بحسب العدد الذي ينفصل به اتصالها

[§١٠١٠٦] والذي في كتب الجبريين من هذه المعادلات الاربع الهندسيه اعنى الاعداد المطلقة و الاضلاع و المربعات و المكعبات هو ثلاث معادلات بين العدد و الاضلاع و الاموال و اما نحن فسنأتى بالطرق التي بها يمكن ان يستخرج المجهول بالمعادلة بين اربع مراتب التي قلنا انها لا يمكن ان يقع اكثر منها في المقادير اعنى العدد و الشيء و المال و الكعب

و ما يمكن ان يبرهن عليه بخواص الدائرة اعنى بكتابي اقليدس في الاصول و في المعطيات يبرهن عليه و يبلغ في التسهيل و ما لا يمكن الا بخواص القطوع المخروطية فيبرهن عليه بما في مقالتي من المخروطات و اما البرهان على هذه الاصناف اذا كان موضوع المسئلة عددا مطلقا فلا يمكننا و لا لواحد من اصحاب الصناعة و لعل غيرنا ممن يأتى بعدنا يعرفه الا في الثلاثة المراتب الاولى و هي العدد و الشيء و المال و ربما اشيرالى براهين عديدة على ما يمكن البرهان عليه من كتاب اقليدس و اعلم ان البرهان على هذه الطرق بالهندسة لا يجزى عن البرهان عليها بالعدد اذا كان الموضوع عددا لا مقدارا ممسوحا الا ترى ان اقليدس قد برهن على مطلوبات نسبية مقدارية في خامسة كتابه ثم استأنف البرهان على تلك المطلوبات النسبية بعينها اذا كان موضوعها عددا في سابعة كتابه

[§١٠٢٠١] و المعادلات بين هذه الاربعة اما مفردات و اما مقترنات [§١٠٢٠٢]

والمفردات ستة اصناف

د جذور تعدل مالا

آ عدد يعدل جذرا

بَ عدد يعدل مالا هـ اموال تعدل كعبا
جَ عدد يعدل كعبا و جذور تعدل كعبا

و ثلاثة من هذه الاصناف الستة مذكورة فى كتب الجبرين قالوا نسبة الشيء الى المال كنسبة المال الى الكعب فيلزم ان يكون معادلة المال للكعب كمعادلة الشيء للمال وكذلك نسبة العدد الى المال كنسبة الجذر الى الكعب ولم يبرهنوا عليه من الهندسة و اما العدد الذى يكون عديلا للمكعب فلا سبيل لنا الى استخراج ضلعه الا بالاستقرآء من حيث العدد و اما من حيث الهندسة فلا ينحل الا بالقطع المخروطية .
[§ ١٠٢٠٣] واما المقترنات فمنها ثلاثية و منها رباعية [§ ١٠٢٠٣٠١] اما

الثلاثية فاثنا عشر صنفا فالثلاثة الاولى منها

آ مال و جذر يعدل عددا بَ مال و عدد يعدل جذرا
جَ جذر و عدد يعدل مالا

و هذه الثلاثة مذكورة فى كتب الجبرين و مبرهن عليها من جهة الهندسة و اما من جهة العدد فلا [§ ١٠٢٠٣٠٢] و الثلاثة الثانية منها

آ كعب و مال يعدل جذرا بَ كعب و جذر يعدل مالا
جَ جذر و مال يعدل كعبا

فالجبريون قالوا ان هذه الثلاثة الثانية مناسبة للثلاثة الاولى كل واحد لنظيره اعنى ان يكون كعب و جذر يعدل مالا فى قوة مال و عدد يعدل جذرا و الباقيان كذلك و لم يبرهنوا عليها اذا كان موضوع المسائل ممسوحات و اما اذا كان موضوع المسائل عددا فذلك ظاهر من كتاب الاصول و سا برهن على الهندسى منها [§ ١٠٢٠٣٠٣] و الستة الباقية من الاصناف الاثنا عشر

آ كعب و جذر يعدل عددا دَ كعب و مال يعدل عددا
بَ كعب و عدد يعدل جذرا هـ كعب و عدد يعدل مالا
جَ عدد و جذر يعدل كعبا و عدد و مال يعدل كعبا

و هذه الستة الاصناف لم يوجد فى كتبهم منها شيء الا الكلام فى واحد منها

مبتراً و سائینها و ابرهن علیها من جهة الهندسة لا من جهة العدد و البرهان على هذه الستة لا يمكن الا بخواص القطوع المخروطية [§ ١٠٢٠٤] و اما المقترنات الرباعية فقسمان [§ ١٠٢٠٤٠١] احد هما و هو الاول ما يكون فيه ثلاث مراتب معادلة لواحدة و هو اربعة اصناف

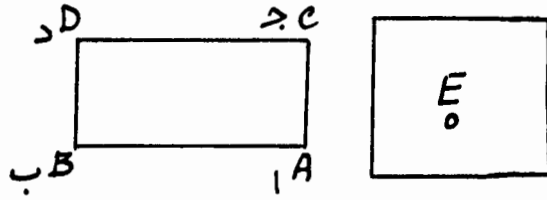
آ كعب و مال و جذر يعدل عددا ج كعب و جذر و عدد يعدل مالا
 ب كعب و مال و عدد يعدل جذرا د كعب يعدل جذرا و مالا و عددا
 [§ ١٠٢٠٤٠٢] و القسم الثاني هو ما يكون فيه مرتبتان معادلتين للثنتين و هو
 ثلاثة اصناف

آ كعب و مال يعدل جذرا و عددا ب كعب و جذر يعدل مالا و عددا
 ج كعب و عدد يعدل جذرا و مالا
 [§ ١٠٢٠٤٠٣] فهذه هي الاصناف السبعة الرباعية و لا سبيل لنا الى تحليل شيء منها بالهندسة اما من تقدمنا فقد اضطر واحد منهم الى نوع من انواع صنف واحد سا ذكره و البرهان على هذه الاصناف لا يتم الا بخواص القطوع المخروطية [§ ١٠٢٠٥] و سنأتي بواحد واحد من هذه الاصناف الخمسة والعشرين و نبرهن عليه مستعينين بالله انه من توكل عليه مخلصا هداه و كفاه

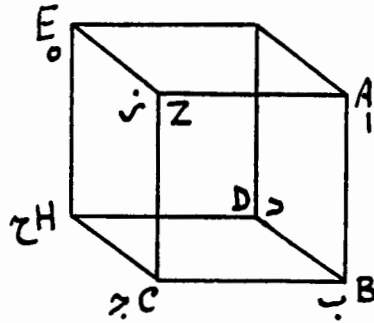
[§ ١٠٣٠١] فالصنف الاول من المفردات جذر يعدل عددا فيكون الجذر معلوما باضطرار و حكمها في العدد و المساحات واحد

[§ ١٠٣٠٢] و الصنف الثاني عدد يعدل مالا فيكون المال العددي معلوما لمعادلته العدد المعلوم و لا سبيل الى معرفة جذره بالعدد الا بالاستقرآء فان من يعلم ان جذر خمسة و عشرين هو خمسة فانما يعلمه بالاستقرآء لا بالقانون الصناعي فلا نلتفت فيه الى قول المتخلفين من اهل هذه الصناعة و للهند طرق في استخراج اضلاع المربعات و المكعبات مبنية على استقرآء قليل و هو معرفة مربعات الصور التسعة اعني مربع الواحد و الاثنين و الثلاثة و كذلك مضروب بعضها في بعض اعني مضروب الاثنين في الثلاثة و نحوها و لنا كتاب في البرهان على صحة تلك الطرق و تأديتها

الى المطلوبات و قد غزرتنا انواعها اعنى من استخراج اضلاع مال المال و مال الكعب و كعب الكعب بالغاما بلغ و لم يسبق اليه و تلك البراهين انما هي براهين عددية مبنية على عدديات كتاب الا سطقتات و البرهان على الصنف الثانى بالهندسة هو هكذا نضع خط اب مفروضا مساويا للعدد المفروض و اج واحدا و يكون عمودا على



اب و تتم سطح اد فمعلوم ان مساحة سطح اد يكون ذلك العدد المفروض فنعمل سطحا مربعا مساويا لسطح اد و هو مربع ه كما بينه اقليدس فى شكل يد من مقالة ب من كتابه فمربع ه يكون مثل العدد المفروض و يكون معلوما وضعه ايضا يكون معلوما تأمل البرهان الذى أتى به عليه اقليدس و ذلك المراد [§١٠٣٠٣] و كلما قلنا عدد يساوى سطحا فى هذه الرسالة فانا نعنى بالعدد هناك سطحا قائم الزوايا احد ضلعيه واحد والثانى خط مساو للعدد المفروض بالمساحة و كل واحد من اجزاء مساحته مساو للضلع الثانى اعنى به الذى فرضناه واحد [§١٠٣٠٤] و الصنف الثالث عدد يعدل مكعبا فاذا كان الموضوع عددا

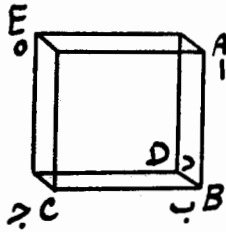


فيكون المكعب معلوما ولا سبيل الى استخراج ضلعه الا بالاستقراء وكذلك فى

جميع المراتب العددية من مال المال و مال الكعب و كعب الكعب كما ذكرناه آنفا و اما بالهندسة فانا نضع مربع $اد$ مربع الواحد اعني ان يكون $اب$ مثل $بد$ و كل واحد منهما يفرض واحدا ثم نقيم على سطح $اد$ على نقطة $ب$ منه عمود $بج$ و نجعله مساويا للعدد المفروض كما بينه اقليدس في القول الحادي عشر من كتابه و تتم مجسم $ابجد$ فمعلوم ان مساحة هذا المجسم يكون مساوية للعدد المفروض فنعمل مكعبا مساويا لهذا المجسم و عمله لا يتم الا بخواص القطوع المخروطية فأخترناه الى ان نأتي بمقدمات لها [§١٠٣٠٥] و كلما قلنا عدد يساوي مجسما فانا نعني بالعدد هناك مجسما متوازي الاضلاع قائم الزوايا يكون قاعدته مربع الواحد و ارتفاعه مساويا للعدد المفروض

[§١٠٣٠٦] و الصنف الرابع مال يعدل خمسة اجذاره فيكون عدة الاجذار هو جذر المال و برهانه با العدد هو ان الجذر اذا ضرب في مثله حصل المال و هذا جذر اذا ضرب في خمسة حصل المال فهو خمسة و برهانه بالهندسة شبيه هذا اذا وضعت سطحها مربعا عديلا لخمسة الاضلاعه

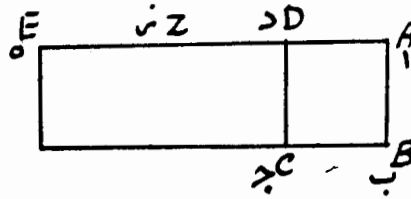
[§١٠٣٠٧] و الصنف الخامس اشياء تعدل كعبا فبالعدد بين انه يكون مثل عدد يعدل مالا مثاله اربعة اجذار يعدل كعبا يكون كانه قال اربعة اعداد يعدل مالا لمكان



التناسب المذكور و اما بالهندسة نضع مكعب $ابجد$ و مساحته عديلة لمساحة اربعة اضلاعه و ضلعه $اب$ فيكون ضلعه الذي هو $اب$ اذا ضرب في اربعة يحصل مكعب $ابجد$ الا ان ضلعه اذا ضرب في مربعه اعني مربع $اج$ حصل المكعب فيكون مربع $اج$ اربعة [§١٠٣٠٨] و الصنف السادس اموال تعدل كعبا يكون في قوة عدد يعدل جذرا

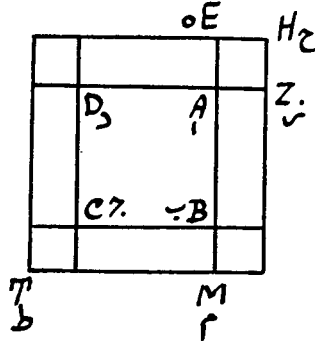
برهانه بالعدد ان نسبة العدد الى الجذر كنسبة المال الى الكعب كما بين في ثامنة الاصول و اما بالهندسة فانا نضع مكعب **ابجده** عدل عدة امواله مثلا عدل مالين ومربع ضلعه **اج** فسطح **اج** اذا ضرب في اثنين حصل مكعب **ابجده** الا انه اذا ضرب في **بد** الذى هو ضلعه حصل مكعب **ابجده** فيكون **بد** الذى هو ضلعه مثل اثنين وذلك المراد [§ ١٠٣٠٨٠١] و كلما قلنا في هذه الرسالة اموال المكعب فانا نعنى بها مربعات اضلاعه

[§ ١٠٤٠١] فاز قد أتينا على المفردات فلنقل على الثلاثة الاولى من الاصناف الاثنى عشر الثلاثية [§ ١٠٤٠٢] و الصنف الاول منها مال وعشرة اجذار يعدل تسعة وثلاثين عددا فاضرب نصف الاجذار في مثله وزد الحاصل على العدد و انقص من جذر المبلغ نصف الاجذار فالباقي هو جذر المال اما العدد فيحتاج الى هذين الشرطين واحدهما ان يكون عدة الاجذار عددا زوجا ليكون له نصف والثاني ان يكون مربع نصف الاجذار و العدد مجموعين عددا مربعا و الا فالمسئلة مستحيلة من حيث العدد و اما بالهندسة فلا يستحيل شىء من مسائلها اصلا و البرهان عليه من جهة العدد سهل عند تصوّر برهانه الهندسى و برهانه الهندسى هكذا نضع مربع **اج** مع عشرة اجذاره عدل

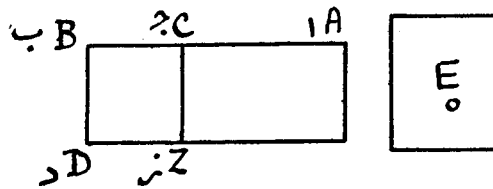


تسعة وثلاثين من العدد وعشرة اجذاره هو سطح **جه** فيكون خط **ده** عشرة و نصفه على **ز** فلان خط **ده** قسم بنصفين على **ز** و زيد فيه على استقامته **اد** فيكون ضرب **ها** فى **اد** الذى هو مثل سطح **هب** مع مربع **دز** مساويا لمربع **زا** و مربع **دز** الذى هو نصف الاجذار معلوم و سطح **به** الذى هو العدد المفروض معلوم فيكون مربع **زا** معلوما و خط **زا** معلوما و اذا نقص منه زد يبقى **اد** معلوما [§ ١٠٤٠٢٠١] و لذلك برهان آخر نضع

ابجد مربعا ونخرج با الى ه ونجعل ها ربع الاجذار وهو اثنان ونصف ونخرج
دا الى ز ونجعل زا مثل ربع الاجذار وكذلك نخرج من جميع زوايا المربع خطوطا
على هذه الصفة وتتم سطح حط فيكون مربعا لان زه مربع واج مربع وحط مربع
على ماتيين في سادسة الاصول والمربعات الاربعة التي في زوايا المربع الكبير كل



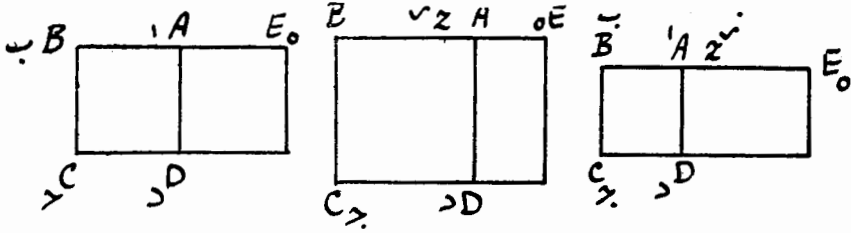
واحد منها مربع الاثني والنصف فيكون جميعا خمسة وعشرين الذي هو مربع نصف
الاجذار و سطح زب جذرين ونصف من اجذار مربع اج لان زا اثنان ونصف فيكون
السطوح الاربعة عشرة اجذار مربع اج وقد فرض مربع اج مع عشرة اجذاره تسعة و
ثلاثين من العدد فيكون مربع حط اربعة وستين يؤخذ جذره وينقص منه خمسة
يبقى اب [١٠٤٠٢٠٢] واما ان فرض خط اب عشرة واريد مربع يكون مع ضرب
ضلعه في اب مساويا للعدد المفروض فنضع العدد المفروض سطح ه و هو متوازي



الاضلاع قائم الزوايا على ما قدمناه و نضيف الى خط اب سطحا متوازي الاضلاع
مساويا لسطح ه و تزيد على تمامه سطحا مربعا كما بينه اقليدس في سادسة الاصول
وليكن سطح بد و المربع الزائد اد و ضلعه اج يكون معلوما على ماتيين

في المعطيات .

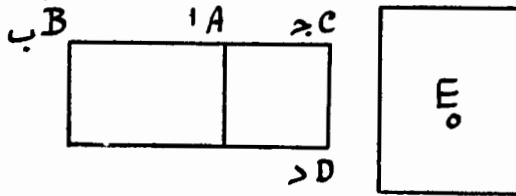
[§١٠٤٠٣] والصنف الثاني منها مال وعدد يعدل جذرا هذا يجب ان يكون العدد فيه ليس باعظم من مربع نصف الاجذار و الا فالمسئلة مستحيلة فان كان مثل مربع نصف الاجذار فنصف الاجذار هو جذر المال و ان كان اقل منه نقص العدد من مربع نصف الاجذار و مابقى يؤخذ جذره و يزداد على نصف الاجذار او ينقص



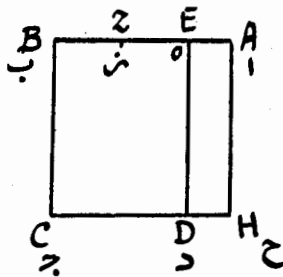
منه فما بلغ من الزيادة و مابقى من النقصان كان جذر المال و برهانه بالعدد يتصور عند تصور برهانه الهندسى نضع مربع ا ب ج د و نضع هـ د العدد على سمت ا د فيكون سطح هـ ج مثلا يعدل عشرة اضلاع مربع ا ج فيكون هـ ب عشرة و في الاول يكون ا ب نصف هـ ب و في الثاني اعظم من نصفه و في الثالث اصغر من نصفه ففي الاول يكون ا ب خمسة و في الثاني تقسم هـ ب على ز و كذلك في الثالث فخط هـ ب قسم بنصفين على ز و بقسمين غير متساويين على ا فيكون سطح هـ ا في ا ب مع مربع ز ا مساويا لمربع ز ب كما تبين في ثمانية الاسطقتات و سطح هـ ا في ا ب هو العدد و هو معلوم و اذا نقص من مربع ز ب الذى هو نصف الاجذار يبقى مربع ز ا معلوما و ينقص في الثالث من ز ب و فى الثاني يزداد عليه يبلغ او يبقى ا ب و ذلك المراد و ان شئت امكنت البرهان عليه من وجوه اخرى و لكننا اقتصرنا على هذا مخافة التطويل [§١٠٤٠٣٠١]

و اما ان فرض خط ا ب عشرة مثلا و اريد ان يفصل منه خط يكون ضرب ا ب فى ذلك الخط مساويا لمربع ذلك الخط مع سطح آخر غير اعظم من مربع نصف ا ب اعنى العدد المفروض و هو سطح هـ و نريد ان نفصل من ا ب خطا يكون مربعه مع سطح هـ مساويا لضرب ا ب فى ذلك الخط فنضيف الى خط ا ب المعلوم سطحا مساويا

لسطح هـ المعلوم ينقص عن تمامه سطحاً مربعاً و هو ممكن لان سطح هـ ليس باعظم

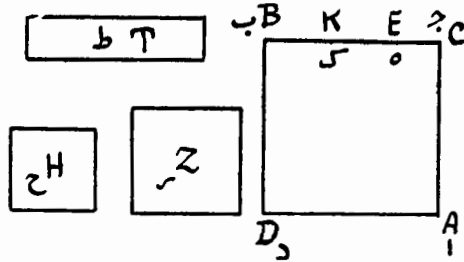


من مربع نصف اب وليكن سطح از و المربع الناقص سطح جد كما بينه اقليدس في سادسة الاسطفسات فيكون ضلع جب معلوما كما تبين في المعطيات و ذلك ما اردنا ان نبين [§١٠٤٠٣٠٢] فقد لاح ان لهذا الصنف انواعا و يقع فيها ما يستحيل و يمكنك ان تعلم شرائط صحته في العدد على ما بيناه في الصنف الاول [§ ١٠٤٠٤] و الصنف الثالث عدد و جذر يعدل مالا يزداد مربع نصف الاجذار على العدد و يؤخذ جذر المبلغ و يزداد على نصف الاجذار فما يحصل هو جذر المال برهانه مربع ابجح يعدل خمسة اجذاره و ستة من العدد فنفضل العدد منه و هو سطح اد يبقى سطح هـ عدة الاجذار و هو خمسة فيكون خط هـب خمسة نقسمه بنصفين على ز فخط هـب قسم بنصفين على ز و زيد فيه هـا على استقامته يكون سطح با في اه الذي هو سطح اد المعلوم مع مربع هـز المعلوم مثل مربع زا فمربع زا معلوم و زا معلوم و زب معلوم فيكون اب معلوما وله



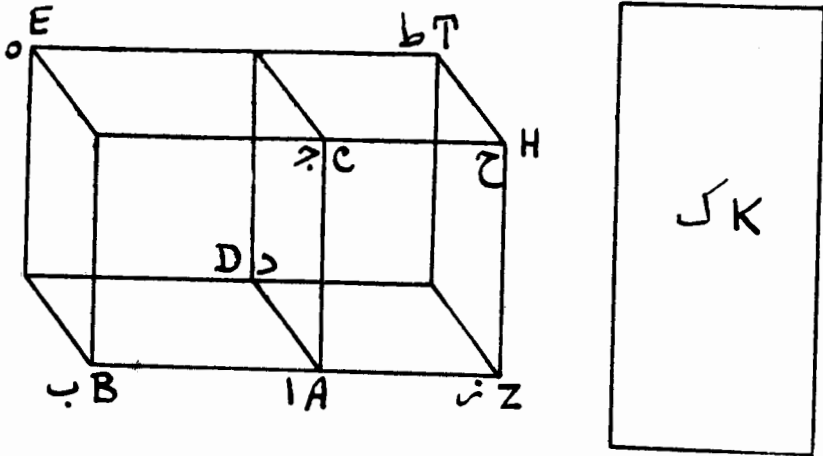
وجوه أخرى من البراهين فارتض بها [§١٠٤٠٤٠١] و اما ان فرض به الذي هو عدة الاجذار و طلب المربع و ضلعه كي يكون مساويا لعدة اضلاعه مع العدد

المفروض فليكن العدد المفروض سطح ط و المربع المساوي له ح و نعمل مربعا



مساويا لمربع ح مع مربع هـك الذي هو نصف عدة الاضلاع وليكن مربع ز و نجعل كج مساويا لضلع ز و تتمم مربع ابجد فيكون مربع ابجد هو المطلوب [§١٠٤٠٥] و تبين ان في هذا الصنف الثالث ليس شيء يستحيل و كذا في الاول و اما في الثاني ففيه ما يستحيل و له اختلاف وقوعات و ليس لهذين

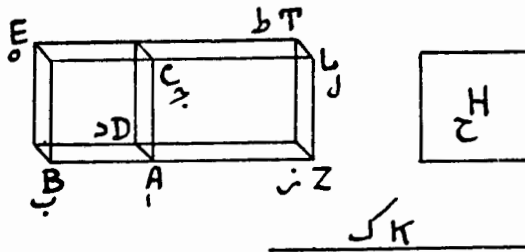
[§١٠٥٠١] و اما البرهان على ان الثلاثة الثانية من هذه الاصناف مناسبة للثلاثة الاولى [§١٠٥٠٢] فالصنف الاول منها مكعب و اموال تعدل جذرا نضع مكعب ابجده و نخرج اب على استقامة الى ز و نجعل از مثل عدة الاموال و



تتم مجسم از حطجد على استقامة مكعب اه على ماجرت به العادة فمجسم اط مثال عدة الاموال فيكون مجسم بط الذي هو المكعب و عدة الاموال المفروضة

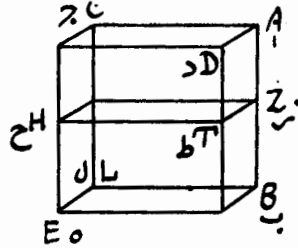
كعدة الاجذار المفروضة و نعمل سطح ك كعدة الاجذار المفروضة و الجذر هو ضلع المكعب و هو اذ فسطح ك اذا ضرب في اذ يكون مثل عدة الاضلاع المفروضة و سطح جب اذا ضرب في اذ يكون منه المكعب مع عدة امواله المفروضة و هما متساويان اعنى مجسم بط و المجسم المعمول على ك الذى ارتفاعه اذ فقاعدتهما يكونان مكافئتين لارتفاعيهما و ارتفاعاهما متساويان فقاعدتهما يكونان اذن متساويتين و قاعدة جب هو مربع جب مع حا الذى هو عدة اجذاره التى فرضت للاموال فيكون ك الذى هو العدد المفروض للاجذار مثل مال و عدة الاجذار المفروضة للاموال و ذلك ما اردنا ان نبين و مثاله مكعب و ثلاثة اموال يعدل عشرة اجذار يكون مال و ثلاثة اجذار يعدل عشرة اعداد

[§١٠٥٠٣] و الصنف الثانى منها مكعب مع جذرين يعدل ثلاثة اموال يكون مالا مع اثنين يعدل ثلاثة اجذار برهانه نضع مكعب ابجده و هو مع جذريه



يعدل ثلاثة اموال و نضع ح مربعا مثل جب و نضع ك ثلاثة فيكون ضرب ح فى ك ثلاثة اموال مكعب اه و نعمل على اج سطحا مساويا لاثنين و تتم مجسم ازجطد فيكون مثل عدة الجذور ولكن خط زب اذا ضرب فى مربع اج حصل مجسم بط و مجسم اط مثل عدة الاضلاع فمجسم بط مثل المكعب مع مثل عدة اضلاعه فيكون مجسم بط مساويا لعدة الاموال فيكون خط زب على ما تبين فى الشكل المتقدم ثلاثة و سطح بل هو مال و اثنان فمال و اثنان يعدل ثلاثة اجذار لان سطح بل هو من ضرب اب فى ثلاثة و ذلك ما اردنا ان نبين

[§١٠٥٠٤] و الصنف الثالث منها هو مكعب يعدل مالا و ثلاثة اجذار فيكون مال يعدل جذرا و ثلاثة اعداد نضع مكعب ابجده الذى يعدل ماله و ثلاثة اضلاعه و

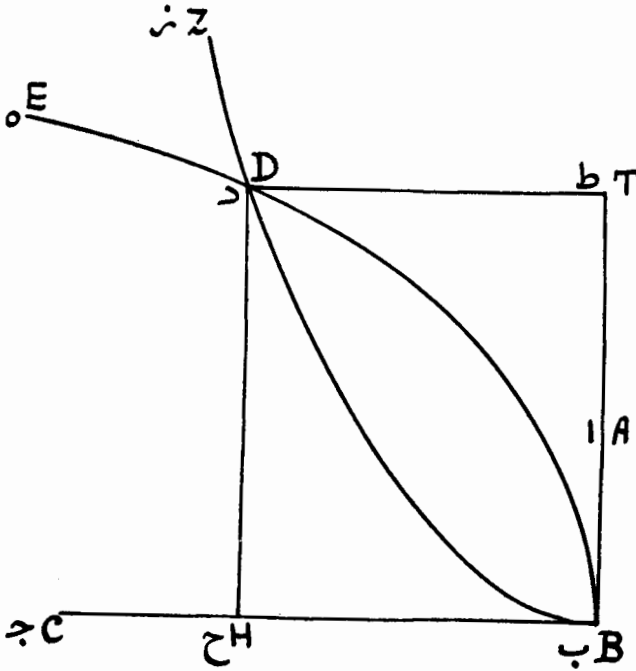


نفصل من خط اب الذى هو ضلعه خط از مثل عدة الاموال و هو واحد و تتمم مجسم ازطحج فيكون مجسم ازطحج مثل عدة الاموال المفروضة فيبقى مجسم زه مساويا لعدة الاضلاع المفروضة و نسبة المجسمين احدهما الى الآخر كنسبة قاعدة زح الى قاعدة زل كما تبين فى الحادية عشرة من الاصول اذ الارتفاعان متساويان و لكن سطح زح هو جذر واحد لمرجع جب و سطح زل هو عدد الاجذار و هو ثلاثة فمربع جب مثل جذر واحد و ثلاثة اعداد و ذلك ما اردنا ان نبين [§١٠٥٠٥] و هذه البراهين مالم تفهم على هذا النمط لا يكون الصناعة حكيمية و ان كان فيه تجشم مصاعب

[§١٠٦٠١] و من بعد تقديم هذه الاصناف التى امكن البرهان عليها من خواص الدائرة اعنى من كتاب اقليدس فلنقل الآن على الاصناف التى لايمكن البرهان عليها الا بخواص القطوع و هى اربعة عشر صنفاً واحد مفرد و هو عدد يعدل مكعبا و ستة ثلاثية باقية و سبعة رباعية و لنقدم مقدمات مبنية على كتاب المخروطات ليكون شبه تمهيد للمتعلم و لا تكون رسالتنا هذه مفتقرة الى اكثر من الثلاثة الكتب المذكورة اعنى كتابى اقليدس فى الاصول و فى المعطيات و مقاليتين من كتاب المخروطات .

[§١٠٦٠٢] نريد ان نجد خطين بين خطين ليتوالى الاربعة متناسبة فليكن الخطان المستقيمان اب بـج و نجعلهما محيطين بزواوية ب القائمة و نعمل قطعاً

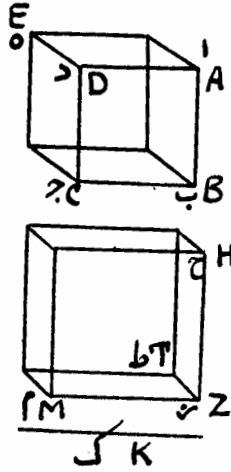
مكافيا رأسه نقطة ب و سهمه بـج و ضلعه القائم بـج و هو قطع بده فيكون قطع بده



معلوم الوضع لان رأسه و سهمه معلوما الوضع و ضلعه القائم معلوم القدر و يكون مماسا لخط با لان زاوية ب قائمة و هي مساوية لزاوية الترتيب كما تبين في شكل كـج من مقالة آ من المخروطات و كذلك نعمل قطعاً آخر مكافيا رأسه نقطة ب و سهمه اب و ضلعه القائم اب و هو قطع بـدز كما بينه ابلونيوس في شكل نو من مقالة آ يكون قطع بـدز مماسا لخط بـج فهما يتقاطعان باضطرار فليقتطعا على نقطة د فنقطة د معلومة الوضع لان القطعين معلوما الوضع و نخرج منها عمودى دح و دط على اب بـج فيكونان معلومى القدر كما بين في المعطيات فاقول ان خطوط اب بـج بـط بـد الاربعة متناسبة برهانه ان مربع حد مساو لضرب بـج في بـج لان خط دح من خطوط الترتيب في قطع بده فيكون نسبة بـج الى حد المساوى لخط بـط كنسبة بـط الى حب و خط دط من خطوط الترتيب في قطع بـدز يكون مربع دط الذى

هو مثل بح مساويا لضرب با في بط فنسبة بط الى بح كنسبة بح الى با فالخطوط الاربعة متناسبة متوالية وخط دح معلوم القدر لانه خرج من نقطة معلومة الوضع الى خط معلوم الوضع على زاوية معلومة القدر و كذلك دط معلوم القدر فخطا بح بط معلوما القدر وهما وسطان في النسبة بين خطي اب بجد اعنى نسبة اب الى بح كنسبة بح الى بط و كنسبة بط الى بجد و ذلك ما اردنا ان نبين

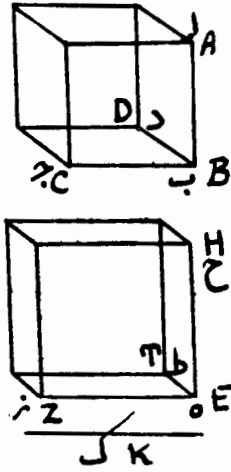
[§١٠٦٠٣] مربع ابجد مفروض و هو قاعدة مجسم ابجده المتوازي السطوح القائم الزوايا و مربع هح مفروض و نريد ان نعمل على قاعدة هح مجسما متوازي



السطوح قائم الزوايا مساويا لمجسم ابجده المفروض فنجعل نسبة اب الى مز كنسبة مز الى ك ثم نجعل نسبة اب الى ك كنسبة زط الى هد و نجعل زط عمودا على سطح هح على نقطة ز و تتم مجسم مزطح فاقول ان هذا المجسم مساو للمجسم المفروض برهانه نسبة مربع اج الى مربع هح كنسبة اب الى ك فيكون نسبة مربع اج الى مربع هح كنسبة زط الى هد هو ارتفاع مجسم مزطح الى هد الذي هو ارتفاع مجسم به فيكون المجسمان متساويين لان قواعدهما مكافئة لارتفاعيهما كما تبين في مقالة يا من الاصول [§١٠٦٠٣٠١] و كلما قلنا مجسم فانا نعنى به المجسم المتوازي السطوح القائم الزوايا و كذلك كلما قلنا سطح فانا نعنى به السطح

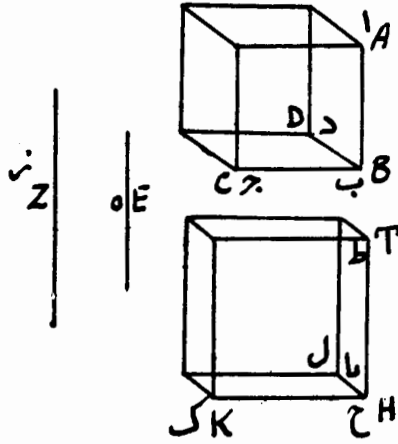
المتوازي الاضلاع القائم الزوايا

[§١٠٦٠٤] مجسم ايجاد مفروض وقاعدته اج مربعة و نريد ان نعمل مجسماً قاعدته مربع و ارتفاعه مثل هط المفروض و يكون مساويا لمجسم اجد فنجعل نسبة هط الى بد كنسبة اب الى ك و نأخذ بين اب و ك خطا وسطا في النسبة و هو هز و نجعل هز عمودا على هط و تتم طز و نجعل هح عمودا على سطح طز و



يكون مثل هز و تتم مجسم جهطز فاقول ان مجسم ط الذي قاعدته مربع حز و ارتفاعه هط المفروض مثل مجسم د المفروض برهانه ان نسبة مربع اج الى مربع حز كنسبة اب الى ك فيكون نسبة مربع اج الى مربع حز كنسبة هط الى بد فقاعدتا المجسمين مكافيتان لارتفاعيهما فهما متساويان و ذلك ما اردنا ان نبين [§١٠٦٠٥] و من بعد ذلك فانا نأتى بالصف الثالث من المفردات و هو كعب يعدل عددا نضع العدد مجسم ايجاد وقاعدته اج و هو مربع الواحد كما قلنا و طوله مثل العدد المفروض و نريد ان نعمل مكعبا مساويا له فنأخذ بين خطي اب بد خطين وسطين في النسبة فيكونان معلومي القدر كما بيناه و هما ه ز و نجعل حط مساويا لخط ه و نعمل عليه مكعب طحكل فيكون هذا المكعب

معلوم القدر و ضلعه معلوم القدر فاقول انه مساو لمجسم د برهانه نسبة مربع اج

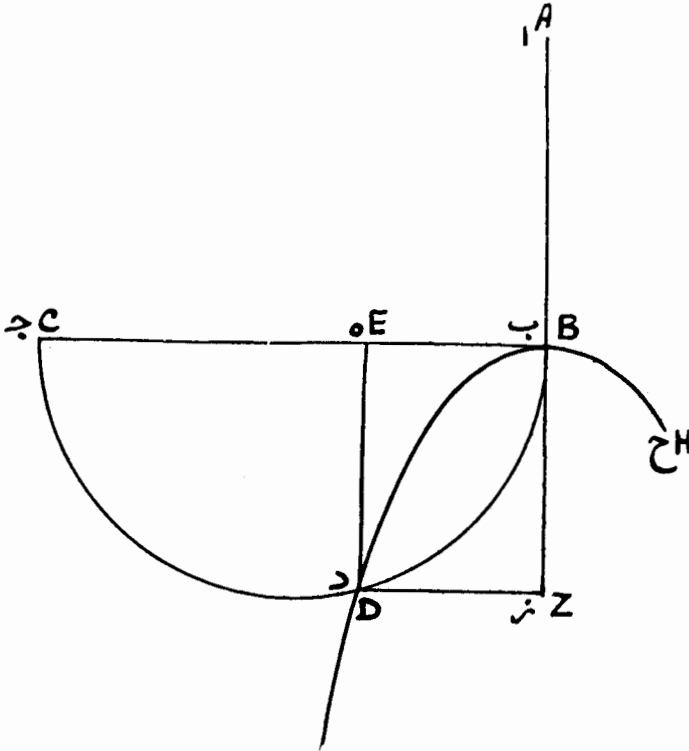


الى مربع طك كنسبة اب الى حك مثناة ونسبة اب الى حك مثناة كنسبة اب الى ز الاول الى الثالث من الخطوط الاربعة بل كنسبة حك الثاني الى بد الرابع فقاعدتا مكعب ل و مجسم د مكافيتان لارتفاعيهما فهما متساويان وذلك ما اردنا

ان نبين

[§١٠٧٠١] ومن بعد ذلك فانا نشتغل بالاصناف الستة الباقية الثلاثية [§١٠٧٠٢] الصنف الاول هو مكعب واضلاع تعدل عددا نضع اب ضلع مربع مساو لعدة الجذور و هو مفروض ونعمل مجسما يكون قاعدته مثل مربع اب و يكون ارتفاعه مثل بج ويكون مساويا للعدد المفروض كما بينا عمله فيما تقدم ونجعل بج عمودا على اب وقد علمت ما معنى العدد المجسم في كلامنا وهو مجسم يكون قاعدته مربع الواحد و ارتفاعه مثل العدد المفروض اعني خطأ نسبته الى ضلع قاعدة المجسم كنسبة العدد المفروض الى الواحد ونخرج اب على استقامة الى ز ونعمل قطعاً مكافياً رأسه نقطة ب وسهمه بز و ضلعه القائم اب و هو قطع حبد فيكون قطع حبد معلوم الوضع كما بينا آنفاً و يكون مماساً لخط بج ونعمل على بج نصف دائرة فانها باضطرار يقطع القطع فليقطعه على د و

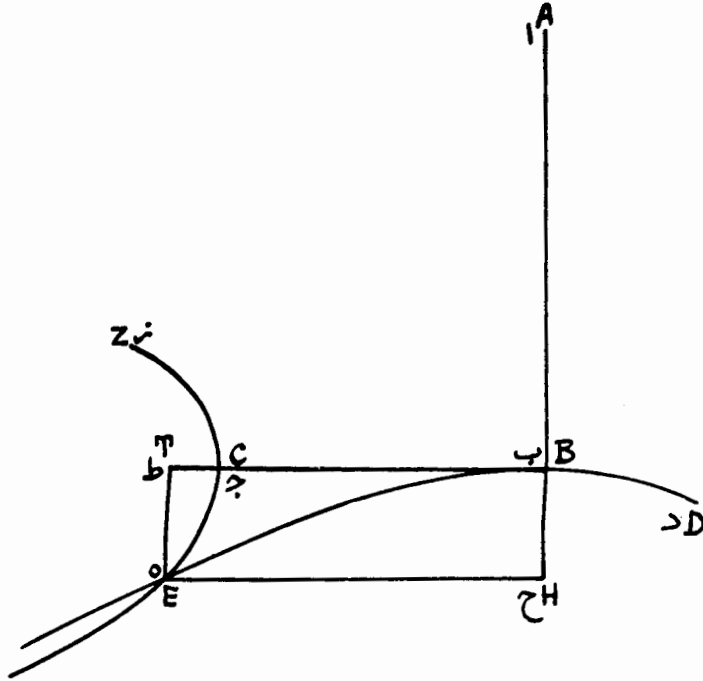
نخرج من د التي هي معلومة الوضع كما عرفته عمودي دز ده على بز بچ فيكونان معلومي الوضع والقدر فخط دز من خطوط الترتيب في القطع فيكون مربعه مساويا لضرب بز في اب فيكون نسبة اب الى دز الذي هو مثل به كنسبة به الى هد الذي



هو مثل زب لكن نسبة به الى هد كنسبة هد الى هج فالخطوط الاربعة متناسبة اب به هد هج فنسبة مربع اب الاول الى مربع به الثاني كنسبة به الثاني الى هج الرابع فالمجسم الذي قاعدته مربع اب و ارتفاعه هج مساو لمكعب به لان ارتفاعيهما مكافيان لقاعدتيهما و نجعل المجسم الذي قاعدته مربع اب و ارتفاعه هب مشتركا فيكون مكعب به مع هذا المجسم مثل المجسم الذي قاعدته مربع اب و ارتفاعه بچ الذي فرضناه مساويا للعدد المفروض لكن المجسم الذي قاعدته مربع اب الذي هو مثل عدة الجذور و ارتفاعه هب الذي هو ضلع المكعب مساو لعدة اضلاع مكعب

هب المفروضة فمكعب هب مع عدة اضلاعه المفروضة ^٥ مساو للعدد المفروض وذلك المراد وليس لهذا الصنف اختلاف وقوع ولا استحيل من مسائله شيء وقد خرج بخواص الدائرة مع خواص القطع المكافئ

[§ ١٠٧٠٣] الصنف الثاني من الاصناف الستة الثلاثية هو مكعب وعدد يعدل اضلاعا فنفرض اب ضلع مربع مساو لعدة الجذور ونعمل مجسما يكون قاعدته مربع

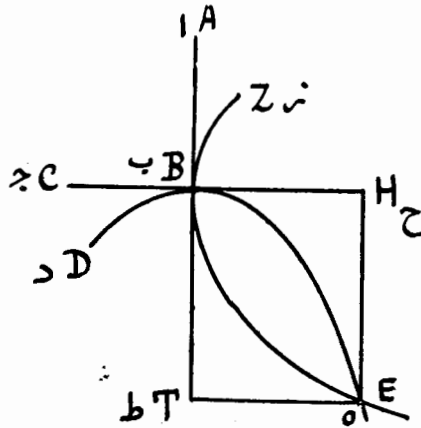


اب ويكون مساويا للعدد المفروض وليكن ارتفاعه بجد وهو عمود على اب ونعمل قطعا مكافيا رأسه نقطة ب وسهمه على استقامة اب وضلعه القائم اب وهو دبه و يكون معلوم الوضع ونعمل قطعا آخر زائدا رأسه نقطة ج وسهمه على استقامة بجد وكل واحد من ضلعيه القائم والمائل مثل بجد وهو هجز ويكون معلوم الوضع كما بينه ابلونيوس في شكل نح من مقالة آ فهذان القطعان اما ان يتلاقيا واما ان

(٥) نسخهى B (٤٠٣٠٢٠١) § به اين جا ختم مى شود .

لا يتلاقيا فان لم يتلاقيا فالمسئلة مستحيله و ان تلاقيا بالتماس على نقطة او بالتقاطع على نقطتين فيكون النقطة معلومة الوضع فليتلاقيا على نقطة ه و نخرج منها عمودى هط هج على خطى بط بح فيكون العمودان لامحالة معلومى الوضع والقدر و خط هط من خطوط الترتيب فيكون نسبة مربع هط الى ضرب بط فى طج كنسبة الضلع القائم الى الضلع المائل كما بينه ابلوينوس فى شكل ك من مقالة آ والضلعان القائم وهو المنتصب و المائل متساويان فمربع هط مساو لضرب بط فى طج فنسبة بط الى طه كنسبة طه الى طج و لكن مربع هج الذى هو مثل بط مساو لضرب بح فى با كما تبين فى شكل يب من مقالة آ من كتاب المخروطات فنسبة اب الى بط كنسبة بط الى بح و كنسبة بح الذى هو مثل هط الى طج فالخطوط الاربعة متناسبة فنسبة مربع اب الاول الى مربع بط الثانى كنسبة بط الثانى الى طج الرابع فمكعب بط مساو للمجسم الذى قاعدته مربع اب و ارتفاعه جط و نجعل المجسم الذى قاعدته مربع اب و ارتفاعه بچ الذى عملناه مساويا للعدد المفروض مشتركا فيكون مكعب بط مع العدد المفروض مساويا للمجسم الذى قاعدته مربع اب و ارتفاعه بط و هو عدة اضلاع المكعب و قد تبين ان لهذا الصنف اختلاف وقوع و يقع من مسائله ما يستحيل و قد خرج بخواص قطعين مكاف وزائد

[§١٠٧٠٤] الصنف الثالث مكعب يعدل اضلعا وعددا نضع اب ضلع مربع

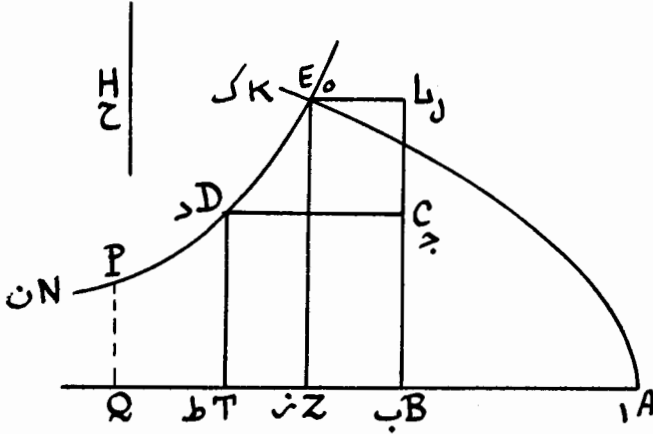


مثل عدة الاضلاع و نعمل مجسما قاعدته مربع اب و يكون مساويا للعدد المفروض و ليكن ارتفاعه بج عمودا على اب و نخرج اب بج على استقامة و نعمل قطعا مكافيا رأسه نقطة ب و سهمه على استقامة اب و ضلعه القائم اب و هو دبه و يكون معلوم الوضع و يكون مماسا لخط بج على ما بينه ابلوينوس في شكل لج من مقالة آ و نعمل قطعا آخر زائدا رأسه نقطة ب و سهمه على استقامة بج و كل واحد من ضلعيه القائم و المائل مثل بج و هو قطع زبه و يكون معلوم الوضع و مماسا لخط اب فالقطعان لا محالة يتقاطعان فليتقاطعا على نقطه ه فتكون معلومة الوضع و نخرج من نقطة ه عمودى هط هط هح فهما معلوما الوضع و القدر و خط هح من خطوط الترتيب فعلى ما تقدم يكون مربعه مساويا لضرب جح في بج فنسبة جح الى هح كنسبة هح الى حب لكن نسبة هح الذى هو مثل بط الى حب الذى هو مثل هط و هو من خطوط الترتيب فى القطع الآخر كنسبة هط الى اب الذى هو الضلع القائم للقطع فالخطوط الاربعة متناسبة نسبة اب الى حب كنسبة حب الى بط و كنسبة بط الى جح فنسبة مربع اب الاول الى مربع حب الثانى كنسبة حب الثانى الى جح الرابع فيكون مكعب حب مساويا للمجسم الذى قاعدته مربع اب و ارتفاعه جح لان ارتفاعيهما مكافيان لقاعدتيهما لكن هذا المجسم مساو للمجسم الذى قاعدته مربع اب و ارتفاعه بج الذى عملناه مساويا للعدد المفروض و المجسم الذى يحيط به قاعدة مساوية لمربع اب و ارتفاع بج الذى هو مثل عدة الاضلاع المفروضة لمكعب بج فمكعب بج مثل العدد المفروض و مثل عدة اضلاعه المفروضة و ذلك المراد فقد تبين انه ليس لهذا الصنف اختلاف وقوع ولا فيه شىء يستحيل اعنى فى مسائله و قد خرج بخواص قطعين مكاف و زائد معا

[§١٠٧٠٥] الصنف الرابع من الاصناف الستة الثلاثية مكعب و اموال تعدل

عددا نضع خط اب لعدة الاموال و نعمل مكعبا مساويا للعدد المفروض و ليكن ضلعه ح و نخرج اب على استقامة و نجعل بط مثل ح و تتم مربع بطدج و نعمل على نقطة د قطعاً زائدا لا يلقاه بج بط و هو قطع هدن كما تبين من قوة شكلى د و هـ

من مقالة بـ و شكل نطـ من مقالة آ فيكون قطع هدت معلوم الوضع لان نقطة د معلومة الوضع و خطا بـ جـ بط معلوما الوضع و نعمل قطعاً مكافياً رأسه نقطة ا و سهمه

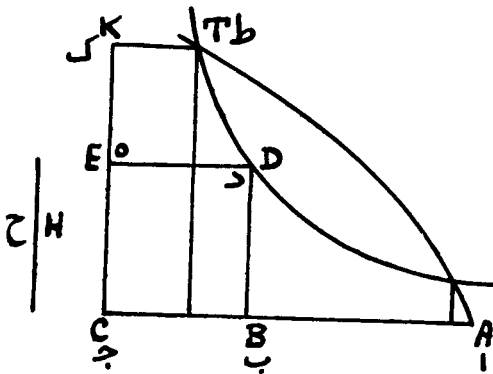
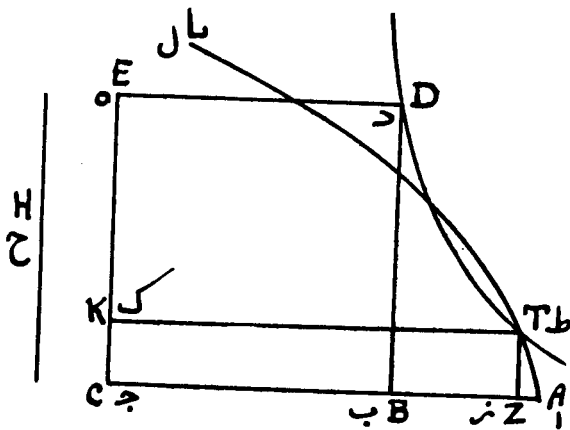
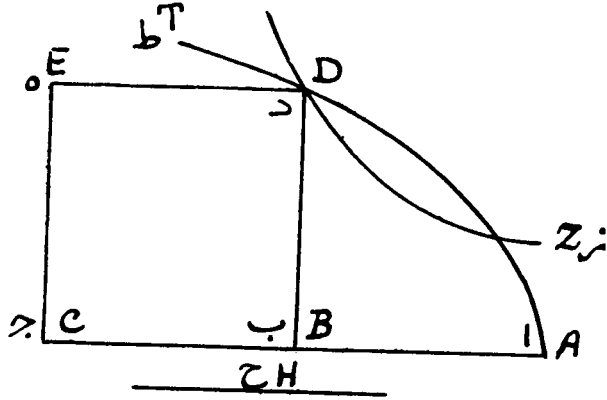


اط و ضلعه القائم بـ جـ و هو قطع اك فيكون قطع اك معلوم الوضع و القطعان يتقاطعان باضطرار فليتقاطعا على نقطة ه فيكون ه معلومة الوضع و نخرج منها عمودي هز هل على خطي اط بـ جـ فيكونان معلومي الوضع و القدر و اقول انه لا يمكن ان يقطع قطع اهك قطع هدت على نقطة يكون العمود النازل منها الى خط اط هو واقعا على ط او خارجا منها فليقع على ط ان امكن فيكون مربعه مساويا لضرب اط في طب الذي هو مثل بـ جـ لكن ذلك العمود يكون مساويا لعمود دط فيكون مربع طد مساويا لضرب اط في طب و هو ايضا مساو لضرب بط في مثله هذا محال فليس العمود يقع على ط و كذلك لا يقع خارجا منه لانه يكون ذلك العمود حينئذ اقصر من طد فيكون هذا المحال الزم فباضطرار يقع العمود على نقطة فيما بين اط مثل هز و مربع هز مثل ضرب از في بـ جـ فيكون نسبة از الى هز كنسبة هز الى بـ جـ و سطح هب مثل سطح دب كما تبين في شكل حـ من مقالة بـ من المخروطات يكون نسبة هز الى بـ جـ كنسبة بـ جـ الى بز فالخطوط الاربعة متناسبة از هز بـ جـ بز فنسبة مربع بز الرابع الى مربع بـ جـ الثالث كنسبة بـ جـ الثالث الى از الاول فيكون مكعب بـ جـ الذي عملناه مساويا للعدد المفروض مساويا

للمجسم الذى قاعدته مربع بز و ارتفاعه از لكن هذا المجسم الذى قاعدته مربع بز و ارتفاعه از مساو لمكعب بز و المجسم الذى قاعدته مربع بز و ارتفاعه اب و هذا المجسم الذى قاعدته مربع بز و ارتفاعه اب هو مثل عدة الاموال المفروضة فمكعب بز مع عدة اموال المفروضة مساو للعدد المفروض و ذلك ما اردنا ان نبين و هذا الصنف ليس فيه اختلاف وقوع و لا استحيل شىء من مسائله و قد خرج بخواص القطوع المكافى و الزائد معا

[§١٠٧٠٦] الصنف الخامس من الاصناف الستة الثلاثية الباقية مكعب و عدد يعدل مالا نفرض اج لعدة الاموال و نعمل مكعبا مساويا للعدد المفروض و يكون ضلعه ح فخط ح لا يخلو اما ان يكون مساويا لخط اج او اعظم منه او اصغر فان كان مساويا له استحالت المسئلة لانه لا يخلو اما ان يكون ضلع المكعب المطلوب مثل ح او اصغر او اكبر فان كان مثله كان ضرب اج فى مربعه مثل مكعب ح فيكون العدد مثل عدة الاموال و لا يحتاج الى زيادة المكعب و ان كان ضلع المطلوب اصغر منه كان ضرب اج فى مربعه اصغر من العدد المفروض فيكون عدة الاموال اصغر من العدد المفروض فضلا عن الزيادة و ان كان الضلع اكبر من ح كان مكعبه اكبر من ضرب اج فى مربعه فضلا عن زيادة العدد عليه ثم ان كان ح اعظم من اج يكون المحال فى الوجوه الثلاثة الزم فيجب ان يكون ح اصغر من اج و الا فالمسئلة مستحيلة فنفصل بج من اج مثل ح فخط بج اما ان يكون مثل اب او اعظم منه او اصغر فليكن فى الشكل الاول مثله و فى الثانى اعظم منه و فى الثالث اصغر منه و تتم فى الاشكال الثلاثة مربع دج و نعمل على نقطة د قطعا زائدا لا يلقاه اج جه و هو فى الاول دز و فى الثانى و الثالث دط و نعمل قطعا مكافيا رأسه نقطة ا و سهمه اج و ضلعه القائم بج و هو فى الاول اط و فى الثانى ال و فى الثالث اك و يكون القطعان معلومى الوضع ففي الاول يمر القطع المكافى على نقطة د لان مربع دب مساو لضرب اب فى بج فيكون د على محيط القطع المكافى و يلقاه على نقطة اخرى و يمكنك ان تتفطن له بادنى تأمل و فى الثانى يكون نقطة د خارجة من محيط

المكافئ لان مربع دب اعظم من ضرب اب في بـ جـ فان التقى القطعان بالتماس على

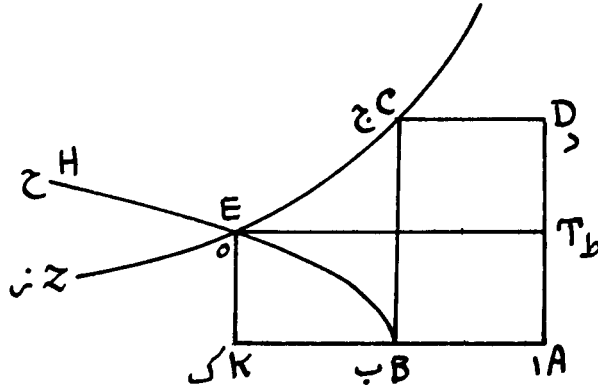


نقطة أخرى او بالتقاطع فيكون العمود النازل منها واقعا لامحالة فيما بين نقطتي

١ ب كانت المسئلة ممكنة و الافهى مستحيلة و هذا التماس او التقاطع لم يتفطن له ابوالجود المهندس الفاضل حتى جزم القضاء بان بج ان كان اعظم من اب كانت المسئلة مستحيلة و ابطل في حكمه هذا و هذا الصنف هو الذى اضطر اليه الماهانى من بين الاصناف الستة حتى تعرف و فى الثالث يكون نقطة د داخل القطع المكافى فيتقاطع القطعان على نقطتين و بالجملة فانا نخرج من نقطة الالتقاء عمودا على اب فليكن فى الشكل الثانى طز و كذلك عمودا آخر منها على ج ه و هو طك فسطح طج مثل سطح دج فيكون نسبة زج الى بج كنسبة بج الى طز و طز من خطوط الترتيب فى قطع اطل يكون مربعه مثل ضرب از فى بج فيكون نسبة بج الى طز كنسبة طز الى زا فالخطوط الاربعة متناسبة نسبة زج الى ج كنسبة ج الى طز و كنسبة طز الى زا فنسبة مربع زج الاول الى مربع بج الثانى كنسبة بج الثانى الى زا الرابع فيكون مكعب بج الذى هو مثل العدد المفروض مساويا للمجسم الذى قاعدته مربع زج و ارتفاعه زا و نجعل مكعب زج مشتركا فمكعب زج مع العدد المفروض مساو للمجسم الذى قاعدته مربع زج و ارتفاعه اج الذى هو مثل عدة الاموال المفروضة و ذلك المراد و قس عليه الباقيين على ان الثالث يخرج منها مكعبان لا محالة لان كل عمود يفصل ضلع مكعب من جا كما تبين فقد تبين ان هذا الصنف له اختلاف وقوعات و قد يقع فيها ما يستحيل و قد خرج بخواص قطعين مكاف و زائد معا

[§ ١٠٧٠٧] الصنف السادس من الاصناف الستة الثلاثية الباقية هو مكعب يعدل اموالا و اعدادا نفرض عدة الاموال خط اب و نعمل مجسما ارتفاعه اب و قاعدته مربع و يكون مساويا للعدد المفروض و ليكن ضلع قاعدته بج عمودا على اب و تتم سطح دب و نعمل على نقطة ج المملومة الوضع قطعاً زائدا لا يلقاه اب اد وهو قطع جهز و قطعاً آخر مكافيا رأسه نقطة ب و سهمه على استقامة اب و ضلعه القائم اب و هو بهج فهذان القطعان يتقاطعان باضطرار فليتقاطعا على ه فيكون ه معلومة الوضع و نخرج منها عمودى هط هك على اب اد فسطح ها مثل سطح جا فيكون نسبة اك

الى $بج$ كنسبة $اب$ الى $هك$ ويكون مربعاتها ايضا متناسبة لكن مربع $هك$ مثل



ضرب $كب$ في $اب$ لان $هك$ خط ترتيب في قطع $بجح$ فيكون نسبة مربع $اب$ الى مربع $هك$ كنسبة $اب$ الى $بك$ فنسبة مربع $بج$ الى مربع $اك$ كنسبة $بك$ الى $اب$ فيكون المجسم الذي قاعدته مربع $بج$ وارتفاعه $اب$ مساويا للمجسم الذي قاعدته مربع $اك$ وارتفاعه $كب$ لتكافؤ الارتفاعين والقاعدتين و نجعل المجسم الذي قاعدته مربع $اك$ وارتفاعه $اب$ مشتركا فيكون مكعب $اك$ مساويا للمجسم الذي قاعدته مربع $بج$ وارتفاعه $اب$ الذي عملناه مثل العدد المفروض مع المجسم الذي قاعدته مربع $اك$ وارتفاعه $اب$ الذي هو عدة الاموال المفروضة فيكون مكعب $اك$ مثل عدة امواله المفروضة مع العدد المفروض و ليس لهذا الصنف اختلاف وقوع و لا استحيل من مسائله شيء و قد خرج بخواص قطعين مكاف و زائد معا

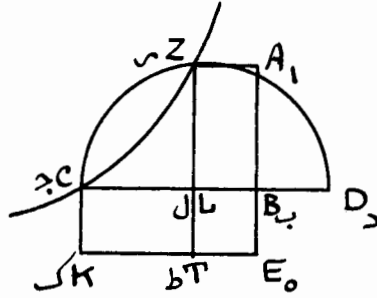
[§ ١٠٨٠١] واذ قد أتينا على الاصناف الثلاثية فلنقل على الرباعية الاربعة

التي كل صنف منها مركب من تعادل ثلاثة و واحد

[§ ١٠٨٠٢] فالصنف الاول من الاربعة الرباعية هو مكعب و اموال و اضلاع

تعديل اعدادا نضع به ضلع مربع مساو لعدة الاضلاع المفروضة و نعمل مجسما قاعدته مربع به و يكون مساويا للعدد المفروض و ليكن ارتفاعه $بج$ عمودا على به و نعمل بد مثل عدة الاموال المفروضة على استقامة $بج$ و نعمل على قطر $دج$ نصف دائرة $دزج$ و

تتم سطح بك ونعمل على نقطة ج قطعاً زائداً* لا يلقاه خطا به هك فهو يقطع الدائرة على نقطة ج لانه يقطع الخط المماس لها و هو جك فيلزم ان يقطعها

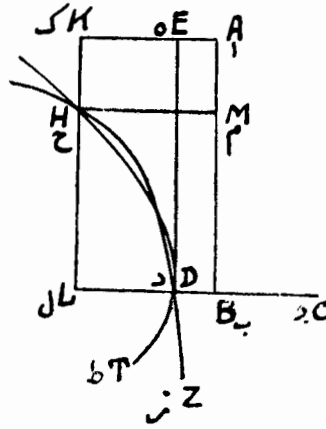


على نقطة أخرى فليقطعها على ز فيكون ز معلومة الوضع لان الدائرة و القطع معلوما الوضع و نخرج من ز عمودى زط زا على هك ها فسطح زه مثل سطح بك و يلتقى هل المشترك يبقى سطح زب مثل سطح لك يكون نسبة زل الى لجد كنسبة هب الى بل لان هب مثل ظل وكذلك مربعاتها ايضا متناسبة لكن نسبة مربع زل الى مربع لجد كنسبة دل الى لجد للدائرة فيكون نسبة مربع هب الى مربع بل كنسبة دل الى لجد فيكون المجسم الذى قاعدته مربع هب و ارتفاعه لجد مثل المجسم الذى قاعدته مربع بل و ارتفاعه دل لكن هذا المجسم الأخير مثل مكعب بل مع المجسم الذى قاعدته مربع بل و ارتفاعه بد الذى هو مثل عدة الاموال المفروضة و نجعل المجسم الذى قاعدته مربع هب و ارتفاعه بل الذى هو مثل عدة الجذور مشتركا فيكون المجسم الذى قاعدته مربع هب و ارتفاعه بجد الذى عملناه مساويا للعدد المفروض مثل مكعب بل مع مثل عدد اضلاعه المفروض و مع مثل عدة امواله المفروضة وذلك ما اردنا ان نبين فليس لهذا الصنف اختلاف وقوع ولا استحيل من مسائله شىء و خرج بخواص القطع الزائد مع خواص الدائرة

[§ ١٠٨٠٣] الصنف الثانى من الاصناف الاربعة الرباعية هو مكعب واموال

(٥) درنسخ A و C (§ ٤٠٣٠٢٠١) عبارت چنین است: «ونعمل قطعاً زا يدارسه نقطة ج ولا...»

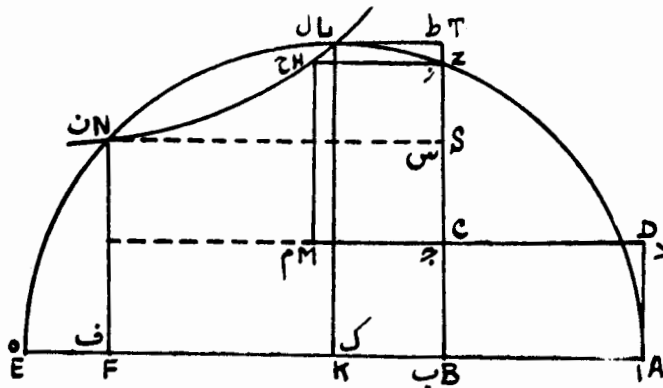
واعداد تعدل اضلاعا نضع اب ضلع مربع مساو لعدة الاضلاع و بجد لعدة الاموال المفروضة و يكون عمودا على اب و نعمل مجسما قاعدته مربع اب و يكون مساويا للعدد المفروض وليكن ارتفاعه بد على استقامة بجد و نعمل على نقطة د قطعاً زائدا لا يلقاه اب اه بعد ان تمنا سطح به و هو قطع زدح و نعمل قطعاً آخر زائدا رأسه نقطة د و سهمه على استقامة بد و كل واحد من ضلعيه القائم والمائل مثل دج و هو طوح ولا مجال ان هذا القطع يقطع الاول على د فان امكن ان يلتقيا على نقطة



أخرى فالمسئلة ممكنة و الافرى مستحياة هذا الالتقاء بالتماس او بالتقاطع على نقطتين بناؤه على المقالة الرابعة من كتاب المخروطات وقد ضمنا ألاً تحيل الاعلى مقاليتين منه ومع هذا فلا يضرنا بعد ان التقا سوءاً كان بالتماس او بالتقاطع فافهمم والالتقاء اما ان يكون بالتماس واما ان يكون بالتقاطع فان قطعه على غير نقطة د فباضطرار يقطعه على نقطتين و بالجملة فانا نخرج من نقطة التقاطع او الالتقاء كيف ما كان وليكن نقطة ح عمودي حم كحل فيكونان معلومى الوضع و القدر لان نقطة ح معلومة الوضع فسطح اح مثل سطح اد و يلقي هم المشترك يبقى مد مثل هح و نجعل دح مشتركا يكون هل مثل هل فاضلاهما متكافية وكذلك مربعات اضلاعهما فيكون نسبة مربع اب الى مربع بل كنسبة مربع حل الى مربع لد ولكن نسبة

مربع حل الى مربع لد كنسبة جل الى لد كما بيناه مرارا فيكون نسبة مربع اب الى مربع بل كنسبة جل الى لد فالمجسم الذى ارتفاعه لد وقاعدته مربع اب مثل المجسم الذى قاعدته مربع بل وارتفاعه لجد لكن هذا المجسم الأخير مثل مكعب بل مع المجسم الذى قاعدته مربع بل وارتفاعه بجد الذى هو مثل عدة الاموال المفروضة و نجعل المجسم الذى قاعدته مربع اب وارتفاعه بد الذى عملناه مثل العدد المفروض مشتركا فيكون مكعب بل مع عدد امواله المفروض ومع العدد المفروض مثل المجسم الذى قاعدته مربع اب وارتفاعه بل الذى هو مثل عدة اضلاع مكعب بل المفروضة وذلك المراد فقد تبين ان هذا الصنف له اختلاف وقوعات وربما يوجد فى مسائله ضلعان لمكعبين و ربما يقع فيها اعنى فى مسائله مستحيل وقد خرج بخواص قطعين زائدين و ذلك ما اردنا ان نبين

[§ ١٠٨٠٤] الصنف الثالث من الاصناف الاربعة الرباعية هو مكعب واضلاع واعداد تعدل اموالا نفرض خط به لعدة الاموال المفروضة و بجد ضلع مربع مساو لعدة الاضلاع ويكون عمودا على به و نعمل مجسما قاعدته مربع بجد ويكون مساويا للعدد المفروض وليكن ارتفاعه اب و على استقامة به و نعمل على اه نصف دائرة



ازه فنقطه ج اما ان تقع داخل الدائرة او على محيطها او خارجا منها فلتقع اولاً داخل الدائرة ونخرج بجد على استقامة حتى يقطع الدائرة على ز و نتم سطح اج

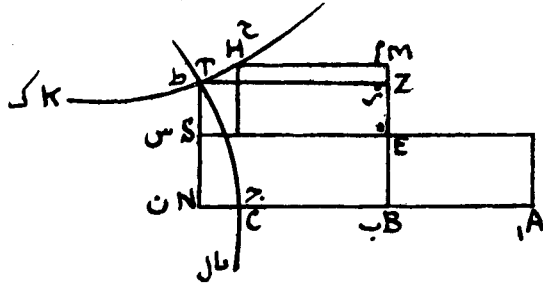
و بعمل على زج سطح مساويا لسطح اج و هو جح فيكون نقطة ح معلومة الوضع لان سطح جح معلوم القدر وزواياه ايضا معلومة القدر و خط زج معلوم الوضع و القدر و هى اما ان تقع داخل الدائرة او على محيطها او خارجا منها فلتقع اولا داخل الدائرة و نعمل على نقطة ح قطعاً زائدا لايلقاه زج جيم فهو يقطع الدائرة على نقطتين باضطرار في هذا الوضع فليقطعها على نقطتي ل ن فتكونان معلومتى الوضع و نخرج منهما عمودى لك تق على اه و من نقطة ل عمود ل ط على بز فسطح ل ب ج مثل سطح جح و جح مثل جا و نجعل جك مشتركاً يكون دك مثل طك فاضلاهما متكافية و كذلك مربعات اضلاهما لكن نسبة مربع لك الى مربع كا كنسبة هك الى كا للدائرة فيلزم ان يكون نسبة مربع ب ج الى مربع بك كنسبة هك الى كا فالمجسم الذى قاعدته مربع ب ج و ارتفاعه كا مثل المجسم الذى قاعدته مربع بك و ارتفاعه كه لكن المجسم الاول مثل عدة اضلاع مكعب بك المفروضة و مثل العدد المفروض و نجعل مكعب بك مشتركاً فيكون المجسم الذى قاعدته مربع بك و ارتفاعه به الذى هو مثل عدة اموال مكعب بك المفروضة مثل مكعب بك مع عدة اضلاعه المفروضة و مع العدد المفروض و كذلك يكون مكعب ب ه بهذا البرهان هذا اذا وقع نقطتا ج ح داخل الدائرة فان وقع ح خارج الدائرة و نعمل القطع فربما لقي الدائرة بالتماس او بالتقاطع [هذا النوع من هذا الصنف هو الذى ذكره ابوالجود فى استخراج المسئلة التى سذكرها*] و يؤول الامر الى ما قلنا و ان لم يلق القطع الدائرة فلا تزال نعمل السطح على خط اقصر من زج او اطول منه فى الوقوع الآخر فان لم يلق القطع الدائرة فالمسئلة مستحيلة و يكون البرهان على استحالتها بعكس ما ذكرناه و ان وقع ج على المحيط او خارج الدائرة فنخرج جز على استقامة و نعمل سطحاً احدى زواياه تكون على ج و يكون بحيث لو عمل على الزاوية المقابلة لزاوية ج قطع بالصفة المذكورة يلقى الدائرة بالتماس او بالتقاطع و ذلك يعلم بقليل استقراره مع ضرب من القياس السهل تركته لكى يحصل للناظرين

(*) عبارات داخل علامت [در نسخه‌ى A (٤٠٣٠١) در حاشيه نوشته شده و در نسخه‌ى C موجود نيست.

في رسالتي هذه الارتياض فان من لا يمكنه هذا القدر من الاستنباط لا يتحقق من هذه الرسالة شيئا اذ هذه الرسالة مبنية على الكتب الثلاثة التي ذكرناها و نبرهن على استحالة المستحيل منها بعكس البرهان الذي ذكرناه على الممكن وذلك ان ضلع المكعب يجب ان يكون اقصر من هب الذي هو عدة الاموال المفروضة لانه ان كان مساويا لعدة الاموال المفروضة يكون ذلك المكعب مساويا لعدة اموال المفروضة فاضلا عن زيادة شيء آخر عليه من العدد او من اضلاعه فان كان ضلع المكعب اعظم من عدة الاموال المفروضة كان المكعب نفسه اعظم من عدة اموال المفروضة فضلا عن زيادة شيء آخر عليه فبين انه يجب ان يكون اقصر منه فنفضل مثله من به وليكن Γ و نخرج من Γ عمودا الى محيط الدائرة و نعكس البرهان الذي ذكرناه فبين ان رأس العمود يكون على محيط القطع الذي قيل انه لا يمكن ان يلقى الدائرة وذلك محال و لاجل انا نظن ان هذا الاستقرآء ربما يكون عسرا على بعض الناظرين في هذه الرسالة فانا نظوى هذه الجملة و نأتى بقانون مغن عن هذا الاستقرآء و هو انا نعمل سطحا على خط كيف ما اردنا يكون على استقامة بـ Γ كيف ما وقعت Γ خارجا او داخلا و يكون احدى زواياه على نقطة Γ و يكون مساويا لسطح Δ فلا بد من ان يصير اضلاعه معلومة القدر والوضع و نعمل على الزاوية المقابلة لزاوية Γ قطعاً زائدا لا يلقاه خطا زـ Γ Γ و هو الخط الذي هو عمود على نقطة Γ فان لقي القطع الدائرة بالتماس او بالتقاطع فالمسئلة ممكنة و الا فهي مستحيلة و البرهان على الاستحالة ما ذكرت [§ ١٠٨٠٤٠١] و قد اضطر واحد من المهندسين الى هذا الصنف وقد اخرجته الا انه لم يبين اختلاف و قوعاته ولم يخطر بباله انه ربما يقع فيه مستحيل كما بيناه فاعرفه و اعرف القانون الآخر في عمل هذا الصنف و تمييز الممكن من المستحيل و هذا الصنف خرج بخواص الدائرة مع خواص القطع الزائد و ذلك ما اردنا ان نبين و اما المسئلة التي اضطرت واحدا من المتأخرين الى هذا الصنف هي هذه عشرة قسمتها بقسمين فيكون مجموع مربعي القسمين مع الخارج من قسمة الاعظم على الاصغر اثنين و سبعين فوضع احد القسمين شيئا و الآخر

عشرة الاشياء كعادة الجبريين في امثال هذه القسمة فأدى العمل الى مكعب مع خمسة من العدد وثلاثة عشر اضلاعه و نصف معادل لعشرة اموال و في هذه المسئلة بعينها يقع نقطتا ج ح داخل الدائرة فاستخرج المسئلة هذا الفاضل بعد ما اعيت هذه المسئلة جماعة من فضلاء العراق و منهم ابوسهل القوهي رحمهم الله الا ان هذا المستخرج رضى الله عنه مع فضله و عظم قدره في الرياضيات لم يخطر بباله هذه الاختلافات و في مسائل هذا الصنف ما يستحيل و هذا الفاضل هو ابوالجود او الشني و الله اعلم

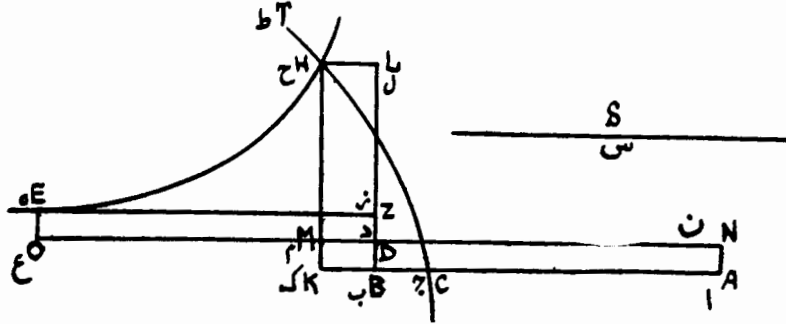
[§ ١٠٨٠٥] الصنف الرابع من الاصناف الاربعة الرباعية هو اعداد و اضلاع و اموال تعدل مكعبا نفرض به ضلع مربع مثل عدة الاضلاع و نعمل مجسما قاعدته مربع به و يكون مساويا للعدد المفروض و ليكن ارتفاعه اب عمودا على به و نفرض بج لعدة الاموال المفروضة على استقامة اب و تمام اه و نخرج على استقامة به هم



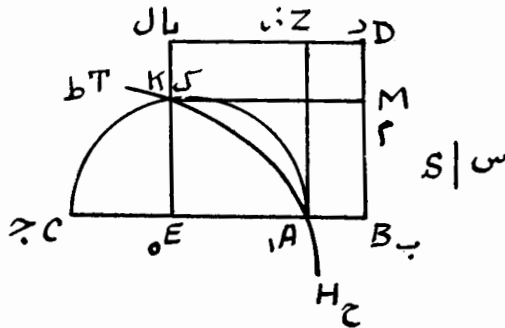
كيف ما كان مقداره و نعمل على هم المفروض سطحاً مثل اه و هو سطح هح فيكون نقطة ح معلومة الوضع و نعمل على ح قطعاً زائداً لا يلقاه هم هس و هو حطك فيكون معلوم الوضع و نعمل قطعاً آخر زائداً رأسه نقطة ج و سهمه على استقامة بج و كل واحد من ضلعيه القائم و المائل مثل اج و هو قطع لجط و يكون معلوم الوضع و يقطع لا محالة قطع حطك فليقطعه على نقطة ط فيكون ط معلومة الوضع و نخرج منها عمودى طز طن على بج بهم فيكونان معلومى القدر و الوضع و طه مثل هح الذى هو مثل ها و نجعل هن مشتركا فيكون اس مثل طب فاضلاهما متكافية و كذلك مربعات اضلاعهما لكن نسبة مربع طن الى مربع ان كنسبة نج الى ان كما

سطح **هد** كلها معلومة الوضع و القدر و نعمل على **ه** قطعاً زائداً لا يلقاه زد **دع** و هو قطع **هح** فيكون **هح** معلوم الوضع و نعمل قطعاً آخر زائداً رأسه نقطة **ا** و سهمه **اب** و كل واحد من ضلعيه القائم و المائل مثل **اج** و هو قطع **احط** فهو يقطع القطع الآخر باضطرار فليقطعه على **ح** فيكون **ح** معلومة الوضع و نخرج منها عمودى **حك** حل فيكونان معلومى الوضع و القدر و سطح **حد** مثل **هد** الذى هو مثل **اد** و **دك** مشترك فسطح **حب** مثل **ام** و يكون اضلاعهما متكافية و كذلك مربعات اضلاعهما لكن نسبة مربع **حك** الى مربع **كا** كنسبة **جك** الى **اك** لمكان قطع **احط** كما بيناه مرارا فيكون نسبة مربع **بد** الى مربع **كب** كنسبة **جك** الى **اك** فالمجسم الذى قاعدته مربع **بد** و ارتفاعه **اك** مثل المجسم الذى قاعدته مربع **بك** و ارتفاعه **جك** لكن هذا المجسم الاخير مثل مكعب **بك** مع المجسم الذى قاعدته مربع **بك** و ارتفاعه **بج** الذى هو عدة الاموال المفروضة و المجسم الاول مساو للمجسم الذى قاعدته مربع **بد** و ارتفاعه **اب** الذى عملناه مثل العدد المفروض مع المجسم الذى قاعدته مربع **بد** و ارتفاعه **بك** الذى هو عدة اضلاع مكعب **بك** المفروضة فمكعب **بك** مع عدة امواله المفروضة مثل العدد المفروض مع عدة اضلاعه المفروضة و ذلك المراد و اذا كان **س** مثل **بج** فان **بد** هو ضلع المكعب المطلوب برهانه ان المجسم الذى قاعدته مربع **بد** و ارتفاعه ايضا **بد** الذى هو عدة اضلاع مكعب **بد** مساو لمكعب **بد** و المجسم الذى قاعدته مربع **بد** و ارتفاعه **بج** الذى هو عدة اموال مكعب **بد** المفروضة مساو للمجسم الذى قاعدته مربع **بد** و ارتفاعه **س** الذى هو العدد المفروض فيكون مكعب **بد** مع عدة امواله المفروضة مساو للعدد المفروض مع عدة اضلاعه المفروضة و ذلك المراد و معلوم ان مكعب **بد** فى هذا الوقوع مع العدد المفروض مساو لعدة امواله المفروضة مع عدة اضلاعه المفروضة فقد داخل هذا الصنف الصنف الثالث و هو مكعب و اعداد تعدل اموالا و اضلاعا و ان كان **س** اعظم من **بج** فانا نجعل **اب** مثل **س** و نعمل القطع الثانى على نقطة **ج** و كل واحد من ضلعيه مثل **اج** و هو باضطرار يقطع القطع الآخر و يكون ضلع المكعب ايضا

بك و باقى العمل و البرهان شبيه بما تقدم الا ان نسبة مربع حك الى مربع كا



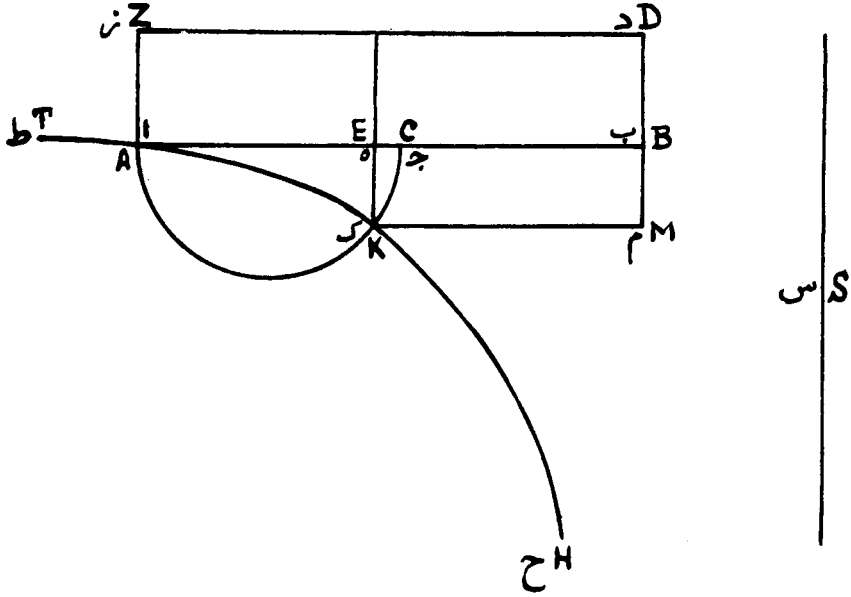
كنسبة اك الى كج فقد تبين ان لهذا الصنف اختلاف و قوعات و انواع و احد انواعه يداخل الصنف الثالث و ليس فى مسائله مستحيل و قد خرج بخواص قطعين زائدين [§ ١٠٩٠٣] الصنف الثانى من الاصناف الثلاثة الرباعية الباقية هو مكعب و اضلاع تعدل اموالا و اعدادا نضع بج لعدة الاموال المفروضة و بد ضلع مربع مثل عدة الاضلاع عمودا على بج و نعمل مجسما مساويا للعدد المفروض و يكون قاعدته مربع بد وليكن ارتفاعه س فخط س اما ان يكون اصغر من بج او مثله او اعظم منه فليكن اولا اصغر منه و نفصل من بج با مثل س و نتم اد و نعمل



على قطر ا ب دائرة اكج فتكون معلومة الوضع و نعمل على نقطة ا قطعاً زائدا لا يلقاه بد دز و هو قطع حاط و يكون معلوم الوضع و حاط يقطع از المماس للدائرة فهو يقطع الدائرة لانه لو وقع بينها و بين از امكننا ان نخرج من

نقطة α خطا يماس القطع كما بينه ابلونيوس في شكل α من مقالة β فذلك الخط
اما ان يقع بين α و الدائرة و ذلك محال و امان ان يقع خارج α فيكون α
خطا مستقيماً واقعا بين القطع و بين ذلك الخط المماس و ذلك محال فليس يقع
قطع α بين الدائرة و بين α فهو α اذن يقطعها و يقطعها باضطرار على نقطة أخرى
فليقطعها على β فيكون β معلومة الوضع و نخرج منها عمودى γ على
 β بد فيكونان معلومى الوضع و القدر كما عرفته و تتم سطح γ فسطح α مثل
سطح γ و تلقى γ المشترك و نجعل α مشتركاً فيكون β مثل α فاضلاعهما
متكافية و كذلك مربعات اضلاعهما لكن نسبة مربع γ الى مربع α كنسبة β
الى α فيكون نسبة مربع β الى مربع γ كنسبة β الى α فالمجسم الذى
قاعدته مربع β و ارتفاعه α مثل المجسم الذى قاعدته مربع γ و ارتفاعه β و
نجعل مكعب β مشتركاً فيكون المجسم الذى قاعدته مربع β و ارتفاعه β مثل
مكعب β مع المجسم الذى قاعدته مربع β و ارتفاعه α لكن المجسم الاول مثل
عدة اموال مكعب β المفروضة و نجعل المجسم الذى قاعدته مربع β و ارتفاعه
 α الذى عملناه مساوياً للعدد المفروض مشتركاً فيكون مكعب β مع المجسم
الذى قاعدته مربع β و ارتفاعه α الذى هو عدة اضلاع مكعب β المفروضة مثل عدة
امواله المفروضة مع العدد المفروض و ذلك المراد و ان كان α مثل β فان β
هو ضلع المكعب المطلوب برهانه ان مكعب β مثل عدة امواله المفروضة و المجسم
الذى ارتفاعه β و قاعدته مربع β هو مثل العدد المفروض و هو ايضاً مثل عدة
اضلاع مكعب β المفروضة فمكعب β مع عدة اضلاعه المفروضة مساو لعدة امواله
المفروضة مع العدد المفروض و كذلك هذا النوع يداخل الصنف الثالث لان
عدة اضلاع مكعب β المفروضة هو مثل العدد المفروض فيكون مكعب β مع
العدد المفروض مساوياً لعدة امواله المفروضة مع عدة اضلاعه المفروضة و ان كان
 α اعظم من β فانا نجعل α مثل α و نعمل الدائرة على قطر α و القطع على
نقطة α يقطع الدائرة على β كما بيناه و نخرج من نقطة β عمودى γ على α كما

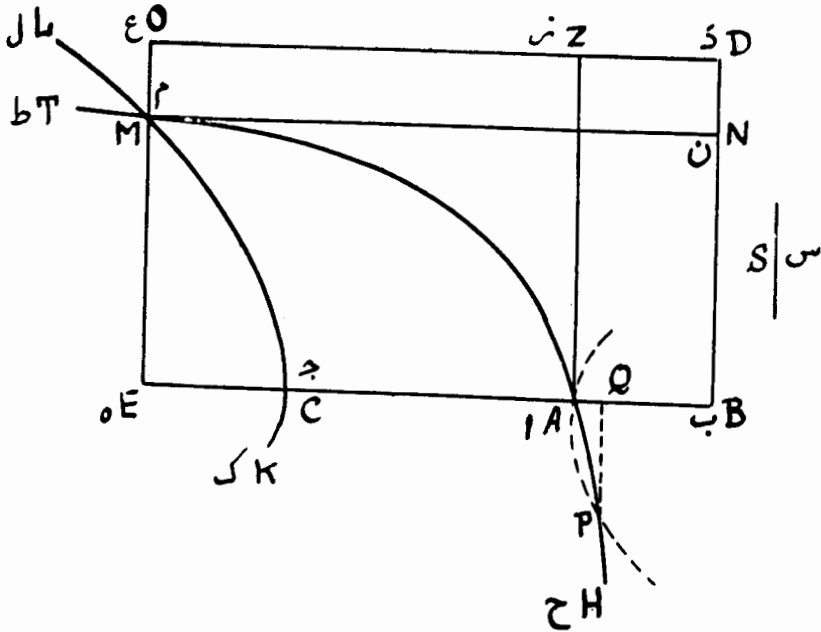
فعلناه في الشكل المتقدم فيكون هب هو ضلع المكعب المطلوب و البرهان عليه كما تقدم نلقى سطح هـ المشترك فيكون اضلاع هم هـ متكافية و كذلك مربعاتها فيكون البرهان بعينه كما تقدم لا يتغير منه شيء فقد تبين ان لهذا الصنف اختلاف



وقوعات و انواع و نوع منها يداخل الصنف الثالث و ليس في مسائله مستحيل و قد خرج بخواص الدائرة و قطع زائد

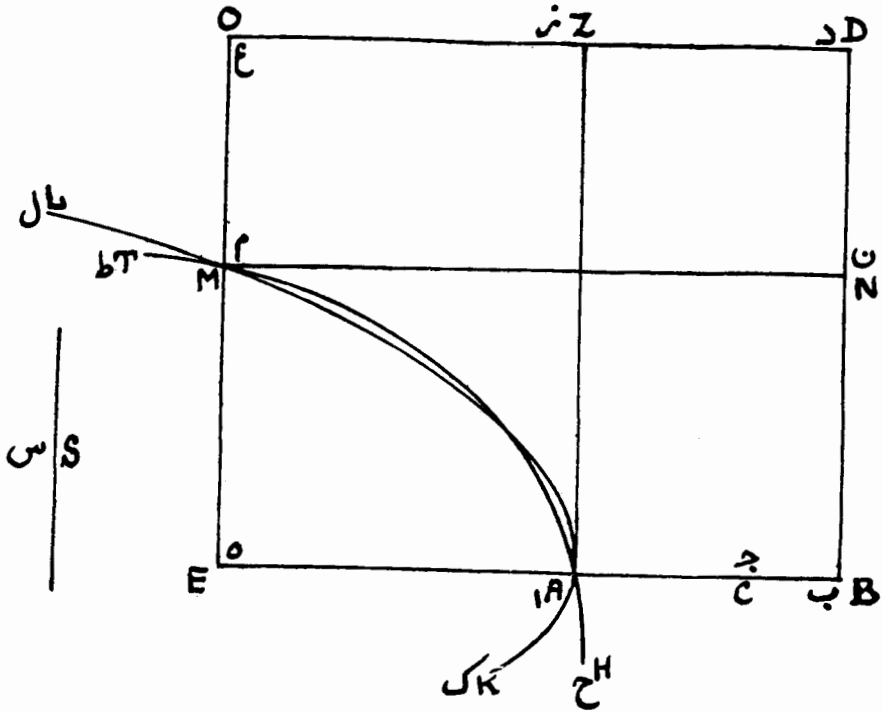
[§١٠٩٠٤] الصنف الثالث من الاصناف الثلاثة الرباعية الباقية هو مكعب و اعداد تعدل اضلاعا و اموالا فنرض بـ لعدة الاموال و بد عمودا عليه و هو ضلع مربع مساو لعدة الجذور و نعمل مجسما قاعدته مربع بد و يكون مساويا للعدد المفروض وليكن ارتفاعه س فنخط س اما ان يكون اصغر من بـ او مثله او اعظم منه وليكن اولا اصغر منه و نفصل من بـ با مثل س و تتم بـ ز و نعمل على نقطة ا قطعاً زائدا لا يلقاه بد دز و هو قطع حاظ و نعمل قطعاً آخر زائدا رأسه نقطة ج و سهمه على استقامة بـ و كل واحد من ضلعيه القائم و المائل مثل ا ج فهو لامحالة يقطع القطع الآخر و هو كجـ فليتقاطع قطع كجـ ل و قطع حاظ على نقطة م فيكون

نقطة م معلومة الوضع لان القطعين معلوما الوضع و نخرج منها عمودى من همع فيكونان معلومى الوضع و القدر فسطح دا مثل سطح دم و يكون نه مثل زه على ما بيناه مرارا فاضلاعهما متكافية و كذلك مربعات اضلاعهما لكن نسبة مربع مه الى مربع ها كنسبة جه الى ها لقطع كجمل فيكون نسبة مربع بد الى مربع به كنسبة جه الى ها فالمجسم الذى قاعدته مربع بد و ارتفاعه ها مثل المجسم الذى



قاعدته مربع به و ارتفاعه جه و نجعل المجسم الذى قاعدته مربع به و ارتفاعه بج الذى هو عدة اموال مكعب به مشتركا فمكعب به مثل عدة امواله المفروضة مع المجسم الذى قاعدته مربع بد و ارتفاعه ها و نجعل المجسم الذى ارتفاعه با و قاعدته مربع بد الذى عملناه مساويا للعدد المفروض مشتركا فيكون المجسم الذى قاعدته مربع بد و ارتفاعه به الذى هو مثل عدة اضلاع مكعب به المفروضة مع عدة اموال مكعب به المفروضة مساويا لمكعب به مع العدد المفروض و ان كان س مثل بج فان بج هو ضلع المكعب برهانه ان مكعب بج مثل عدة امواله المفروضة و العدد المفروض يكون

مساويا لعدة اضلاع مكعب $\beta\gamma$ المفروضة فمكعب $\beta\gamma$ مع العدد المفروض مثل عدة امواله المفروضة مع عدة اضلاعه المفروضة وذلك المراد ويكون ايضا مكعب $\beta\gamma$ مع عدة اضلاعه المفروضة مثل عدة امواله المفروضة مع العدد المفروض فقد داخل هذا النوع الصنف الثاني وان كان α اعظم من $\beta\gamma$ فانا نجعل $\beta\alpha$ مثل α ونتمم السطح ونعمل القطع الاول على α والثاني ايضا على α وهما متقاطعان فان التقيما مرة ثانية اما



بالتماس فعلى نقطة واحدة واما بالتقاطع فعلى نقطتين كما هو معروف من مقالة δ من كتاب المخروطات فالمسئلة ممكنة و الافي مستحيلة فان تقاطعا فنخرج من نقطتي التقاطع عمودين يفصل ضلعين لمكعبين و البرهان عليه كما تقدم لايتغير منه شيء فبين ان لهذا الصنف انواعا و بعضها مستحيل و قد خرج بخواص قطعين زائدين [§١٠٩٠٥] و تبين ان هذه الثلاثة الاصناف الرباعية متداخلة اى يوجد نوع من الاول يكون هو بعينه نوعا من الثاني و يوجد نوع من الثاني هو نوع من الثالث و يوجد

نوع من الثالث هو بعينه نوع من الثاني كما بيناه

[§ ١٠١٥٠١] واز قد أتينا على الاصناف الخمسة والعشرين من مقدمات الجبر والمقابلة واستوفيناها حق الاستيفاء وحصلنا انواع كل صنف منها و اعطينا القانون في معرفة الممكن من المستحيل في مسائل ما يقع فيه المستحيلات و بينا ان اكثرها لا يقع فيه المستحيلات[†] فلنقل على اجزائها

[§ ١٠١٥٠٢] جزء الشيء هو عدد نسبهته الى الواحد كنسبة الواحد الى ذلك الشيء فان كان الشيء ثلاثة كان جزؤه ثلثا و ان كان الشيء ثلثا كان جزؤه ثلاثة و كذلك ان كان اربعة كان جزؤه ربعا و ان كان ربعا كان جزؤه اربعة و بالجملة فان جزء كل عدد هو الجزء السمي لذلك العدد كالثلث من الثلاثة ان كان العدد صحيحا و الثلاثة من الثلث ان كان العدد كسورا و كذلك جزء المال هو الجزء السمي لعدده صحيحا كان او كسورا و كذلك جزء الكعب ولكي يكون اظهر للحس فانا نضعها في لوح

جزء الكعب ☆ جزء المال ☆ جزء الجذر

١ ١ ١
٢ ٤ ٨

الواحد ☆ الجذر ☆ المال ☆ الكعب

٨ ٤ ٢ ١

[§ ١٠١٥٠٣] فنسبة جزء الكعب الى جزء المال كنسبة جزء المال الى جزء الجذر و كنسبة جزء الجذر الى الواحد و كنسبة الواحد الى الجذر و كنسبة الجذر الى المال و كنسبة المال الى الكعب فهذه سبع مراتب متوالية على نسبة واحدة و نتكلم في معادلاتها لا غير و اما جزء مال المال و جزء مال الكعب و جزء كعب الكعب بالغا ما بلغ يكون ايضا متناسبة و لا حاجة لنا الى ذكرها ان لا سبيل الى استنباطها

(†) نسخهى C (٤٠٣٠٢٠١ §) اين عبارت را بين « المستحيلات » و « فلنقل » اضافه دارد:

« فقد حان لنا ان نختم هذه الرساله حامدين لله تعالى مصليين على خير الانبياء محمد وآله اجمعين و ادن كما اتى هذه الاصناف » . و نیز رجوع شود به ذيل صفحه ٥١ .

[١٠١٥٠٤] و اعلم انك ان اخذت الثمن الذى هو جزء الكعب كعبا فيكون جزؤه ثمانية الذى هو الكعب بالعكس فقس عليه سائره فجزء الكعب و جزء المال و جزء الجذر و الواحد هذه الاربعة تكون فى حكم الكعب و المال و الجذر و الواحد مثاله اذا قيل جزء مال يعدل نصف جزء جذر فكانه قيل مال يعدل نصف جذر فالمال يكون ربعا و هو جزء المال فالمال المطلوب يكون اربعة و جزؤه الربع و جزء جذره النصف و على هذا القياس فى مفرداته و اما فى المركبات اذا قيل جزء مال و جزءا جذر يعدل واحدا و ربعا فكانه قيل مال و جذران يعدل واحدا و ربعا فبالطريق الذى بيناه نخرج الجذر نصفا و المال ربعا الا انه بموجب السؤال جزء مال و جزءا جذر فيكون الربع الذى هو المال الاول جزء المال المطلوب فيكون المال المطلوب اربعة و كذلك فى الرباعيات اذا قيل جزء كعب و ثلاثة اجزاء مال و خمسة اجزاء جذر يعدل ثلاثة و ثلاثة اثمان و كانه قيل كعب و ثلاثة اموال و خمسة اجزاء يعدل ثلاثة و ثلاثة اثمان فبالطريق الذى بيناه بالقطع المخروطية يتبين ضلع الكعب فيكون هو جزء الجذر المطلوب فنجعل نسبته الى الواحد المقروض كنسبة الواحد المقروض الى خط آخر فيكون ذلك الخط هو ضلع المكعب المطلوب فقد لاح انه يكون خمسة وعشرون صنفا اخرى من هذه المعادلات بين هذه الاربعة متناسبة للخمسة والعشرين صنفا المتقدمة

[§ ١٠١٥٠٥] و اما ضرب بعضها فى بعض فمعلوم ظاهر من كتب الجبريين و انت يمكنك ان تتفطن له ولا نطول به القول [§ ١٠١٥٠٦] و اما معادلة هذه الاربعة بالاربعة المتقدمة فكما ابين [§ ١٠١٥٠٦٠١] اذا قيل كعب يعدل عشرة اجزاء كعب اى عشرة اجزاء نفسه فالكعب هو الاول من المراتب السبع و اجزاء الكعب هو السابع منها فاضرب احدهما فى الآخر و خذ جذر المجتمع فما خرج فهو الواسط اعنى الرابع و هو المكعب المطلوب و تفصيل هذا الكلام ان كل عدد اذا ضرب فى جزئه السمي له خرج الواحد و ان ضرب فى جزئه خرج اثنان و ان ضرب فى عشرة اجزائه يخرج عشرة من العدد فكانه قيل فى مسألتنا اى كعب اذا ضرب فى مثله كان

عشرة فجزره هو المكعب المطلوب ثم استخراج ضلع ذلك المكعب هو على ما بيناه بالقطع المخروطية وكذلك اذا قيل اى مال يعدل ستة عشر جزءا من اجزائه السمية له فاضرب الواحد فى ستة عشر وخذ جذر المبلغ و هو اربعة فيكون هو المال المطلوب فكانه قيل اى مال ضربته فى مثله يكون ستة عشر على القياس المتقدم و كذلك اذا قيل اى جذر يعدل اربعة اجزائه فكانه قيل اى عدد اذا ضربته فى مثله حصل اربعة و هو اثنان و اما اذا قيل اى مال يعدل عدة اجزاء مكعب ضلعه فان استخراج ذلك لا يمكن بالطرق التى بينها ان هو محتاج الى ايراد اربعة خطوط بين خطين ليتوالى الستة على نسبة واحدة و ذلك قد بينه ابو على بن الهيثم رحمه الله تعالى الا انه صعب جدا لا يمكن ان يلحق بكتابنا هذا و كذلك ان قيل اى مكعب يعدل عدة اجزاء مال ضلعه يحتاج الى المقدمة المذكورة فلا يمكن استخراجها بطرقنا و بالجملة فان ضرب الاول فى السادس من هذه السبع المراتب يحتاج الى ايراد اربعة خطوط بين خطين ليتوالى الستة على نسبة واحدة كما بينه ابو على بن الهيثم رحمه الله تعالى و اما اذا قيل اى مكعب يعدل ستة عشر جزء ضلعه فيضرب الاول فى الخامس فيكون جذر جذر المبلغ هو ضلع المكعب المطلوب و على هذا القياس كل ما يعادل من هذه السبع المراتب خامسة فى النسبة [١٠١٥٠٦٠٢] و اما فى المركبات مثل جذر يعدل واحدا و جزءى جذر فهو فى قوة مال يعدل جذرا و اثنين من العدد لان هذه الثلاثة مناسبة للثلاثة المذكورة فنستخرجه بالطريقة المذكورة يخرج المال اربعة و هو يعدل جذره مع اثنين من العدد فجزره هذا هو المطلوب و جذره اثنان و هو يعدل واحدا مع جزءى جذره و كذلك ان قيل مال و جذراه يعدل واحدا و جزءى جذر يكون فى قوة كعب و مالان يعدل جذرا و اثنين فنستخرج ضلع المكعب كما بيناه بالقطع المخروطية فيكون مربع ذلك الضلع هو المال المطلوب و كذلك ان قيل جذر و اثنان من العدد و عشرة اجزاء جذر يعدل عشرين جزء مال فيكون فى قوة كعب و مالان و عشرة اجزاء يعدل عشرين عددا فنستخرج ضلع المكعب بالطريق

المخروطی فیکون هو الجذر المطلوب [§۱۰۱۵۰۶۰۳] و بالجملة فكل اربع مراتب متوالية من هذه المراتب السبع يكون حکمها فی حکم الاصناف الخمسة و العشرين المذكورة فاذا تعدى الى خمس مراتب او ست مراتب او سبع مراتب فان ذلك لا يمكن ان يستخرج بوجه من الوجوه مثاله اذا قيل مال و جذران يعدل اثنين من العدد و جزءى مال فان هذا لا يمكن ان يستخرج لان المال هو الثانى و جزء المال هو السادس فقد تعدى الى خمس مراتب فقس عليه سائره

[§۱۰۱۵۰۷] فجميع الاصناف المفردة بين هذه السبع المراتب احدا و عشرين منها اثنان لا يمكن ان يستخرج بطريقنا بل يحتاج فيها الى مقدمة ابن الهيثم فيبقى تسعة عشر صنفا يستخرج بطريقنا. بعضها بخواص الدائرة و بعضها بخواص القطوع و جميع المركبات الثلاثية المتوالية خمسة عشر و يستخرج بخواص الدائرة و جميع المركبات الثلاثية فى كل اربع متوالية اربعة و عشرين و يستخرج بخواص القطوع و جميع المركبات الرباعية بين كل اربع مراتب متوالية ثمانية و عشرين و يستخرج بخواص القطوع فجميع الاصناف الواقعة بين هذه السبع المراتب التى يمكن استخراجها بالطرق التى بينها ستة وثمانين لم يذكر فى كتب المتقدمين منها الا ستة اصناف فمن وقف على هذه المقدمات المذكورة و اتفق له مع ذلك قوة فى الطبع و دربة فى المسائل لم يكذب يخفى عليه من المسائل المعتاصبة على المتقدمين شىء فقد حان لنا ان نختم هذه الرسالة حناهدين لله تعالى و مصلين على انبيائه اجمعين *

[§۱۰۱۱۰۱] هذا و قد حكى لى بعض من شدا شيئا نذرا من الهندسة بعد

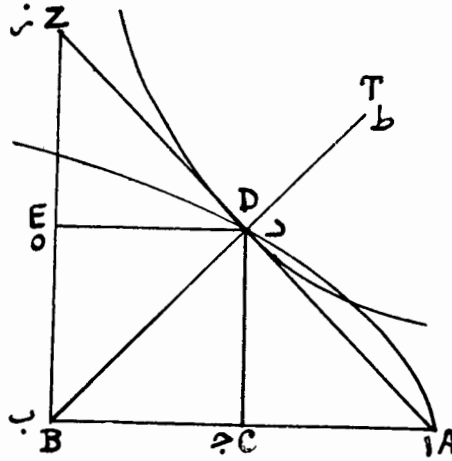
(*) عبارت « فقد حان . . . اجمعين » در نسخه‌ی C (۴۰۳۰۲۰۱ §) با اندک تفاوتی در محلی که در ذیل صفحه‌ی ۴۸ کتاب حاضر نشان داده‌ام ضبط شده . بعلاوه ترتیب بقیه‌ی کتاب در نسخه‌ی C با متن حاضر (که همان متن ویکه است) متفاوت میباشد ، بدین معنی که در نسخه‌ی C توضیح خطای ابوالجود (از آغاز § ۱۰۱۱۰۲ متن حاضر تا عبارت « بحسب ماقد بینا لك » در آخر § ۱۰۱۱۰۲۰۱ همین متن) بلافاصله بعد از عبارت « لم يكذب يخفى . . . على المتقدمين » مذکور درسطورشانزدهم و هفدهم صفحه‌ی حاضر ضبط شده و سپس شرح کار ابوالجود (از عبارت « هذا و قد » که آغاز § ۱۰۱۱۰۱ متن حاضر است تا عبارت « فى كل حال » که پایان همین § است) .

تألفى هذه الرسالة بخمس سنين ان لابي الجود محمد بن الليث المهندس رحمه الله
 كلاما فى تعديد هذه الاصناف و تحليل اكثرها الى القطوع المخروطية من غير
 استيفاء جميع انواعها. و تمييز الممكن من المستحيل بل بحسب ما تأدى به
 النظر فى المسائل الجزئية اليها فلم استبعد ذلك لان هذين الصنفين الذين نسبتهما
 الى واحد ممن تقدمنا منسوبان اليه و قد تصفحهما فى جملة تصنيفات ابي الجود
 بخط الحازمى الخوارزمى و احدهما من الثلاثيات و هو مكعب و عدد يعدل
 اموالا و له انواع و لانواعه شرائط كما هو مذكور فى هذه الرسالة و لم يستوف
 شرائطها ثم ابطال فى حكمه ايضا فى هذا الصنف بقوله ان كان ضلع المكعب
 المساوى للعدد اعظم من نصف عدة الاموال استحالت المسئلة و ليس كذلك كما
 بيناه و ذلك بسبب انه لم يتفطن لتماس القطعين او لتقاطعهما فى ذلك الجانب
 الآخر و الثانى من الرباعيات و هو مكعب و عدد و اضلاع تعدل اموالا فلعمري
 انه قد احسن فى الوقوف على هذه المسئلة بعد ما اعيت جماعة من المهندسين لكنه
 مسئلته جزئية و للصف انواع و شرائط فان فى مسائله ما يستحيل فلم يستوفها
 حق الاستيفاء و انما ذكرت هذا ليقابل من يصل اليه الرسالتان ان كان ما حكى
 لى من حال هذا الفاضل حقا بين رسالتى هذه و المنسوبة الى هذا الفاضل فانى
 اظن لم آل جهدا فى الاستيفاء مع الانجاز و تجنب التطويل المبرم و لو شئت
 لأتيت بمثال لكل واحد من هذه الاصناف و انواعها لكنى خشيت التطويل
 فاقترعت على هذه القوائين الكلية تعويلا على ذهن المتعلم لان من يكون ذهنه
 بحيث يتصور هذه الرسالة لا يقصر عما يرومه من الامثلة الجزئية و استقرارها و
 الله الموفق للصواب و عليه المعول فى كل حال

[١٠١١٠٢] و بعد فان واحدا من اصحابنا اقترح علينا ان نبين خطأ ابي

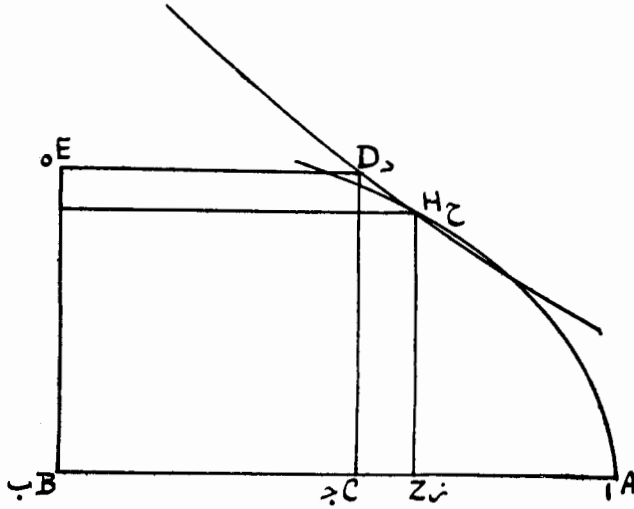
الجود محمد بن الليث فى الصنف الخامس من الاصناف الستة الثلاثية التى تنحل
 بالقطوع و هو مكعب و عدد يعدل اموالا قال ابو الجود نضع عدة الاموال خط اب
 ونفصل منه ضلع مكعب مساو للعدد و هو بـجـ فخط بـجـ اما ان يكون مثل جـ او

اعظم منه او اصغر قال اذا كان مثل $بج$ فانا نتمم سطح $ج$ ه و نعمل على $د$ قطعاً زائداً لا يلقاه $اب$ به ونعمل قطعاً مكافياً رأسه نقطة $ا$ و سهمه $اب$ و ضلعه القائم



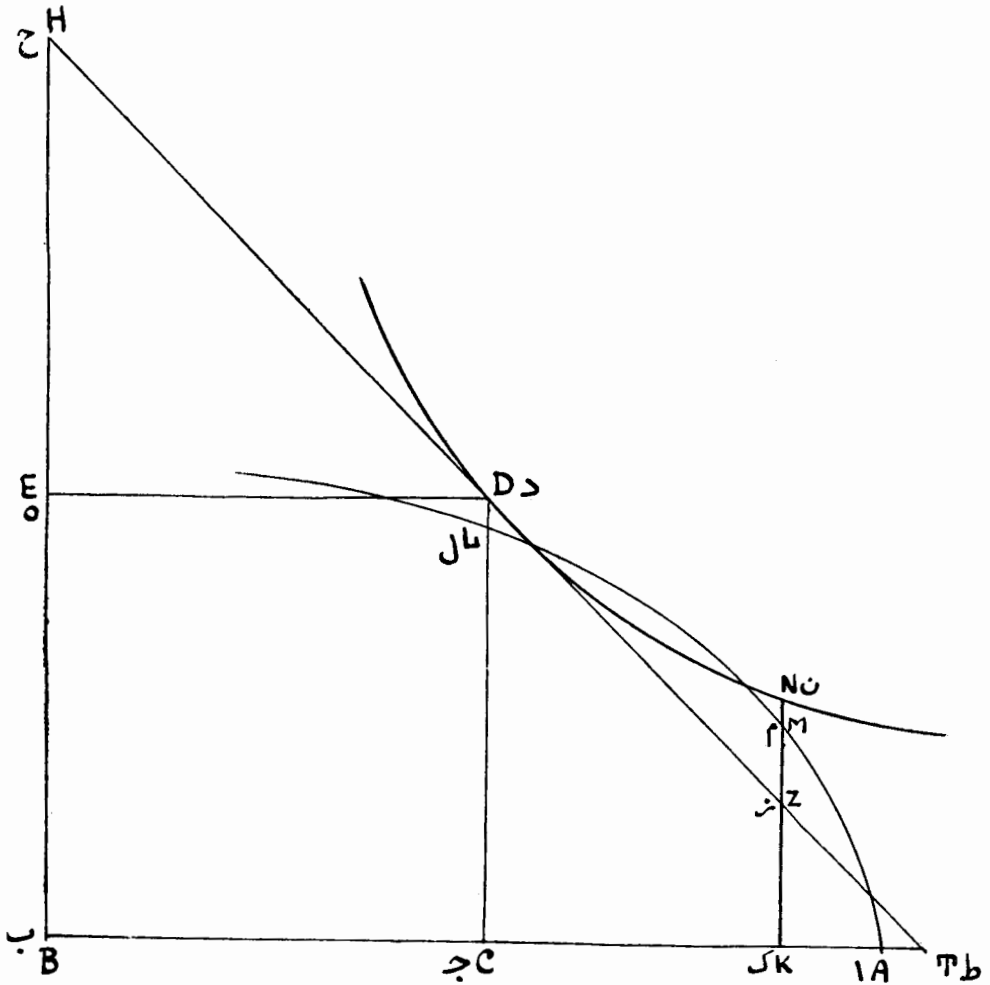
$بج$ فيمر القطع لامحالة على نقطة $د$ كما بيناه ثم زعم ان القطعين يتماسان على نقطة $د$ و اخطأ لانه يجب ان يكونا متقاطعين برهانه انا نجعل $بز$ مثل $با$ و نصل $از$ فهو يمر على $د$ لامحالة و يكون في داخل القطع المكافى و يكون زاوية $ادب$ قائمة و زاوية $ابد$ مثل زاوية $زبد$ و معلوم ان سهم القطع الزائد يقسم الزاوية المحيطة بالقطع بنصفين فيجب ان يكون خط $بد$ سهم القطع الزائد الذى على $د$ و خط $اد$ مواز لخطوط الترتيب فهو يماس القطع الزائد فيلزم ان يكون المكافى قطعاً للزائد لا يجوز ان يكون بينه و بين الخط المماس له لانه لو كان مماساً له لكنت الخطوط الخارجة من نقطه $د$ الى اية نقطة فرضت على محيط $اد$ واقعة بين القطع و بين الخط المماس له و ذلك محال فباضطرار ان يكون المكافى يقطع الزائد على نقطة أخرى فيما بين $ا$ و $د$ و ذلك ما اردنا ان نبين فهذا وجه خطأ هذا الفاضل فى قوله ان القطعين يجب ان يكونا متماسين على $د$ و اما قوله اذا كان $بج$ اعظم من $جا$ فان المسئلة مستحيلة و ذلك لان القطعين لا يتلاقيان كلام باطل بل يجوز ان يتلاقيا بالتقاطع او بالتماس على نقطة او نقطتين فيما بين $ا$ و $د$

كما بيناه هناك و عليه برهان اعم مما ذكرناه فليكن عدة الاموال اب و ضلع المكعب بـج و هو اعظم من نصف اب و تتم جه و تعمل القطعين كما قد عرفته و ليكن اب عشرة و زب ستة فيكون ضرب مربعه في زا مائة و اربعة و اربعين و هو العدد و ضلعه بـج و لا مجاله ان بـج اعظم من خمسة لان مكعب خمسة مائة و خمسة



و عشرين فالمجسم الذي قاعدته مربع زب و ارتفاعه زا مثل مكعب بـج فقاعدتاها اذن مكافيتان لارتفاعيهما اعني يكون نسبة مربع زب الى مربع بـج كنسبة بـج الى زا و نخرج من ز عمودا يقطع القطع الزائد على نقطة ح و تتم حب فسطح حب مثل جه فاضلاعهما متكافية اعني نسبة زب الى بـج كنسبة بـج الى زح فيكون نسبة مربع زب الى مربع بـج كنسبة زب الى زح و قد كانت تلك النسبة مثل نسبة بـج الى زا فنسبة زب الى زح كنسبة بـج الى زا و بالتبديل كذلك فالخطوط الاربعة متوالية زب بـج زح زا فيكون مربع زح مثل ضرب بـج في زا و بـج هو الضلع القائم للقطع المكافى الذى سهمه اب و رأسه ا فيكون زح من خطوط الترتيب فنقطة ح اذن على محيط المكافى لا محالة و قد كانت على محيط الزائد فهما اذن متلاقيان فقد ظهر خطأ ابى الجود فى قوله ان

القطعين لا يتلاقيان و ذلك المراد ولكي يكون اظهر فانا نضع اب ثمانين و بجد الذي هو ضلع المكعب المساوي للعدد احدا واربعين و هو اعظم من اح فنقطه د تقع من خارج القطع المكافئ فليمر المكافئ على ل فيكون خط لجد جذر ألف و خمس مائة وتسعة و تسعين و هو اربعون الا شيئا يسيرا و نجعل طجد مثل جب و يح مثل بط و نصل طح فهو يماس القطع الزائد كما بيناه و نفصل اك ربع اجد و نخرج منة عمودا يقطع القطع على نقطة م فيكون نسبة مربع لجد الى مربع كم كنسبة



اج الى اك لانهما خطان من خطوط ترتيب المكافى و قد بينه ابلونيوس فى شكل بيطآ من مقالة آ فيكون كم نصف لجد و هو عشرون الا شيئاً يسيرا و جط احدا و اربعين و اك تسعة و ثلاثة ارباع و اط اثنان فيكون خط كز احد عشر و ثلاثة ارباع لان نسبة كز الى كط كنسبة حب الى بيط و هما متساويان فخط زم يكون اعظم من ثمانية و هو فى داخل الخط المماس للزائد فهو فى هذا الوضع يكون فى داخل القطع الزائد لا محالة نعم قد يكون القطعان غير متلاقيين اذا كان بجد اعظم من جا لكن ذلك غير واجب فى جميع الانواع فقد ابطل ابو الجود فى هذا الحكم فافهمه و لو اردت ان تجد امثلة عديدة لا يمكنك ذلك [§ ١٠١١٠٢٠١] و هذه المسئلة هى اضافة مجسم الى خط مفروض ينقص عن تمامه مكعبا و يكون مساويا لمجسم آخر مفروض فان كان ضلع المكعب المساوى للمجسم المساوى مثل نصف الخط او اصغر فان ذلك واجب و ان كان اعظم فانه يمكن ان يقع فيه ما يستحيل بحسب ما بيناه لك * والله الميسر لحل هذه العويصات بمنه و كرمه

تمت الرسالة ظهيرة يوم الاحد الثالث والعشرين

من شهر ربيع الاول سنة ١٠٤١ هـ و الحمد

لله وحده و كفى فسلامه على عباده الذين اصطفى

قسمت دوم

هذه

رسالة

لابى الفتح عمر بن ابراهيم الخيامى

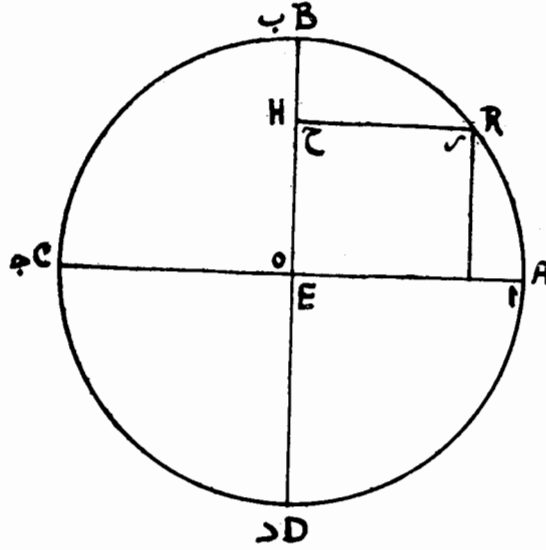
(متن)

بسم الله الرحمن الرحيم و به نستوثق و عليه نستعين

هذه رسالة

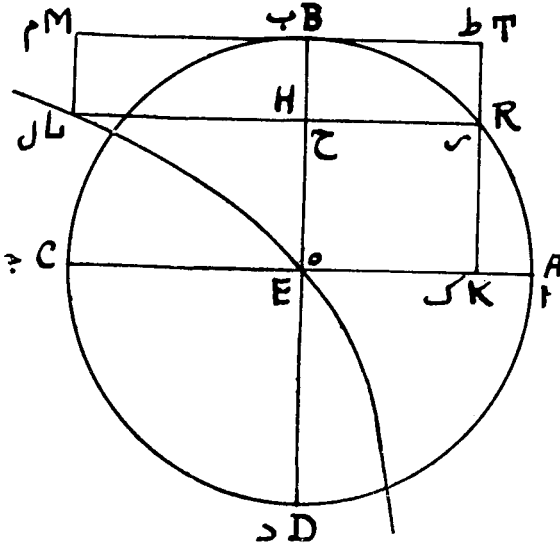
لابي الفتح عمر بن ابراهيم الخيامي

[§ ٢٠١] نريد ان نقسم ربع دائرة اب من دائرة ابجد بقسمتين على نقطة مثل ر و نخرج عمود رح على قطر بـ ج فيكون نسبة اه الى رح كنسبة هـ ح الى ح ب و هـ مركز الدائرة و اه نصف القطر



فانا نزل انا قد فعلنا حتى يؤدي التحليل الى امر معلوم ثم نركب على تلك الصفة فنعيد دائرة ابجد و مركزها هـ و نخرج اج بد يتقاطعان على زوايا قائمه و نخرج عمود رح يكون نسبة اه اليه كنسبة هـ ح الى ح ب و نخرج عمودي كـ ط م و تتم سطح ط ل بعد ان جعلنا خط بـ م مثل اه فلان نسبة اه الى رح كنسبة هـ ح الى ح ب و بـ م مثل اه يكون ضرب بـ م في

ح ب مساويا لضرب ر ح في ه ح كما بينه اقليدس في يو من و الاصول و ضرب
ب م في ح ب مثل سطح ب ل و ضرب ر ح في ه ح مثل سطح ح ك فيكون سطح

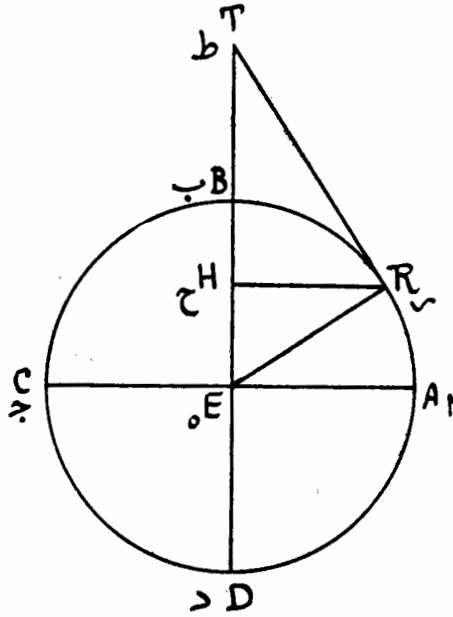


ب ل مساويا لسطح ح ك و نجعل سطح ح ط مشتركا فيكون سطح ط ه مساويا
لسطح ط ل فان عملنا قطعا زائدا لا يلقاه خطا ك ط م و يمر على نقطة ه كما
بينه ابلونيوس في نظ من المقالة الاولى من كتاب المخروطات و الشكل و ه
من المقالة الثانية من هذا الكتاب اذ هذا العمل يتم بهذه الاشكال الثلاثة فان ذلك
القطع الزايد يمر على نقطة ل لا محالة كما يتبين من عكس الشكل الثامن من المقالة
الثانية من كتاب المخروطات و نقطة ه معلومة الوضع و خط ب م معلوم الوضع و
القدر الا ان نقطة ل عند التركيب غير معلومة الوضع لانها لو كانت معلومة الوضع
لكانت نقطة ح معلومة الوضع لان خط ح ل معلوم القدر فيكون خط ب ح معلوم
القدر و لكان الشكل معلوما و كذلك خط ط ك غير معلوم الوضع لانه لو كان معلوم
الوضع لكانت نقطة ط معلومة الوضع و لو كانت نقطة ط معلومة الوضع لكان خط
ط ب معلوم القدر و لو كان خط ط ب معلوم القدر لكان الشكل معلوما و ليس كذلك
اذ المقصود علم الشكل فلو كان نقطة ل معلومة الوضع او خط ط ك معلوم الوضع

لكان يمكن ان يعمل الشكل و ينال المقصود عند التركيب بسهولة و ليس المعرفة بواحدة منها سهلة فحسب * . هذه الطريقة للباحث المستبصر بكتاب المخروطات لا يوصل الى المطلوب بطريقة اخرى امكنه التفتن لهذه الطريقة وانما اوردت هذه الطريقة مع صعوبتها ليكون شبه تمهيد للمتعلم و توطية له و لم اتممها ولم اركبها على الوجه الهندسى لصعوبتها و كثرة افتقارها الى عدة مقدمات و غيره من القطوع المخروطية فليتم من شاء من العالمين بقطوع المخروط بعد ما تحصلت له الطريقة التي اذكرها فانها و ان كانت ايضا مفتقرة الى مقدمات مخروطية فهي اسهل بكثير من الاولى و مقدماتها اعم منفعة

[§ ٢٠٢] فاقول بعون الله نعيد الشكل و ننزل بالتجليل انا قد فعلنا ما

اردنا و صارت نسبة $هـ ا$ الى $رح$ كنسبة $هـ ح$ الى $ح ب$ و نخرج من نقطة $ر$ خطا



يماس الدائرة و هو $رط$ على ما بينه اقليدس في $يو$ من $ج$ و نخرج $هـ ب$ على

(*) در اصل چنین بود .

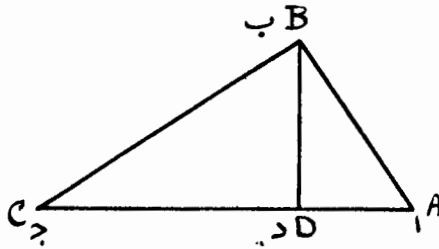
استقامته حتى يقطع الخط المماس على نقطة ط و نصل ره فلان مثلث ه ر ط زاوية ر منه قائمة و خرج من زاوية ر عمود رح الى القاعدة فعلى ما تبين في شكل ح من و يكون نسبة ه ح الى ح ر كنسبة ح ر الى ح ط فيكون مربع ح ر مساويا لضرب ه ح في ح ط و لكن مربع ح ر مساو لضرب د ح في ح ب فيكون ضرب د ح في ح ب مساويا لضرب ه ح في ح ط فيكون نسبة ح د الى ه ح كنسبة ح ط الى ح ب على ما تبين في يو من و بالتفضيل يكون نسبة ه د الى ه ح كنسبة ب ط الى ب ح و قد كانت نسبة ا ه الى رح كنسبة ه ح الى ح ب بالتبديلين يكون نسبة ا ه الى ه ح كنسبة رح الى ح ب و قد كانت نسبة د ه الى ه ح كنسبة ب ط الى ب ح فيكون نسبة رح الى ح ب كنسبة ب ط الى ح ب و المقادير التي نسبتها الى شيء واحد بعينه متساوية فانها ايضا متساوية كما تبين في شكل ط من مقالة ه فيكون رح مساويا لب ط و ره مثل ه ب فيكون مجموع ه ر رح مساويا لخط ه ط فقد ادى التحليل الى مثلث قائم الزاوية بشرط ان يكون وتر الزاوية القائمة مساويا لاحد الضلعين المحيطين بالزاوية مجموعا الى العمود الخارج منها الى وترها فكلما عملنا مثلثا قائم الزاوية بهذه الصفة امكنا تركيب هذا الشكل على الوجه الهندسى و ان هذه المقدمة اعنى هذا المثلث بهذه الصفة عظيمة المنفعة في امثال هذه الاشكال و له خواص اخرى يذكر بعضها حتى يتفطن الناظر لمنفعتها في اكثر اشياء هذه المسئلة

[§ ٢٠٣٠١] اقول ان هذا المثلث لا يمكن ان يكون متساوى الساقين لانه لو كان ضلع ه ر مثل رط لكان ه ح مثل ح ط و لكان العمود مساويا لكل واحد منهما و لكان ه ط ضعف العمود و لكان مجموع ه ر والعمود اعظم من الوتر و قد فرضناه مساويا له هذا خلف [§ ٢٠٣٠٢] و اقول ان ه ر اصغر من رط لانه لو كان اعظم منه لكان ه ح اعظم من ح ط و لكان ح ر الذى هو الخط الوسط بين خطى ه ح ط اعظم من ح ط و قد فرض ح ر مثل ط ب فيكون ط ب اعظم من ط ح

الجزء اعظم من الكل هذا محال فقد تبين ان المثلث على هذه الصفة يكون الضلع الاصغر مع العمود مساويا لضلع الاعظم و ذلك ما اردنا ان نبين

[§ ٢٠٣٠٣] و من خواصه ان الضلع الاعظم من الضلعين المحيطين بالزاوية القائمة مساو لمجموع الاصغر مع القطعة التي يفرزها العمود من الوتر من جانب الضلع الاصغر و ليكن مثلنا من الشكل المتقدم اقول ان مجموع $هـ ر هـ ح$ مساو لضلع $ر ط$ برهانه ان نسبة $هـ د$ الى $هـ ح$ كنسبة $ط ب$ الى $ب ح$ فبالتركيب يكون نسبة $د ح$ الى $هـ ح$ كنسبة $ط ح$ الى $ح ب$ و بالتبديل يكون نسبة $د ح$ الى $ح ط$ كنسبة $هـ ح$ الى $ح ب$ ولكن نسبة $هـ ح$ الى $ح ب$ كنسبة $هـ ر$ الى $ر ح$ و نسبة $هـ ر$ الى $ر ح$ كنسبة $ر ط$ الى $ح ط$ لتشابه مثلثي $هـ ر ح$ و $ر ح ط$ فيكون نسبة $ر ط$ الى $ح ط$ كنسبة $د ح$ الى $ح ط$ فيكون $ر ط$ مساويا لـ $د ح$ و $د هـ$ مثل مجموع $هـ ر ح$ مثل $ر ط$ و ذلك ما اردنا ان نبين

[§ ٢٠٣٠٤] و من بعد ما تقدم هذا فاننا نضع مثلث $ا ب ج$ و زاوية $ب$ منه قائمة و نخرج من نقطة $ب$ عمود $ب د$ على $ا ج$ و لننزل بالفرض ان ضلع $ا ب$ مع عمود $ب د$ جميعا مثل $ا ج$ حتى يؤدي التحليل الى معلوم ثم نركبه حتى يحصل لنا مثلث بالصفة المذكورة و لكن نكون مقتدين بالمتقدمين الافاضل من



اصحاب الصناعة في تسهيل الطرق الحسية باستعمالهم الفاظ اهل الجبر في امثال هذه المسائل فنستنهج سييلهم في ذلك و ان لم يستعمل الفاظ الجبريين جاز و يكون العمل واحدا الا ان هذه الالفاظ اذا استعملت كان الضرب و القسمة اسهل و نضع

خط اد منطفا في الطول و ليكن عشرة و نضع بد شيئا و نضربه في مثله يكون مالا و نضرب عشرة في مثلها يكون مائة و نجعلها يكون مائة و مال و هو مربع اب كما تبين في مز من آ و من ان نسبة اج الى اب كنسبة اب الى اد لتشابه مثلثي اب ج ابد يكون ضرب اج في اد مساويا لمربع اب فاذا قسمنا مربع اب الذي هو مائة عدد و مال على اد الذي هو عشرة يخرج من القسمة عشرة عدد و عشر مال و هو اج و قد كنا فرضنا ان اج مثل مجموع اب بد فيكون مجموع اب بد عشرة عدد و عشر مال نقصنا منه بد الذي هو الشيء يبقى عشرة عدد و عشر مال الاشياء و هو اب فنضربه في مثله يحصل مائة من العدد و ثلثة اموال و عشر عشر مال مال الاشرين شيئا و الا خمس مكعب يعادل مائة من العدد و مالا فيجبر و يقابل يقاص يبقى مالان و عشر عشر مال مال يعدل عشرين شيئا و خمس مكعب فيقسم الجميع على الشيء ليرجع الى اقل اربعة اجناس على هذه النسبة فيخرج من القسمة عشر عشر مكعب و شيان يعدل خمس مال و عشرين من العدد فيكمل عشر عشر مكعب بان يضرب في مائة و كذلك جميع الاجناس نضربه في مائة فيحصل مكعب و مائتا شبي يعدل عشرين مالا و الفين من العدد فقد ادى التحليل الى معادلة اربعة اجناس و هذا لا يمكن ان يستنبط بالهندسة المسطحة لمكان المكعب و يحتاج فيها الى قطوع المخروطات [§ ٢٠٤٠١] و من قبل ان نخوض في ابانة مطلوبنا بالقطوع نقدم معنى يكون تحريضا للناظر في هذه الرسالة على طلب العلوم و اتقان القدر الذي ننبه عليه و شكرا لنعم الله تعالى على بعض عباده فان التحدث بالنعم شكر عظيم للمنع كما انزل و اما بنعمة ربك فحدث فلا يظن الناظر ان هذا كلام جره الى هذا المقام حب المباهاة فان ذلك من عادات العجزة المتصلفه المعجبه و حق السفلة الاعجاب فان نفوسهم لا تسع الا لتفطن شيء نزر من العلوم فلما ادر كوه ظنوا ان ذلك القدر هو الذي حصر العلوم و جمعها و نعوز بالله من ان يسؤل لنا انفسنا آراء تتخبطنا و تمنعنا عن درك الحقايق و الفوز و النجاة

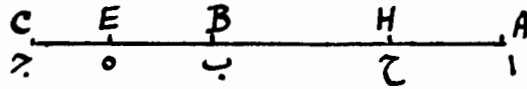
[§ ٢٠٤٠٢] اقول ان هذا الذي يسميه الجبريون مال مال امر موهوم في

المقادير المتصلة ولا وجود لها في الاعيان بوجه من الوجوه وانما يطلق على المقادير المتصلة لفظه مال المال و مال الكعب و كعب الكعب و ماعداها من حيث اطلاق العدد عليها اذا العدد و المقادير يشترك في جنس الكمية على ما يتولى بيانه صاحب العلم الاعلى فاما الامور التي تستعمله الجبريون ولها وجود في الاعيان و المقادير المتصلة اربعة العدد و الشيء و المال و المعكب اما العدد فهو ان يؤخذ العدد مجردا عن جميع المواد في العقل ولا يكون له وجود في الاعيان اذ العدد شيء معقول كلى لا يوجد الا بتشخصا بالمواد و اما الشيء فمنزلة من المقادير المتصلة منزلة الخط المستقيم و اما المال فهو بمنزلة المربع المتساوي الاضلاع القائم الزوايا الذي ضلعه ذلك الخط المستقيم المطلق عليه لفظ الشيء و المكعب هو الجسم الذي يحيط به ستة سطوح مربعة و متساوية و متساوية الاضلاع و قائمة الزوايا الذي ضلعه الخط المستقيم المطلق عليه اسم الشيء و احد سطوحه المربع المطلق عليه اسم المال فهو الحاصل من ضرب الشيء في مثله ثم ضرب المبلغ في الشيء و قد بين عمله اقليدس و برهن عليه في يز من مقالة يج من كتابه في الاصول و اما مال المال الذي هو عند الجبريين حاصل من ضرب المال في مثله فلا معنى له في المقادير المتصلة لان المربع الذي هو سطح كيف يمكن ان يضرب في مثله اذ السطح ما له بعدان و بعدان في بعدين اربعة ابعاد و الجسم لا يمكن ان يكون له اكثر من ثلاثة ابعاد فجميع الاشياء التي يخرج بالجبر انما يخرج من هذه الاربعة الاجناس و من ظن من الناس ان الجبر حيلة فسي استخراج الاعداد المجهولة فقد ظن محالا فلا تلتفت الى الظاهرين المختلفين بل الجبر و المقابلة امور هندسية برهن عليها في مقالة ب من الاصول في شكله و زمانه [§٢٠٤٠٢٠١]

و اما من قال مال مال و ثلثة اموال يعدل ثمانية و عشرين من العدد فنصف الاموال و ضربه في مثله و زاده العدد و اخذ جذر المبلغ فكان خمسة و نصف و نقص منه نصف ما لاموال فبقي اربعة و هو المال و مال المال ستة عشر ثم ظن ان مال المال استنبط بطريق الجبر فهو ضعيف الظن جدا لانه لم يستنبط مال المال بل استنبط

المال فكانه مال و ثلاثة اجذار يعدل ثمانية و عشرين ثم استخراج الجذر بالمقالة الثانية و صادر على ان ذلك الجذر مال مال و هذا سر تطلع منه على اسرار [§٢٠٤٠٣] و نرجع الى ما كنا فيه نقول ان الثلاثة الاجناس الاول اعنى الاعداد و الجذور و الاموال عند المعادلة ترجع الى ست شعب ثلثة مفردة و ثلثة مقترنه و يمكن ان يعلم مجهولاته بالمقالة الثانية على ما هو مذکور مشروح في كتب الجبرين و اما اذا نظر في المكعب و عودل بينه و بين سايره احتيج حينئذ الى المجسمات وخاصة المخروطات و قطوعها لكون المكعب مجسما اما مفرداته فتلاثة مكعب يعدل الاموال و هو الجذور يعدل الاعداد و مكعب يعدل الجذور و هو اموال يعدل الاعداد و مكعب يعدل الاعداد و لا سبيل الى استنباطه الا بالطرق العددية المعدة لاستخراج الكعاب و اما بالطرق الهندسية التي يعمل فيها مجسم متوازي السطوح مساويا لمجسم آخر متوازي السطوح مفروض و يفتقر في امثال هذه الاعمال الى قطوع المخروط باضطرار او الى آلات عند من لا يعرف المخروطات و اما مقترناته فهي صنفان اما ثلاثي و اما رباعي **فالثلاثي مكعب و اموال يعدل اعدادا و لا يخرج الا بالقطوع و مكعب و اموال يعدل جنورا و يكون حكمه حكم مال و جذور يعدل اعدادا و مكعب و اعداد يعدل جنورا و لا يخرج الا بالقطوع و مكعب و اعداد يعدل اموالا و لا يخرج الا بالقطوع و مكعب و جنور يعدل اعدادا و لا يخرج الا بالقطوع و مكعب و جنور يعدل اموالا و يكون حكمه حكم مال و عدد يعدل جذرا و اموال و جذور يعدل مكعبا و يكون حكمه حكم جنور و اعداد يعدل مالا و اموال و اعداد يعدل مكعبا و لا يخرج الا بالقطوع و جذور و اعداد يعدل مكعبا و لا يخرج الا بالقطوع فهذه تسعة انواع ثلاثية ثلثة منها يخرج بثانية الاسطوانات و ستة منها لا يخرج الا بقطوع المخروط و اما **الرباعي مكعب يعدل اموالا و جذورا و اعدادا مكعب و جنور و اعداد يعدل اموالا مكعب و اموال و اعداد يعدل جنورا مكعب و اموال و جذور يعدل اعدادا مكعب و مال يعدل جنورا و اعدادا مكعب و جذور يعدل اموالا و اعدادا مكعب و اعداد يعدل اموالا و جذورا****

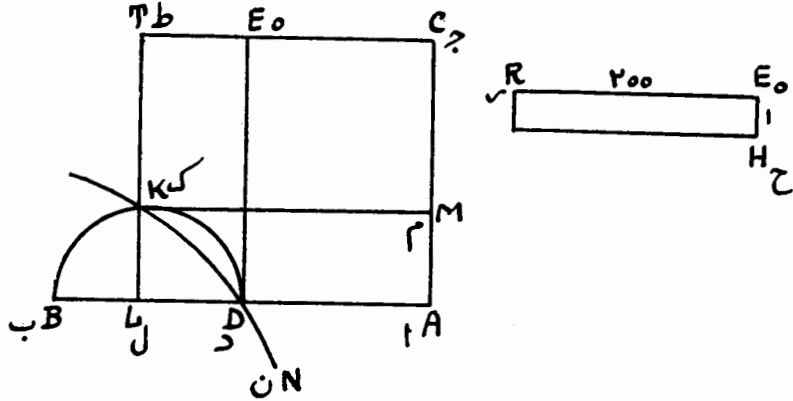
فهذه سبعة انواع رباعية لا يخرج شيء منها الا بقطع المخروطات فقد حصل من المركبات ثلثة عشر نوعا لا يخرج الا بقطع المخروط و نوع من المفردات الا بقطع المخروط و هو مكعب يعدل اعدادا [§٢٠٤٠٤] و اما المتقدمون الرياضيون من غير اهل لساننا فلم ينبهوا على شيء من هذا ولم يصل اليها ولم ينقل الى لساننا و اما المتأخرون من اهل لساننا فاول من اضطر الى صنف ثلاثي من هذه الاصناف الاربعة عشر هو الماهاني المهندس فانه كان بحل المقدمة التي اخذها ارشميدس مسلمة في شكل د من مقالة ب من كتاب الكرة و الاسطوانة و هي هذا الذي ذكره قال ارشميدس ان خطي اب ب ج معلوما القدر و متصلان على استقامة و نسبة ب ج الى ب ه معلومة فيكون ج ه معلوما على ما تبين في المعطيات ثم قال و نجعل نسبة ح ج الى ج ه كنسبة مربع اب الى مربع اح و لم يقل كيف نعلم هذا لان هذا محتاج الى قطع المخروط باضطرار ولم يورد في الكتاب شيئا مبنيا على



القطع الا هذا فاخذ هذا ايضا مسلما و الشكل الرابع هو في قسمة الكرة بسطح مستو على نسبة معلومة و كان الماهاني يستعمل الفاظ الجبريين للتسهيل فلما ادى التحليل الى اعداد و اموال و كعاب متعادلة و لم يمكنه ان يستخرجه بقطع المخروطات جزم القول بان هذا ممتنع فهذا الفاضل مع فضله و تقدمه في هذه الصناعة استبهم عليه حل صنف من هذه الاصناف حتى نبغ ابو جعفر الخازن و تنبه على طريقة و اتي به في رسالة و ابونصر بن عراق مولى امير المؤمنين من اهل خوارزم كان بحل المقدمة التي اخذها ارشميدس في استخراج ضلع المسبع في الدائرة و هي المربع بتلك الصفة المذكورة و كان يستعمل الفاظ الجبريين فادى التحليل الى مكعب و اموال يعدل اعدادا فاستخرجه بالقطع و هذا الرجل لعمرى كان من معالي الطبقة في الرياضيات و المسئلة التي اعجزت ابا سهل الكوهي و ابا الوفاء

البوزجاني و ابا حامد الصفاني و جماعة من اصحابهم الذين كانوا منقطعين الى جناب
عضدالدوله بمدينة السلم هي هذه عشرة قسمتها قسمين فكان مجموع مربعيها مع
الخارج من قسمة الكثير على القليل اثنين و سبعين عددا و كان يؤدي التحليل الى
اموال يعدل مكعبا و جذورا و اعدادا و هولاء الافضل كانوا متحيرين في هذه المسئلة
مدة مديدة حتى استخرجها ابوالجود و خزنها في دارالكتب الملوك السامانية
فهذه ثلاثة اصناف اثنان منها ثلاثيان و واحد رباعي من المركبات و المفردة الواحدة
اعنى المكعب الذي يعدل الاعداد فانها قد استخرجها من تقدمنا من الافضل و لم
يصل اليها منهم كلام في العشر البواقي و لافي هذا التفصيل فان تراحت المدة و
صحبني التوفيق اودعت هذه الاصناف الاربعة عشر بجميع شعبها و فروعها و تمييز
الممكن منها من الممتنع فان بعض اصنافه مفتر الى شرايط حتى يصح رسالة
شاملة على عدة مقدمات لها عظمة المنفعة في اصول هذه الصناعة معتصما بجبل التوفيق
من الله و متوكلا عليه انه المستعان على جميع الامور و به الحول و القوة جلت عظمته
[٢٠٥ §] و نرجع الى مسألتنا هذه بعد تمهيد هذه المقدمات و هي طلب مكعب
يكون مع مائتين ضلعه عدديلا لعشرين مربع ضلعه مع الفين من العدد نضع خط ab
مساويا لعدد المربعات و هو عشرون و خط bc مائتان و خط cd واحدا فيكون سطح
 $abcd$ مائتين و نجعل مربعا مساويا لسطح $abcd$ على ما تبين في شكل يد من مقالة ب
و ليكن ضلع ذلك المربع مثل ae و af عمود على ab و هو جذر مائتين و ad هو
خارج القسمة اذا قسم العدد على عدد الجذور و هو عشرة لان العدد الفان و عدد
الجذور مائتان و اذا قسم الالفان على مائتين يخرج عشرة و db ايضا عشرة و نعمل
على db نصف دائرة de و نخرج de يوازي af و تتم سطح $afde$ و نعمل قطعا زائدا
يمر على نقطة e و لا يلقى خطي af و de كما بينه ابلونيوس الفاضل في الشكل $نط$
من المقالة الاولى من كتاب المخروطات و الشكل $هـ$ و من المقالة الثانية من ذلك
الكتاب ان هذا العمل لا يتم الا بهذه الاشكال الثلاثة و هو قطع $نذك$ و يقطع
الدائرة على نقطة $ك$ و نخرج من نقطة $ك$ عمود $كز$ على ab فاقول ان ضلع $ال$ هو

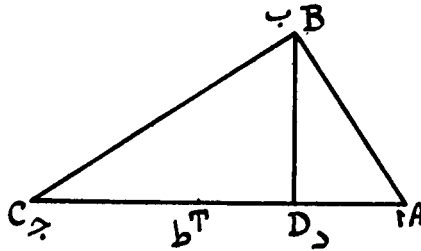
ضلع مكعب يكون مع مائتي ضلعه عدديلا لعشرين مربع ال مع الفين من العدد برهانه
انا نخرج لك على استقامة حتى يقطع خط جه على نقطة ط و نخرج لك يوازي ال
فلان لك ط يوازي ده و لك م يوازي اد يكون سطح اه القائم الزوايا مساويا لسطح
لك ه القائم الزوايا لان نقطتي لك د على محيط قطع زايد لا يلقاه خطا اج حط و قد



خرج من كل واحدة منها خطان الى الخطين اللذين لا يلتقيان موازيين لنظيريهما
الخارجين من النقطة الاخرى و قد برهن تليه ابلونيوس الفاضل في شكل د من مقالة
ب من كتاب المخروطات و دايره ذلك معلومة الوضع لان قطرها الذي هو د ب
معلوم الوضع و القدر و خطا اج حط معلوما الوضع و نقطة د معلومة الوضع فيكون
قطع ن ذلك معلوم الوضع و دايرة ذلك ب معلومة الوضع فيكون نقطة ك معلومة الوضع
و خط لك ل يكون معلوم الوضع فيكون نقطة ل معلومة الوضع و نقطة ا معلومة
الوضع فيكون خط ال معلوم القدر و هذه اشياء ظاهرة من كتاب المعطيات و قد بينا
ان سطح اه مثل سطح لك ه فيلحق م ه المشترك يبقى سطح م د مثل سطح كه و نجعل
سطح دك مشتركا فيكون سطح اك مساويا لسطح دط و هما متساويا الزوايا لان
زواياهم قوائم فيكون اضلاعهما متكافية في النسبة كما بينه اقليدس في الشكل يد
من مقالة و يكون نسبة ال الى ل ط كنسبة دل الى لك فيكون مربعاتها ايضا
متناسبة و نسبة مربع ال الى مربع ل ط كنسبة مربع دل الى مربع لك و نسبة دل

الى لك كنسبة لك الى لب فيكون نسبة مربع دل الى مربع لك كنسبة دل الى لب فيلزم ان يكون نسبة مربع ال الى مربع ل ط كنسبة دل الى لب فيكون ضرب مربع ال في خط لب مساويا لضرب مربع ل ط في خط دل و نجعل ضرب مربع ل ط في اد مشتركا فيكون ضرب مربع ل ط في ال مساويا لضرب مربع ل ط في اد و ضرب مربع ال في لب و ضرب مربع ل ط في ال مساويا للعدد كما قدمنا و هو الفان فيكون الفان من العدد و ضرب مربع ال في لب مساويا لمائتي ضلع المكعب و نجعل مكعب ال الذي هو ضرب مربع ال في ال مشتركا فيكون مكعب ال [مع مائتين ال] مساويا لالفين من العدد مع ضرب مربع ال في ال و ضرب مربع ال في لب و ضرب مربع ال في ال مع ضرب مربع ال في لب هو مساويا لضرب مربع ال في اب و اب قد فرضناه عشرين ف ضرب مربع ال في اب هو عشرين مربع ال فيكون مكعب ال مع مائتين خط ال مساويا لالفين من العدد مع عشرين مربع ضلع المكعب و ذلك ما اردنا ان نبين

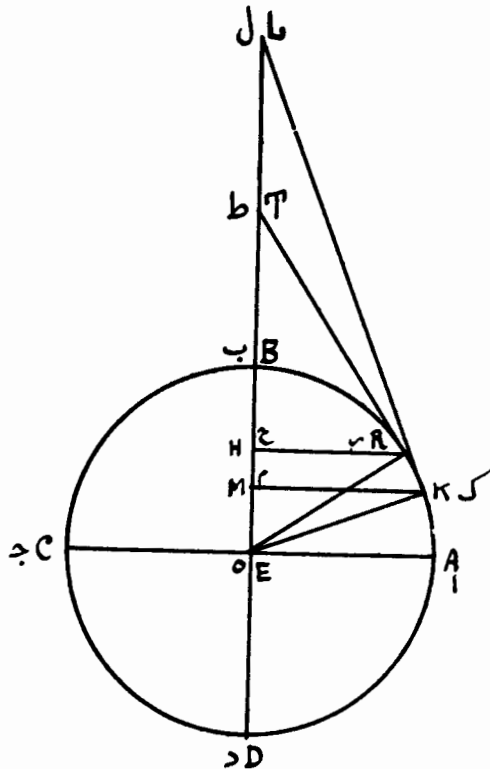
[§ ٢٠٥٠١] و من بعد ما تقدم هذا فانا نعيد مثلث اب ج و نضع اد منطفا و هو عشرة يكون دب هو خط ال الذي برهنا على انه معلوم القدر و لست اعنى بقولي معلوم القدر انه معلوم الكمية فان بينهما فرق بل اعنى بقولي معلوم القدر ما اعنى به اقليدس في كتاب المعطيات و هو الذي يمكن ان يوجد مقدار مساو له وبالتركيب



نضع خط اد عشره و نضع بد قائما على خط اد على زوايا قائمه و مساويا لخط ال

من الشكل المتقدم و نصل اب و نقيم على نقطة ب عمود ب ج و نخرج اد على استقامته حتى يقطع العمود على نقطة ج فباضطرار يجب ان يكون مثلث اب ج قائم الزاوية اعنى زاوية ب منه قائمة و يكون خط اب مع عمود بد مساويا لوتر ا ج و خط اب مع خط اد مساويا لخط ب ج و ذلك ما اردنا ان نبين

[§ ٢٠٦] و نعيد ربع دائرة اب من دائرة اب ج د و نخرج فيها قطري ا ج بد يتقاطعان على زوايا قائمة و مركز الدائرة نقطة ه و نفصل من خط ج د مثلث اب ج في الشكل المتقدم خط ح ط مساويا لعمود بد و نقسم نصف قطر الدائرة الذي هو خط ه ب من هذا الشكل على نسبة اد الى د ط من مثلث اب ج المتقدم كما



بينه اقليدس في شكل ب ج د من مقاله و على نقطة ح و نخرج عمود ح ر و نصل ه ر و

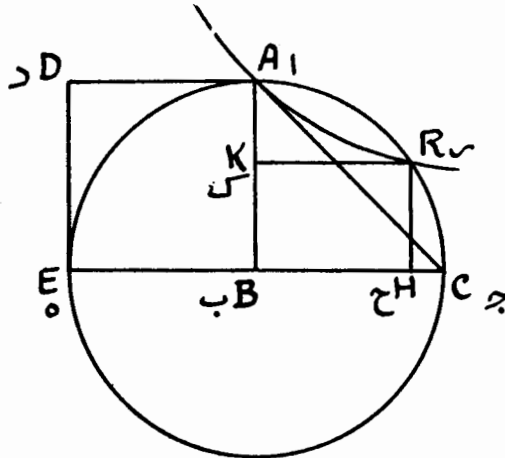
نخرج من نقطة ر خطا يماس الدائرة و هو خط رط و نخرج ه ب على استقامة الى ان يقطع خط رط على نقطة ط فيكون مثلث ه ر ط شبيها بمثلث ا ب ج من الشكل المتقدم برهانه ان زاوية ره ح مساوية لزاوية با ج فان لم يكن فليكن احديهما اعظم مثل با ج فنقيم على نقطة ه من خط ه ب زاوية مثل زاوية با ج و هي كه ب و نخرج من نقطة ك خطا يماس الدائرة و هو كل يقطع ه ط على نقطة ل فيكون مثلث ه كل شبيها بمثلث ا ب ج لان زواياهما متساوية و نخرج من نقطة ك عمود كم على ه ب فيكون ه ك كم جميعا مساويا لخط ه ل و ه ب مثل ه ك يكون بل مثل كم و نسبة ل م الى كم كنسبة جد الى دب فيكون نسبة م ل الى ل ب كنسبة د ج الى بد و بالتفضيل يكون نسبة ب م الى بل كنسبة د ط الى ط ج و نسبة ط ج الى ج د مثل دب الى دا كنسبة بل الى الب الذي هو مثل كم الى م ه كنسبة ه ح الى ح ب كنسبة ا د الى م ب كنسبة ا د الى د ط و قد كنا جعلنا نسبة ه ح الى ح ب كنسبة ا د الى د ط فيكون نسبة م ه الى م ب كنسبة ه ح الى ح ب و م ه الاول اصغر من ه ح الثالث يلزم ان يكون م ب الثاني اصغر من ح ب الرابع على ما تبين في خامسة الاصول في شكل يد منها الا انه اعظم هذا محال فليست زاوية ره ح باصغر من زاوية با ج من مثلث ا ب ج المتقدم و لا اكبر منها فيكون مثلث ه ر ط شبيها بمثلث ا ب ج المتقدم فيكون ه ر ح جميعا مثل ه ط فيكون ب ط مثل ر ح و ضرب د ح في ح ب مثل مربع ح ر و كذلك ضرب ه ح في ح ط مساويا لمربع ح ر فيكون ضرب د ح في ح ب مثل ضرب ه ح في ح ط فيكون الخطوط الاربعة متناسبة على تبين في شكل يو من مقالة و فنسبة د ح الاول الى ح ه الثاني كنسبة ح ط الثالث الى ح ب الرابع و بالتفضيل يكون نسبة د ه الى د ح كنسبة ب ط الى ب ح و د ه مثل ا ه و ب ط مثل ر ح فيكون نسبة ا ه الى ه ح كنسبة ر ح الى ح ب و بالتبديل يكون نسبة ا ه الى ر ح كنسبة ه ح الى ح ب فقد قسمنا ربع دائرة بقسمين على نقطه ر و اخرجنا منها عمود ر ح حتى صارت نسبة ا ه الذي هو نصف القطر الى ر ح كنسبة ه ح الى ح ب و ذلك ما اردنا ان تبين

[§ ٢٠٧] ومن اراد ان يعلم بالحساب فلا سبيل اليه اذا حاول التحقيق فان الاشياء التى يستخرج بقطوع المخروطات لا يمكن فيها ان يحلل الى الحساب و ان قنع بالتخمين فعليه بجداول الاوتار من كتاب المجسطى او جداول الجيوب و السهام من زيچ معتمد و يطلب فيه قوسا يكون نسبة ستين الذى هو نصف قطر الدائرة فرضا الى جيبها كنسبة جيب تمامها الى سهمها و نجد ذلك القوس قريبة من نرّ درجة بالاجزاء التى بها الدائرة شسّ و جيبها قريب من نّ جزوا و سهمها قريب من كزّ جزوا و ثلث جزء و جيب تمامها قريب من اثنين و ثلثين جزوا و ثلثي جزوا و يمكن ان يبالح فى التدقيق حتى يقل التفاوت بحيث لا يحس فهذا هو الذى سنح فى هذا المعنى مع تقسم الفكر و توزع الخاطر و اقتتان الاشغال العايقة عن امثال هذه الجزئيات ولولا شرف المجلس دام شرفه و حق السائل ادام الله تأييده لكنك عنها فى منحرف واسع از عنايتى مقصورة على ما هو اهم من امثال هذه عندى و همتى مصروفة اليه و الله تعالى المحمود و المشكور على كل حال و المأمول منه ان يوفق للخيرات انه ولى الاجابة - تمت الرسالة و الصلوة على خاتم الرسالة

مسئلة

ربع دائرة $اج$ مفروض على مركز $ب$ ونريد ان نقسم $اب$ بقسمين كما قد عرفته

فانا نعمل على $اب$ مربعا متساوي الاضلاع والزوايا وهو $اه$ فيكون خطا $به$ $هـ د$ معلومي الوضع و نقطة $ا$ معلومة الوضع فنعمل على نقطة $ا$ قطعاً زايدا لابقاه خطا $به$ $هـ د$ و هو قطع $اد$ فيكون معلوم الوضع ونصل $اج$ فهو لا محالة



يكون مماسا للقطع وهو في داخل الدائرة فيلزم ان يقطع القطع الزايد الدائرة فليقطعها على نقطه $ر$ و نخرج عمودي $رح$ فاقول قد تم العمل برهانه ان نقطتي $ا$ $ر$ على محيط القطع وقد اخرج من كل واحد منها خطان الى القطع موازيان للآخرين فيكون سطح $ره$ مساويا لسطح $اه$ و تلقى $كه$ المشترك يبقى $لح$ مثل $كد$ و هما سطحان متساويا الزوايا فيكون اضلاعهما متكافيه نسبة $اد$ الى $كر$ كنسبة $بك$ الى $كا$ تمت *

(٢٦) در اصل شكل نداشت . رجوع كنيد به آخر قسمت ششم .

قسمت سوم
نظر اجمالی به
تاریخ علم جبر
از ایام قدیم تا زمان خیام



کتابخانہ قومی

قسمت سوم

نظر اجمالی به تاریخ علم جبر از ایام قدیم تا زمان خیام

۳۰۱ - § ملاحظات کلی و مقدماتی

۳۰۱۰۱ § مقدمه - در دیباچه‌ی کتاب گفتیم که برای دریافتن ارزش کارهای جبری خیام باید لااقل اجمالا نظری به تاریخ بسط علم جبر و مبانی و مقدمات آن افکند. همین مطلب در این قسمت به خوانندگان عرضه می‌شود.

تاریخچه‌ای که در این قسمت می‌آید، آنچه خارج از دوره‌ی نهضت علمی اسلامی است، تقریباً محدود است به سرزمینهایی که دانش آنها مستقیماً در بسط علوم ریاضی و خاصه علم جبر درین دوره مؤثر بوده است، و آن در درجه‌ی اول یونان و بعد هند می‌باشد. پس، اگر در صفحات آتیه از مصر قدیم و چین و غیره سخنی بمیان آید بیش از مطالب دیگر مجمل خواهد بود، و ذکر آنها فقط به منظور توطئه‌ی زمینه‌ی نسبتاً جامعی است و بس.

۳۰۱۰۲ § ادوار جبر - در بحث از پیدایش جبر و بسط آن باید قبلاً دانست که مقصود از علم جبر چیست، چه اگر این علم بمعنایی که حالیه در ذهن ما است^۵ و استعمال حروف و علامات جزء لاینفک آن می‌باشد گرفته شود، باید تاریخ پیدایش آنرا قرن هفدهم میلادی شمرد. از طرف دیگر اگر «نوعی» استعمال علامات را ملاک قرار دهیم باید پیدایش جبر را در قرن سوم میلادی در زمان دیوفانتوس (۳۰۲۰۲ §) دانست. اما اگر حل مسائل هندسی را که از نظر جبری به حل معادلات باز می‌گردد جزء جبر بشماریم، باید گفت که این علم در زمان فیثاغوریان موجود بوده و شاید در حوزه‌ی فیثاغورس پیدایش یافته است (۳۰۲۰۱ §). بالاخره، اگر هر مسئله‌ای که

(۵) جبر مقدماتی کنونی را مجملاً میتوان علم به خواص اعداد و روابط آنها بوسیله‌ی علامات و به کمک قواعد عمومی محاسبه تعریف کرد.

امروز به وسایل جبری حل می‌شود - قطع نظر از طریق حل آن ، که ممکن است صرفِ حدس و امتحان کمابیش اصولی و علمی باشد - جزء جبر بحساب آید ، باید گفت که جبر در حدود ۲۰۰۰ سال قبل از میلاد و شاید پیش از آن پیدایش یافته است . یکی از محققین تاریخ جبر را به سه دوره تقسیم کرده است * . اول دوره‌ی لفظی ، که در آن طرح و حل مسائل صرفاً بوسیله‌ی الفاظ زبانهای عرفی و بکلی عاری از هر نوع تلخیص یا استعمال علامات انجام می‌گرفته است . دوم دوره‌ی تلخیص ، که در آن در مواردی ، برای اختصار ، قسمتهائی از کلمات را می‌انداختند . سوم دوره‌ی علامی ، که در آن استعمال حروف و علامات پیدایش و رواج یافت . اگرچه حد فاصلی بین این ادوار نیست ، و مثلاً در بعضی آثار قدیم هر سه جنبه مشهود است ، تقسیم مذکور در بحث از تاریخ جبر خالی از فایده نیست .

§ ۳۰۱۰۴ تألیفات جبری قدیم - موضوع تألیفات جبری دانشمندان قدیم نیز جالب و در تاریخ ریاضیات حائز اهمیت و در عین حال در خور تأمل است . زیرا ، از علمای یونان (خاصه دانشمندان حوزه‌ی اسکندریه) که بگذریم ، دانشمندان قدیم مباحث مختلف و متنوعی از ریاضیات را در آثار خود می‌گنجانیده‌اند ، خاصه آنکه در ایام قدیم جبر بعنوان علمی مستقل مورد نظر نبوده بلکه وسیله‌ی جوابگوئی به معماهای عددی یا ، مانند سایر شعب ریاضیات ، آلتی برای حل مسائل عملی شمرده می‌شده و حتی اسم خاصی نداشته است . بنابراین ، اگر در بحث از تاریخ جبر مثلاً صحبت از آثار نجومی بمیان آید ، نباید این امر را خارج شدن از موضوع تلقی کرد ، بلکه ورود آنها در بحث ازین جهت است که بسیاری از کتابهای نجومی مشتمل بر فصولی در حساب و هندسه و جبر بوده است .

بر طبق اطلاعات کنونی ، اولین کتابی که صرفاً به جبر پرداخته از ریاضیدان بزرگ یونانی دیوفانتوس (اواسط قرن سوم میلادی) است (§ ۳۰۲۰۲) ، ولی

یونانیان تمام مطالب مربوط به خواص اعداد را تحت عنوان **آرِیْثِمِتیْکِه** * می‌آوردند، که می‌توان آنرا **علم حساب** (در مقابل محاسبه) نامید، و باین جهت، مسائل جبری در نزد آنان جزئی از آرِیْثِمِتیْکِه بوده، و عنوان مستقلی نداشته، و کتاب جبر دیوفانتوس هم همین عنوان را داشته است.

تا حدی که اطلاع داریم، اول کسی که کتابی به اسم «جبر و مقابله» نوشته محمد ابن موسی خوارزمی است (§ ۳۰۴۰۴).

§ ۳۰۱۰۴ **جبر در مصر و چین قدیم** - قدیمترین اثری در جبر که به ما رسیده از یک ریاضیدان مصری بنام **آخِمْس** است که در حدود ۱۵۵۰ یا ۱۶۵۰ ق م یا پیش از آن می‌زیسته، و از وی پایروسی بجا مانده که تألیف اوست یا آنرا از نسخ قدیمتری استنساخ کرده است.

پایروس آخِمْس، که فعلاً در موزهی بریتانیائی است، در حکم کتابی است در ریاضیات عملی، و مشتمل است بر حساب مساحات، مسائلی که حل آنها به معادلات درجهی اول باز می‌گردد*، و مسائل مقدّماتی در باب سلسله‌ها. طرح مسائل عموماً در مرحلهی لفظی است (§ ۳۰۱۰۲)، ولی آخِمْس عدهی قلیلی علامات نیز بکار برده است. حلّ معادلات بوسیلهی «امتحان و تصحیح» بعمل می‌آید. مثلاً برای حلّ معادلهی $x + x/7 = 19$ ، آخِمْس عدد ۷ را امتحان می‌کند. چون در طرف اول معادله بجای x این عدد را قرار دهیم حاصل مساوی هشت می‌شود. سپس آخِمْس با چند «تصحیح» و «امتحان» معلوم میکند که عدد هفت را در چه عددی باید ضرب کرد تا حاصل، بجای ۸، مساوی ۱۹ گردد.

علاوه بر پایروس آخِمْس، پایروسهای دیگری حاکی از اطلاعات ریاضی مصریان قدیم بدست آمده که متضمّن مسائلی است که به معادلات درجات اول و دوم

(*) از لغت یونانی **آرِیْثِمُوس**، بمعنی عدد. همین لفظ است که در ترجمه‌ی کتابهای یونانی

به عربی بصورت **آرِثِمَاتِیْقِی** درآمده است.

* مانند مسئله‌ای که با علامات امروزی به معادلهی $x + x/7 = 19$ باز می‌گردد.

بر می‌گردد.

چنینها نیز ظاهراً در هزار سال قبل از میلاد نوعی جبر لفظی داشته‌اند، و در قرن اول میلادی حلّ معادلات درجه‌ی دوّم را می‌دانسته‌اند.

§ ۳۰۲ - جبر در یونان

§ ۳۰۲۰۱ - اطلاع یونانیان از جبر قبل از زمان دیوفانتوس (اواسط قرن سوّم میلادی) در خور تأمل است، زیرا آنچه را «جبر هندسی» یونانیان می‌خوانند حلّ هندسی بعضی مسائل هندسی است که حلّ جبری آنها به معادلات درجه‌ی دوّم باز می‌گردد^{۵۵}، و آنها صرفاً جنبه‌ی لفظی داشته‌اند.

بقول بعضی محققین، مبنای جبر هندسی یونانیان از فیثاغورس^{۵۶} یا از فیثاغوریان است، و مسئله‌ی اضافه کردن سطحی بر خطی (§ ۳۰۲۰۳۰۱)، که از نظر جبری به حلّ معادله‌ی درجه‌ی دوّم باز می‌گردد، در حوزه‌ی علمی فیثاغوری پرداخته

(۵) از قبیل مسئله‌ی تقسیم خط به نسبت ذات وسط و طرفین و مسئله اضافه کردن سطحی

برخطی (§ ۳۰۲۰۳۰۱)

توضیحات مقتبس از وپکه که در § ۳۰۷۰۲ آورده‌ایم تا حدّی کیفیت این جبر هندسی یونانیان را روشن می‌سازد.

(۵۵) ریاضیدان و فیلسوف بزرگ یونانی، که در حدود ۵۷۲ ق م احتمالاً در جزیره‌ی ساموس

از جزایر دریای اژه (بحرالجزایر) متولد شده و در ۵۳۲ برآمده و در ۴۹۷ یا ۴۹۶ ق م و بقولی در حدود ۵۵۱ ق م وفات یافته است.

گویند فیثاغورس به مصر و ایران و هندوستان مسافرت کرده، و پس از بازگشت، در شهر کروتونا در ایتالیا جنوبی جمعیتی سریّ تأسیس کرد که بکوشش وی دِ فیثاغوریان، یعنی پیروان او، از حوزه‌های علمی معتبر قدیم گردید، و تا نیمه‌ی دوّم قرن چهارم ق م دوام داشت. فیثاغورس عدد را اصل وجود می‌دانست، و همین فلسفه‌ی وی از یک طرف منجر به پیدایش اعتقاد به خواص غریبه برای اعداد و از طرف دیگر منجر به تحقیق کمی در طبیعت شد.

کشف بسیاری از قضایای هندسی منسوب به حوزه‌ی علمی فیثاغوری است، ولی تفکیک اکتشافات شخصی فیثاغورس از آثار پیروان او ممکن نیست. گویند مفهوم کمیات اصم را اول بار فیثاغوریان پرداختند.

شده، و نیز گویند بقراط **خیوسی** *، فیلسوف فیثاغوری و ریاضیدان بزرگ یونانی، مسئله‌ی تضعیف مکعب (§۳۰۷۰۱) را به مسئله‌ی درج دو واسطه‌ی متناسب بین دو طول مفروض (§۳۰۷۰۱) بر گردانید، و طریقی برای حل همین مسئله به افلاطون (حدود ۴۲۸-۳۴۸ یا ۳۴۷ ق م) منسوب است.

همچنین، **ائودونسوس کنیدوسی** ** (حدود ۴۰۸ - حدود ۳۵۰ ق م)، یکی از بزرگترین ریاضیون جهان، علاوه بر تحقیقات گرانبهای دیگر که از موضوع بحث ما خارج است، مسئله‌ی تقسیم خط را به نسبت ذات وسط و طرفین تنقیح و تکمیل کرده است. از شاگردان وی **میناخموس** † (نیمه‌ی قرن چهارم ق م) است که گویند قطوع مخروطی را کشف و مسئله‌ی تضعیف مکعب (§۳۰۷۰۱) را بوسیله‌ی آنها حل کرده است.

اولین و معروفترین کتابی که در آن دانش ریاضی یونانیان به صورت علمی تنظیم و عرضه شده از **اقلیدس** ††، ریاضیدان بزرگ حوزه‌ی علمی اسکندریه است. این کتاب که به کتاب اصول هندسه (یا، بالاخصار، اصول) معروفست، و تا زمان حاضر مبنای تعلیم هندسه‌ی مقدماتی است، اساس کارهای ریاضی دانشمندان دوره‌ی اسلامی بوده است، و مثلاً در رساله‌ی خیام در جبر پیوسته اشاره به کتاب اصول و کتاب دیگر اقلیدس بنام **مقطیات** میشود، و ما از این دو کتاب بعداً با تفصیل بیشتری یاد خواهیم کرد (§§ ۳۰۲۰۳۰۱-۳۰۲۰۳۰۲). هر دو کتاب متضمن حل هندسی مسائلی است که از نظر جبری به معادلات درجه‌ی دوم باز می‌گردد.

(*) Hippocrates . با بقراط طبیب که اهل کوس بوده و در حدود ۴۶۰ ق م متولد شده اشتباه نشود. بقراط خیوسی منسوب است به جزیره‌ی خیوس از جزایر دریای اژه . و در حدود ۴۵۰ تا ۴۳۰ ق م در آتن رونق داشته است .

(**) Eudoxos . وی منسوبست به شهر قدیم کنیدوس در ناحیه‌ی کاریا (آسیای صغیر) .
Menaechmos (†)

(††) از زندگی او اطلاع درستی نداریم . همین قدر می‌دانیم که در حدود ۳۰۰ ق م ،

در زمان سلطنت (۳۲۳ - ۲۸۵ ق م) بطلمیوس I ، در اسکندریه رونق داشته است .

بعضی معتقدند که پس از اقلیدس تحوّل از طریق هندسی به طریق تحلیلی در جبر آغاز شده، و احتمال میدهند که **هرون اسکندرانی*** (حدود نیمه‌ی قرن اول میلادی) در حلّ مسئله‌ای از درجه‌ی دوم طریقه‌ی تحلیلی بکار برده است.

در هر حال، از زمان دیوفانتوس (۳۰۲-۳۰۳) است که جبر از مرحله‌ی لفظی هندسی خارج میشود، و تا حدّی صورت علامتی میگیرد. از این زمان بعد پیشرفت جبر در یونان متوقف میگردد.

این بود خلاصه‌ای از سیر جبر در یونان، و بقیه‌ی مطالب مذکور در §§۳۰۲-۳۰۳ اجمالی تلقی کرد.

§ ۳۰۲-۳۰۳ دیوفانتوس† - دیوفانتوس از بزرگترین ریاضیون حوزه‌ی اسکندریه است، و ظاهراً در اواسط قرن سوم میلادی برآمده است. چنانکه اشاره کردیم، زمان دیوفانتوس را میتوان آغاز خارج شدن جبر از تحت تبعیت هندسه و از مرحله‌ی لفظی صرف شمرد.

مهمترین آثار دیوفانتوس کتابی است بنام علم حساب (۳۰۱-۳۰۳) که اصلاً در سیزده مقاله بوده، ولی فقط شش مقاله‌ی آن در دست است، و ظاهراً از ترجمه‌های عربی موجود کتاب اطلاعاتی درباره‌ی قسمتهای مفقود آن بدست نیامده، و قدیمترین نسخ یونانی آن که در دست است نسخه‌ی کتابخانه‌ی سلطنتی مادرید میباشد که از قرن سیزدهم یا چهاردهم میلادی یعنی بیش از هزار سال پس از تألیف اصل کتاب است، و در بحث از تحقیقات جبری این دانشمند یونانی و قضاوت در آنها باید در دست نبودن

(*) همان کس است که در مآخذ اسلامی نامش ایرون اسکندرانی ضبط شده است.

(†) Diophantos. در مآخذ اسلامی دیوفانتوس و ذیوفنتوس.

برای اطلاعات مشروح در باب زمان دیوفانتوس و آثار وی رجوع شود به مقدمه‌ی مفصل (۹۱ صفحه) پول، ور اک (Paul Ver Eecke) در کتاب او بنام دیوفانت اسکندرانی (چاپ جدید، پاریس، ۱۹۵۹). این کتاب مشتمل بر ترجمه‌ی فرانسوی شش مقاله‌ی کتاب حساب دیوفانتوس و کتاب او در ۱۰۱۰ کثیرالاضلاع نیز میباشد.

نسخه‌ای قدیمی از اثر وی را در نظر داشت .

کتاب دیوفانتوس در علم حساب مجموعه‌ی کمابیش متشتمی است از مسائل عددی که بعضی به معادلات درجه‌ی اول یک مجهولی تادستگاههای چهار مجهولی و برخی به معادلات درجه‌ی دوم بر می‌گردد* ، ولی اکثر مسائل آن به معادلات سیال (§ ۳۰۶۰۹) از درجات دوم تا چهارم باز می‌گردد** ، و دانشمند یونانی در مورد معادلات درجه‌ی اول جوابهای مُنطق را می‌دهد ، و در معادلات دسته‌ی اخیر، حتی وقتی معادله دو جواب مثبت دارد ، فقط یکی را اختیار می‌کند ، و اگر معادله جواب مثبت نداشته باشد آنرا ممتنع می‌شمارد . باید دانست که دیوفانتوس مسائل مورد بحث را طوری ساخته است که جوابهای مثبت دارند ، و بعلاوه وی طریق کلی برای حلّ این معادلات نمی‌آورد ، بلکه هر معادله را به طریق خاصی حل می‌کند .

دیوفانتوس اول کسی است که در راه وضع یک سلسله علامات در جبر قدم برداشته است ، ولی چون نسخه‌ی معتبری از کتاب جبر او در دست نیست ، در باب علاماتی که بکار برده نمی‌توان نظر قطعی اظهار کرد . در هر حال ، باتوجه به جهاتی که ذکر شد ، دیوفانتوس را اغلب پدر علم جبر می‌خوانند .

کتاب دیوفانتوس را قسطا ابن لوقا البعلبکی (§ ۳۰۴۰۳) بزبان عربی ترجمه نموده و ابوالوفای بوزجانی (§ ۳۰۴۰۵۰۳) آنرا تفسیر کرده و کرخی (§ ۳۰۴۰۵۰۷) فایده‌ی فراوان از آن برده است . نیز رجوع کنید به §§ ۳۰۶۰۲ و ۳۰۶۰۴-۳۰۶۰۹ .

§ ۳۰۲۰۳ معرفی چند کتاب - از دانشمندان یونانی چند تن هستند که

(*) یکی از آنها (مسئله‌ی هفدهم مقاله‌ی ششم) بحل معادله $4x^2 + x = x^2 + 4x$ بر می‌گردد که دیوفانتوس جواب آنرا $x = 4$ می‌دهد ، بدون آنکه طریق حل را ذکر کند . احتمالاً این جواب را به حدس یافته است . رجوع شود به کتاب سابق الذکر پول وراک (صص ۲۶۵ - ۲۶۶) .

(**) بهمین جهت ، معادلات سیال را اغلب معادلات دیوفانتی می‌خوانند .

آثارشان از همان اوایل رونق گرفتن حوزه‌ی علمی بغداد به عربی ترجمه شد، و مبنای کارهای ریاضیون دوره‌ی اسلامی قرار گرفت.

معروفترین این دانشمندان یکی اقلیدس (رونقش در حدود ۳۰۰ ق م) است که در ۳۰۲۰۱ § از او اسم بردیم. دیگر ارشمیدس (۲۸۷ - ۲۱۲ ق م) است که بزرگترین ریاضیون و فیزیکدانان و مهندسین قدیم است، و درین کتاب بمناسبت مسئله‌ای (۳۰۷۰۱ §) اسمش خواهد آمد.

سومی آپولونیوس پُرسائی* است که احتمالاً در حدود ۲۶۲ ق م متولد شده و در نیمه‌ی دوّم قرن سوم ق م در اسکندریّه برآمده و بجهت کتابی که در مخروطات پرداخته نام جاودانی یافته است.

چون در رسائل جبری خیّام همواره از کتابهای اصول هندسه و معطیات اقلیدس و مخروطات آپولونیوس صحبت و بآنها استناد می‌شود، و از طرف دیگر ممکن است بعضی از خوانندگان آشنائی کافی با این شاهکارهای علمی نداشته باشند، مناسب است که شرح مختصری در معرفی هر یک از سه اثر ریاضی مذکور بیاوریم.

۳۰۲۰۳۰۱ § کتاب «اصول» - چنانکه اشاره کردیم، کتاب اصول هندسه‌ی اقلیدس اولین کتابی است که در آن ریاضیات یونانی تا ۳۰۰ ق م به صورت علمی تنظیم و عرضه شده است. این کتاب مشتمل بر ۱۳ مقاله می‌باشد.

مقاله‌ی اوّل شامل تعریفات و بدیهیات و اصل موضوع معروف اقلیدس و احکام راجع به تساوی مثلثات و خطوط متوازی و قضیه‌ی معروف به قضیه‌ی عروس است.

مقاله‌ی دوّم مشتمل بر قسمت اعظم جبر هندسی یونانیان است، و در آن

(*) Apollonios . وی منسوبست به شهر پرسکا از بلاد قدیم ناحیه‌ی پامفولیا در آسیای صغیر. در مآخذ اسلامی وی را ابلونیوس و ابلونیوس نجار خوانده‌اند. برای صور مختلف این نام یونانی در مآخذ اسلامی رجوع شود به دایرة المعارف اسلام (چاپ جدید انگلیسی)، ص ۹۹۴ - ۹۵، در ماده‌ی بلینوس.

عده‌ای احکام ثابت شده که معادل بعضی اتحادهای جبری است. شکل یازدهم این مقاله در تقسیم خط^۱ است به نسبت ذات وسط و طرفین، که از نظر جبری معادل حل معادله‌ی $x^2 + ax = a^2$ است، و شکل چهاردهم مقاله (ساختن مربعی مساوی مستطیل مفروض) معادل حل معادله‌ی $x = ab$ می‌باشد.

مقاله‌ی سوّم در خواص دایره و مقاله‌ی چهارم در باب کثیر الاضلاعهای محیطی و محاطی و منتظم است.

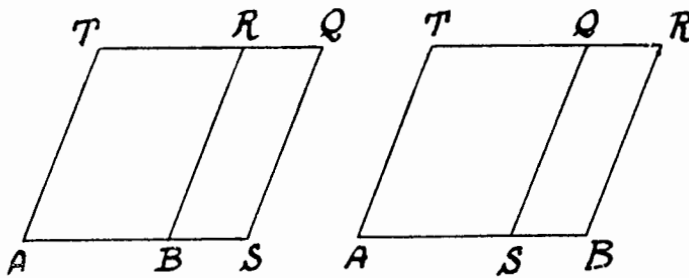
مقاله‌ی پنجم تخصیص به خواص^۲ نسب دارد، و ظاهراً مبتنی بر تحقیقات ائودوکسوس (§ ۳۰۲۰۱) می‌باشد، و در هر حال، در تنظیم و تدوین احکام مربوط به نسب در این کتاب چنان استادی بکار رفته که در آثار ریاضی یونانیان کم نظیر است. مقاله‌ی ششم در احکام راجع به سطوح و اشکال متشابه است. درین مقاله دو مسئله آمده است (مسائل ۲۸ و ۲۹) که از نظر جبری به حل معادلات درجه‌ی دوّم برمی‌گردد. این مسائل از جنبه‌ی تاریخی بسیار اهمیت دارد، چه روش حل آنها همواره مورد استفاده‌ی ریاضیون یونانی و اسلامی بوده است* . بنا بر این، جا دارد که اشاره‌ای باین مسائل بکنیم.

موضوع هر دو مسئله « قرار دادن متوازی الاضلاعی بر کنار خطی » است، که ریاضیون دوره‌ی اسلامی از آن به « اضافه کردن » متوازی الاضلاعی بر قطعه خط مفروض تعبیر کرده‌اند. باید دانست که صورت ساده‌ی مسئله‌ی قرار دادن متوازی الاضلاعی بر کنار خط مفروض، که یونانیان به لفظ پارابوله از آن تعبیر کرده‌اند، ساختن متوازی الاضلاعی است⁺ که این خط یکی از اضلاع آن باشد. صورت کلی تر مسئله اینست که متوازی الاضلاعی مانند ASQT بر قطعه‌ای (بمعنای اعم) مانند AS از قطعه مستقیم AB، که با آن يك انتهای مشترك دارد، ساخته شود. درین صورت، هر گاه متوازی الاضلاعی بر تمام AB بسازیم چنانکه اضلاع مقابل AB از

(*) مثلاً رجوع شود به § ۳۰۲۰۳۰۳، § ۵۰۴۰۲۰۲، § ۵۰۴۰۳۰۱.

(+) البته تابع شرایطی.

دو متوازی الاضلاع دارای يك امتداد باشند ، واضلاع ديگر آنها متوازی باشند ، بر حسب اینکه AS کوچکتر یا بزرگتر از AB باشد ، گویند متوازی الاضلاع که بر AB اضافه شده (یعنی ASQT) نسبت به متوازی الاضلاع مضاف بر تمام AB (یعنی ABRT) ناقص (به یونانی اِئِسِیس) یا زاید (به یونانی هویِربوله) و مقدار نقصان یا زیادتی متوازی الاضلاع BSQR میباشد .



بعد از شرح این اصطلاحات ، صورت مسائل ۲۸ و ۲۹ مقاله ششم را ، قریب به مضمونی که ریاضیون اسلامی آورده اند ، نقل می کنیم :

می خواهیم بر خط مفروض متوازی الاضلاع مساوی سطح مستقیم الاضلاع مفروض C اضافه کنیم که نقصان (مسئله ۲۸) یا زیادتی (مسئله ۲۹) آن نسبت به متوازی الاضلاع مضاف بر تمام خط AB با متوازی الاضلاع مفروض D متشابه باشد * .

هر دو مسئله از نظر جبری معادل معادلاتی از درجهی دوم است † ، چو اگر AB و QS را بترتیب به a و x و نسبت اضلاع D را به k نمایش دهیم خواهیم داشت $SB = kx$. حال اگر m جیب زاویه‌ای از یکی از متوازی الاضلاع ها باشد ، سطح

(*) تحریر اقلیدس ، ص ۹۵-۹۶؛ هیت ، سیزده مقاله ، جلد اول ، ص ۳۴۳-۳۴۴ ،

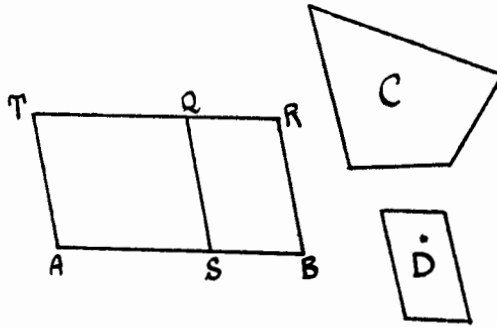
و جلد دوم ، ص ۲۵۸-۲۶۷ .

(†) هیت ، تاریخ ، جلد اول ، ص ۳۹۶

AQ مساوی $m(a-kx)x$ خواهد بود، و لهذا حلّ مسئله به حلّ معادله ی

$$\pm mkx^2 + max - mc = 0 \quad \text{یا} \quad m(a \pm kx)x = c$$

باز می گردد. در اضافهی زاید مسئله همیشه ممکن است، اما در اضافهی ناقص،



شرط اینکه مسئله جواب حقیقی داشته باشد اینست که $c \leq ma/k$. طرف دوم این نامساوی سطح متوازی الاضلاعی است که برنصف AB و متشابه با D ساخته شود، و همین شرط را اقلیدس مقدمه^{۲۷} در قضیه^{۲۷} مقاله ی ششم آورده است. †

مقالات هفتم - نهم در خواص اعداد و مقاله ی دهم در مقادیر اصم است.

مقالات یازدهم - سیزدهم در هندسه ی مجسمه یا فضائی است.*

(†) تحریر اقلیدس، ص ۹۵؛ هیث، سیزده مقاله، جلد دوم، ص ۳۵۷.

(*) در پایان هندسه ی اقلیدس معمولاً دو مقاله ی الحاقی (مقالات چهاردهم و پانزدهم) می آید، که اولی از هُپسیکلِس (Hypsicles) است که گویا در نیمه ی دوم قرن دوم قبل از میلاد می زیسته، و دومی ظاهراً در قرن ششم میلادی نوشته شده است.

بالاخره در آخر تحریر اقلیدس چاپ تهران چهار صفحه (ص ۲۵۶ - ۲۵۹) در تحت عنوان «القول فی اقامة البرهان علی الحکم المذکور فی الشكل الخامس عشر من المقالة الثانية عشر من هذا الكتاب» آمده که ظاهراً از خواجه نصیرالدین طوسی و مشتمل بر دو مقدمه است که اولی در حل مسئله ی درج دو واسطه ی متناسب بین دو طول مفروض (§ ۳۰۷۰۱) می باشد. اینک بعضی عبارت مذکور را آغاز کتاب معطیات (§ ۳۰۲۰۳۰۲) شمرده اند (یادبود هفتصدمین سال خواجه نصیرالدین طوسی، نشریه ی شماره ی ۲۵۹ دانشگاه تهران، خرداد ماه ۱۳۳۵، ص ۱۱۲) خطائی فاحش است.

کتاب اصول را اول بار حجّاج ابن یوسف ابن مَطَر (§ ۳۰۴۰۳) بزبان عربی ترجمه کرد، و پس از او نیز دانشمندان و مترجمین معتبر مانند اسحاق ابن حنین (§ ۳۰۴۰۳) و قسطا ابن لوقا البعلبکی (§ ۳۰۴۰۳) و ثابت ابن قرّه (§ ۳۰۴۰۳۰۱) و دیگران دست به ترجمه‌ی آن و اصلاح ترجمه‌های دیگران زدند، و جمع کثیری از دانشمندان حواشی و شروحن بر آن نوشتند* . از تحریرهای معروف هندسه‌ی اقلیدس کتاب معروف به تحریر اقلیدس از خواجه نصیرالدین طوسی (۵۹۷-۶۷۲هـ) است، که مبتنی بر ترجمه‌های حجّاج و ثابت می‌باشد، و در ۱۲۹۸هـ در تهران بچاپ رسیده است. توجهی که خواجه نصیرالدین درین کتاب به جزئیات و حالات خاص مبذول داشته نشانه‌ی بارز انحطاط علوم ریاضی در نزد مسلمین است، و از جهاتی اثر او را مشمول گفته‌ی پاپوس† قرار میدهد:

«... چیزی به نوشته‌ی اصلی اقلیدس اضافه نکردند الا اینکه بعضی، پیش از زمان من، با الحاق براهین ثانوی به بعضی قضایا بیسلیقگی خود را به اثبات رسانیده‌اند...» .

§ ۳۰۲۰۳۰۲ مُعْطِیَات - دیگر از کتابهای معروف اقلیدس کتاب معطیات است که نسخه‌ای از آن، که بتوسط اسحاق ابن حنین (§ ۳۰۴۰۳) ترجمه شده و ثابت ابن قرّه (§ ۳۰۴۰۳۰۱) آنرا اصلاح کرده، در تحت عنوان کتاب المعطیات در جزء مجموعه‌ای در سال ۱۳۰۴ هـ در تهران چاپ شده است (صص ۱۲۳-۱۶۳ مجموعه).

این کتاب مربوط به چهارمقاله‌ی اول کتاب اصول و در هندسه‌ی مسطحه است، و با تعریف معانی مختلف «معلوم بودن» چیزی آغاز میگردد، از این قبیل:

(*) برای تفصیل بیشتر رجوع شود به فصل هفتم مقدمه‌ی کتاب گرانهای سر تاس ل. هیث،

بنام سیزده مقاله‌ی اصول اقلیدس، جلد اول، صص ۷۵ - ۹۰.

(†) Pappos. پاپوس اسکندرانی، ریاضیدان یونانی، احتمالا درس‌الهای ۲۸-۳۵ بم

رونق داشته.

سطوح و خطوط و زوایا و نسب وقتی از حیث مقدار معلومند که بتوان مساوی آنها را ساخت .

اشکال مستقیم الخط وقتی از حیث صورت معلومند که زوایای آنها معلوم و نسب اضلاع آنها نیز معلوم باشد .

دایره وقتی از حیث مقدار معلوم است که مقدار شعاعش معلوم باشد ، و وقتی از حیث مقدار و وضع معلوم است که مقدار شعاع و وضع مرکز آن معلوم باشد . منظور هر یک از احکام معطیات اثبات این مطلب است که اگر بعضی اجزای شکلی یا نسب آنها معلوم باشد ، اجزای دیگری یا نسب اجزای دیگری از شکل معلوم خواهد بود .

اهمیت مجموعه‌ی منظمی از این قبیل احکام در تسهیل و اختصار تحلیل هندسی مستغنی از توضیح است .

از احکام معطیات که با موضوع بحث ما مناسبت دارد احکام ۸۴ و ۸۵ است که میتوان آنها را چنین بیان کرد :

هر گاه سطح و زوایای متوازی الاضلاعی معلوم و تفاضل (حکم ۸۴) یا مجموع (حکم ۸۵) دو ضلع مجاور نیز معلوم باشد اضلاع متوازی الاضلاع معلوم است . بدیهی است که اگر x و y اضلاع متوازی الاضلاع باشد ، تعیین این دو ضلع بحل دستگاهی به صورت

$$x \pm y = a, \quad xy = b^2$$

بر می‌گردد ، و احکام ۸۴ و ۸۵ معطیات را می‌توان معادل حل این دستگاهها شمرد .

§۳۰۲۰۳۰۴ مخروطات آپولونیوس - مخروطات مبحثی است از علم هندسه

که از خواص قُطوعِ مخروطی (قطعهای مخروطی) ، یعنی منحنیات حادث از تقاطع سطوح مخروطی مستدیر با صفحات قاطع ، بحث میکند ، و این منحنیات همانهاست که امروز در نزد ما به بیضی و هذلولی و سهمی معروفست .

چنانکه در § ۳۰۲۰۱ اشاره کردیم، کشف قطوع مخروطی به منایخموس منسوب است. پس از وی، بعضی دیگر از علمای ریاضی، از جمله آریستایوس* (قرن چهارم ق م) و اقلیدس (حدود ۳۰۰ ق م) و کونون † (حدود ۲۶۰ ق م) و ارشمیدس (۲۸۷-۲۱۲ ق م)، درین مبحث تحقیق کرده‌اند، ولی اولین اثر عمده و مستقلی که در این باب بما رسیده همان کتاب مخروطات آپولونیوس (§ ۳۰۲۰۳) می‌باشد.

کتاب آپولونیوس ظاهراً اصلاً در هشت مقاله بوده، و مقاله‌ی هشتم آن تا کنون بدست نیامده، ولی ترجمه‌های عربی هفت مقاله‌ی دیگر و اصل یونانی چهار مقاله‌ی اول در دست می‌باشد. از مترجمین و ریاضیون اوایل دوره‌ی اسلامی که کتاب مخروطات را بزبان عربی ترجمه کرده‌اند میتوان هلال ابن هلال حمصی (§ ۳۰۴۰۳)، ثابت ابن قره (§ ۳۰۴۰۳۰۱)، و ابوالفتح اصفهانی (§ ۳۰۴۰۳) را نام برد. در ادوار بعد نیز شروخی بر مخروطات نوشته شده، و تلخیص‌هایی از آن فراهم شده، که از جمله میتوان تلخیص ابوالحسین عبدالملک ابن محمد شیرازی †† را ذکر کرد.

احکام علم مخروطات در تحقیقات علمای دوره‌ی اسلامی در حلّ مسائلی که قابل تحویل به معادلات درجه‌ی دوّم نیست اهمیت خاصی داشته و شاید بی‌مبالغه بتوان گفت که یگانه وسیله بوده است، و باین جهت در کارهای مربوط به حلّ معادلات درجه‌ی سوّم (مانند رسائل جبری خیّام) همواره اصطلاحات مخروطات پیش می‌آید، و این اصطلاحات را مترجمین دانشمند دوره‌ی اسلامی از روی اصطلاحات یونانی ساخته‌اند. بعنوان نمونه توضیح مختصری در وجد تسمیه‌ی قطوع به قطع مکافی و قطع زاید و قطع ناقص می‌آوریم.

این اصطلاحات و نیز اسامی قطوع سه‌گانه در زبانهای اروپائی از نامهایی که آپولونیوس بر این منحنیات نهاده گرفته شده، و اصطلاحات یونانی آپولونیوس خود ناشی از اینست که وی خاصیت اصلی قطوع را بوسیله‌ی اضافه کردن خطی بر سطحی

Conon (†)

Aristaeos (*)

††) در حدود ۵۵۰ هـ ق زنده بوده و قبل از ۶۰۰ هـ ق وفات یافته است.

(§۳۰۲۰۳۰۱) بیان میکرده است . برای مزید توضیح فرض کنیم مبداء مختصات یکی از نقاط منحنی و قطر مار^۲ بر این نقطه محور طول و مماس مرسوم بر منحنی از این نقطه محور عرض باشد ، و در مورد بیضی و هذلولی طول قطر مذکور را به d نمایش میدهیم . خاصیت اساسی سه منحنی چنین نوشته میشود :

$$y^2 = px \quad (\text{سهمی})$$

$$y^2 = px + \frac{p}{d} x^2 \quad (\text{هذلولی})$$

$$y^2 = px - \frac{p}{d} x^2 \quad (\text{بیضی})$$

در این معادلات p طول مشخصی است که به قطع مفروض بستگی دارد ، و میتوان آنرا بوسیلهی قطعه خطی مانند D که ابتدا از مبداء مختصات بر قطر مفروض عمود شود نمایش داد ، و ریاضیون قدیم آنرا **ضلع قائم*** منحنی میخوانده‌اند . اینک اگر ، برای احتراز از تکرار ، در مستطیلهای مضاف بر D ضلع واقع بر D را قاعده و ضلع عمود بر آنرا ارتفاع بنامیم ، دیده میشود که مربع عرض هر نقطه‌ی سهمی معادل مستطیلی است که بر تمام D اضافه شود و ارتفاعش مساوی طول نقطه باشد - و چنانکه دانستیم ، یونانیان از این اضافه به لفظ پارابوله (مکافی) تعبیر میکردند . از طرف دیگر ، اگر S مستطیلی به قاعده‌ی P و ارتفاع d باشد ، در هذلولی یا بیضی ، مربع عرض هر نقطه معادل مستطیلی است مضاف بر D که ارتفاعش طول نقطه باشد ، و بقدر مستطیلی مشابه و متشابه‌الوضع با S نسبت به مستطیل مضاف بر تمام D ، بترتیب ، زاید (هوپربوله) یا ناقص (ایپسیس) باشد .

البته آپولونیوس معادلات جبری بکار نمیبَرده ، بلکه خواص اساسی مندرج در معادلات سابق الذکر را قریب به مضمون اخیرولی با عباراتی بسیار پیچیده‌تر و طولانی‌تر

(*) به لاتینی لاتوس رکوم (latus rectum) . بالاخص اگر محور کانونی را محور طول بگیریم ، ضلع قائم مساوی وتر کانونی عمود بر محور کانونی خواهد بود ، و ریاضیون انگلیسی زبان هنوز اصطلاح لاتوس رکوم را باین معنی بکار می‌برند ، و آن مضاعف پارامتر منحنی در اصطلاح ریاضیون فرانسه زبان است .

بیان میکرده است، و برحسب نوع اضافه‌ای که در مورد هر قطع درکار می‌آمده آن قطع را بایکی از الفاظ پارابوله، هویربوله، و الیسیس مشخص می‌نموده است، و چنانکه اشاره کردیم، نامهای قطع مکافی و قطع زاید و قطع ناقص که ریاضیون اسلامی برمنحنیات سه‌گانه نهاده‌اند، و نیز نام سه منحنی در زبانهای اروپائی ناشی از همین تسمیه‌ی آپولونیوس میباشد.

§ ۳۰۳ جبر در هند

§ ۳۰۳۰۱ مقدمه - اگرچه نمیدانیم اطلاعات جبری هندیها در دانشمندان

دوره‌ی اسلامی تا چه حد مؤثر بوده و حتی به قول ویکه*، در پایان قرن دهم میلادی ریاضیون اسلامی از طرق هندی حل معادلات سیال بی‌خبر بوده‌اند، از جهت اینکه بعضی آثار علمی هندی در قرون اولای اسلامی به مسلمانان رسیده اطلاع از آثار ریاضی هندی در تحقیق تاریخ ریاضیات در دوره‌ی اسلامی ضروری است.

تاریخ اه‌ایل ریاضیات در هند روشن نیست. قرآینی هست حاکی از اینکه هندیان نیز مانند سایر اقوام مترقی توجه خاص به نجوم و محاسبات داشته‌اند. قدیمترین آثار علمی هندیان در نجوم کتابهای موسوم به سدهانت است که بیشتر جنبه‌ی نظری داشته، و از کتابهای نجومی عملی و جداول و زیجات ممتاز بوده، و این لفظ سدهانت در جزء اسم تألیفات بعدی ریاضیون و منجمین هندی نیز می‌آید. از سدهانت‌های نسبتاً قدیمی پنج سدهانت - سُورِی سدهانت، پَتیمانَه سدهانت، و اسیطَه سدهانت، پاولسا سدهانت، و رومک سدهانت - معروف است، که فقط اولی بصورت اصلی در دست میباشد، و محقق شهیر، جورج سارتن، به تخمین و احتمال آنها را از نیمه‌ی اول قرن یازدهم میلادی می‌شمارد†، و در حال کتاب پنج سدهانتیکا از وراهمیهیر که

(*) ویکه، فخری، ص ۴۲.

(†) سارتن، مدخل، جلد اول، ص ۳۸۷.

در حدود ۵۰۵ میلادی تألیف شده مشتمل بر خلاصه‌ای از سدهانت های پنجگانه می‌باشد.

حادثه‌ای که در تاریخ ریاضیات درهند اهمیت خاص دارد هجوم یونانیان به هند در جنگهای کشور گشائی اسکندر مقدونی است (۳۲۷ ق م) ، و اعزام سفرای یونانی در دربار پادشاهان هند ، و اگرچه تأثیر متقابل دانشمندان یونانی وهندی را نمی‌توان بدرستی دانست ، سدهانت‌های مذکور خالی از تأثیر افکار یونانی نیست † .

در هر حال ، دو خدمت بزرگ هندیان را به بسط ریاضیات نمی‌توان فراموش کرد . یکی وضع ارقام ، که اولین اثر آن در کتیبه‌های دوران پُر فروغ آشوکا ، پادشاه معروف هند در قرن سوم ق م ، دیده میشود ؛ و بنا بر معروف ، ارقام هندی در قرن دوم هجری به حوزه‌ی علمی بغداد رسید * ، و سپس به اروپا وارد شده است . و دیگر استعمال جیب است در مثلثات بجای وتر که در نزد یونانیان بکار می‌رفته است .**

§ ۳۰۳۰۲ جبر در هند - بر طبق آنچه از آثار هندی بر می‌آید ، ریاضیون

(†) باولیسما سدهانت را به باولوس اسکندرانی (قرن چهارم میلادی) ، عالم یونانی احکام

نجوم ، نسبت داده‌اند .

(*) درین باب باید مَرَّجَه داشت که سوروس سِبَخْت ، اسقف دانشمند مدرسه‌ی قَسْرین (از شهرهای سوریه بر ساحل علیایی فرات) در قرن هفتم میلادی ، در ۶۲۲ میلادی از ارقام هندی صحبت می‌کند . رجوع شود به: سارتن ، مدخل ، جلد اول ، ص ۴۹۳ ؛ سمیت ، تاریخ ، جلد اول ، ص ۱۶۶ - ۶۷ .

(***) ظاهراً اول کسی که نام مخصوصی برای تابعی که ما امروز جیب و فرنگیها Sinus

می‌خوانند وضع کرده آریبهط (رجوع شود به صفحه‌ی ۹۴) است ، که آنرا اَرْدَها جیا (بمعنی

نصف وتر) و جیا اردها ، و بعد ، باختصار ، جیا یا جیو (بمعنی وتر) نامیده است ، و همین لفظ

است که در نزد ریاضیون اسلامی بصورت جیب تعریف شده ، و گِراردوس کرموننسیس (Gerardus

Cremonensis) (۱۱۱۴ - ۸۴) ، مترجم معروف ایتالیائی ، در ترجمه‌ی آثار عربی به لاتیسی ،

لفظ سینوس را ، که کمابیش هم معنی لفظ عربی جیب (بمعنی گریبان وغیره) است ، بجای آن

اصطلاح کرده است . رجوع شود به : سمیت ، تاریخ ، جلد ۲ ، ص ۶۱۵ - ۶۱۶ .

هندی در اوایل قرن هفتم میلادی در تحلیل جبری مسائل مهارتی بهم رسانیده بودند ، و از حلّ معادلات درجه‌ی دوّم با خبر بودند .

از ریاضیون هندی در دوره‌ی مورد نظر ما که در جبر چیزی نوشته‌اند اسامی چهار تن قابل ذکر است : آریبهط (۴۷۵ یا ۴۷۶ - حدود ۵۵۰ ب م) ، برهمکیت (متولد ۵۹۸ ب م) ، مهاویر (رونقش در حدود ۸۳۰ ب م) ، و بهاُسکر (۱۱۱۴ - حدود ۱۱۸۵ ب م) .

آریبهط همان کسی است که در آثار دوره‌ی اسلامی به ارجبهد و ارجبهر معروف شده [†] . وی کتابی نوشته (۴۹۹ ب م) موسوم به آریبهطیه که اساساً مشتمل بر همان مطالب سدهانت هاست منتهی به صورتی منظم تر ، و قسمتی از آن در ریاضیات است . بالاخص ، حلّ معادلات سیّال درجه‌ی اوّل بطریقی شبیه طریقه‌ی کنونی حلّ این معادلات بوسیله‌ی کسور مسلسل درین کتاب آمده است . و نیز مندرجات کتاب حاکی از اینست که مؤلف از حلّ معادلات درجه‌ی دوّم و خواصّ تصاعد عددی باخبر بوده است . [‡]

برهمکیت در حدود سال ۶۲۸ ب م کتابی بنام بُراهِمَسَیْهَط - سدهانت نوشته که عمدهٔ مبتنی بر سوری سدهانت و آریبهطیه است ، ولی مطالب تازه‌ای نیز دارد . فصول دوازدهم و هیجدهم کتاب در باب ریاضیات است ، و در این فصلها مؤلف به معادلات درجات اوّل و دوّم معین و سیّال پرداخته است .

مهاویر در حدود ۸۳۰ میلادی کتابی بنام مَنَسَیْهَط - سدهانت نوشته که جامعتر ولی مقدماتی تراز کتاب برهمکیت است ، و در آن سه نوع از معادلات درجه‌ی دوّم را (بدون توجه به ریشه‌های موهومی) حل کرده و از تصاعدات هندسی نیز سخن گفته است .

(†) تقی زاده ، دروس ، ص ۲۱ ؛ نالینو ، علم الفلك ، ص ۱۵۳ .

(‡) این آریبهط را نباید با شخص دیگری به همین نام که ظاهراً در اواسط قرن دهم

میلادی می‌زیسته اشتباه کرد .

شاید ذکر این مطلب نیز خالی از فایده نباشد که کتاب مهاویر اولین اثر هندی است که در آن مؤلف به بیضی پرداخته است (بحث مهاویر در این باب دقیق نیست).
 بهاسکر بزرگترین ریاضیون هند در فاصله‌ی سالهای ۱۰۰۰ و ۱۵۰۰ میلادی است. وی معنی واقعی تقسیم بر صفر را دریافته و معادلات درجه‌ی دوم را به یک صورت تحویل کرده، و معادلات سیّال درجات اول و دوم را حلّ نموده است.

§۳۰۴ علم جبر در دوره‌ی اسلامی

§۳۰۴۰۱ مقدمه - اگرچه موضوع اصلی این فصل تاریخچه‌ی علم جبر در دوره‌ی اسلامی (تازمان خیّام) است، مناسب دانستیم که مقدمه‌ی از چند موضوع دیگر - به شرح ذیل

نهضت علمی اسلامی (§۳۰۴۰۲)،

مترجمین (§۳۰۴۰۳ و §۳۰۴۰۳۰۱)،

خوارزمی (§۳۰۴۰۴)،

سایر علمای معروف جبر در دوره‌ی اسلامی (§§۳۰۴۰۵ - ۳۰۴۰۵۰۸) -

صحبت کنیم، چون اطلاع اجمالی از این موضوعها در فهم مبانی دانش ریاضی - بالاخص علم جبر - در دوره‌ی اسلامی و نیز در فهم مطالبی که بعداً در این کتاب می‌آید ضروری است. بنابراین، پس از اشاره به آغاز نهضت علمی اسلامی و بسط آن، از چند تن از مترجمین و دانشمندان معروف اسم می‌بریم. در باب علمای جبر، خوارزمی (محمد ابن موسی) را بعلمت اهمیت و شهرت وی در تحت عنوان مستقلی آورده‌ایم (§۳۰۴۰۴)، و از کارهای جبری خیّام در قسمت چهارم کتاب به تفصیل سخن خواهد رفت. از بعضی دیگر از علمای معروف جبر در اجزای §۳۰۴۰۵ سخن می‌گوئیم.

پس از تمهید مقدمات مذکور، تاریخچه‌ی علم جبر در دوره‌ی اسلامی خواهد آمد (§۳۰۵).

پیش از ختم این مقدمه، به منظور احتراز از تکرار، باید گفته شود که ما در

این کتاب سر اینکه تراجم احوال اشخاص مورد بحث را بنویسیم نداشته‌ایم، و در مواردی که خواننده مطالبی شبیه به تراجم احوال در کتاب میبیند، نباید بر ما خرده بگیرد که چرا حق اشخاص را ادا نکرده‌ایم، و مثلاً از متجاوز از ۲۷۰ اثر منسوب به کندی (§ ۳۰۴۰۳۰۱) فقط کتاب او را در حساب هندی و از نود و یا بیشتر کتاب منسوب به ابن هیثم (§ ۳۰۴۰۵۰۶) فقط پنج اثر او را نام برده‌ایم، چو توجه ما در کتاب حاضر بیشتر معطوف بوده است به آثار جبری یا آنچه مبنای جبر قدیم تلقی تواند شد.

§ ۳۰۴۰۴ نهضت علمی اسلامی - اگرچه پس از ظهور دین اسلام در مدت کوتاهی عربها بر بسیاری از مراکز تمدن آن عصر استیلا یافتند، و در نتیجه‌ی روابطی که خواهی نخواهی بین این قوم و دولتهای متمدن مغلوب برقرار شد عربها متوجه علوم و معارف گردیدند، قریب يك قرن و نیم طول کشید تا نهضت علمی اسلامی، در زمان خلافت (۱۳۶ - ۱۵۸ هـ ق) ابو جعفر منصور، دومین خلیفه‌ی عباسی، آغاز شد. و این نهضت در عهد خلافت (۱۷۰-۱۹۳ هـ ق) هارون الرشید ادامه یافت، و در خلافت (۱۹۸-۲۱۸ هـ ق) مأمون عباسی به کمال رسید.

منصور در ۱۴۵ هـ ق بغداد را بنا کرد، و آنجا را دارالخلافه‌ی خود قرار داد، و علماء و دانشمندان را از اطراف طلبیده به ترجمه‌ی کتب علمی از زبانهای یونانی و سریانی و هندی و فارسی به عربی واداشت.

از وقایعی که در تاریخ علوم در دوره‌ی اسلامی اهمیت دارد اینست که در عهد منصور هیئتی از هند به دربار وی آمد (۱۵۴ یا ۱۵۶ هـ ق)، و - به نقل از کتب اسلامی تاریخ علوم - در بین آنان دانشمندی بود به نام **کنکه** یا **منکه** که کتابی در علم نجوم همراه داشت، و از روی آن نجوم هندی را به دو نفر از منجمین دربار منصور، یکی **ابراهیم ابن حبیب فزاری** * و دیگری **یعقوب ابن طارق**، آموخت، و این دو تن

(*) در این باب رجوع شود به: تقی زاده، دروس، صص ۳۶ و ۳۸ و ۳۹ و ۵۶ و ۵۵؛

سارتن، مدخل، جلد اول، ص ۵۳۵؛ تاریخ الحکماء، ص ۱۷۷؛ نالینو، علم الفلك، ص ۱۵۶. بعد.

هر دو از منجمین بزرگ دربار منصور بودند .

کتابی که کنکه همراه آورده بود در نزد مسلمین به *سند هند* معروف شده ، و اصل آن مورد اختلاف است ، و بعضی آنرا همان سوری سدهات و برخی آنرا *براهمسهط* سدهات تألیف برهمکیت (§ ۳۰۳۰۲) میدانند ، و در هر حال ، ظاهراً لفظ سند هند تحریفی از لفظ سدهات است .

فزاری کتاب سند هند را به امر منصور ترجمه کرد ، و احتمالاً همین ترجمه منشاء ورود ارقام هندی به حوزه علمی بغداد بوده است .

چنانکه قبلاً اشاره کردیم ، نهضت علمی اسلامی در عهد خلافت مأمون به اوج رسید . وی دارالعلم معروف به *بیت الحکمه* را ، که مجهز به کتابخانه و رصدخانه بود در بغداد تأسیس کرد ، و در تهیهی نسخ یونانی جدّ بلیغ مبذول داشت ، و حتی هیئتی برای این منظور به دربار لئوی ارمنی ، امپراطور بیزانس ، اعزام نمود ، و مترجمین زبردست را به ترجمه‌ی این نسخه‌ها گماشت .

خلاصه ، شرح ترجمه‌ها و تألیفات و ارساد و اندازه گیریها و سایر کارهای علمی که در این دوره‌ی درخشان به عمل آمده ، و ذکرنام دانشمندانی که منشأ این آثار بوده‌اند در این مختصر نمیکنجد ، و از موضوع بحث ما نیز خارج است ، مگر در بعضی موارد که به آنها اشاره خواهد شد .



از جهت کارهای ریاضی ، حوزه‌ی بغداد تا اواخر قرن چهارم هجری رونق داشت ، و اگرچه از اواخر نیمه‌ی اول قرن سوم متدرجاً بعضی دانشمندان حوزه‌ی بغداد این شهر را ترک گفته به سایر بلاد اسلامی مهاجرت کردند ، قرون سوم و چهارم هجری را میتوان «عصر طلایی» ریاضیات در بغداد محسوب داشت .

تاریخ طلوع و غروب حوزه‌های علمی در مراکز مختلف تحت تسلط دولتهای اسلامی و انحطاط علوم عقلی در ممالک اسلامی از بحث ما خارج است ، و به همین اشاره

اكتفاميكينيم كه از اواخر قرن ششم هجرى تحقيقات علمى در اين ممالك روبه انحطاط گذاشت ، و مثلاً در علوم رياضى ، اگر از جمعى انگشت شمار بگذريم ، كسى كه بتواند با دانشمندان پيشين برابرى كند در سرزمينهاى تحت حكومتهاى اسلامى ظهور نكرد .

§ ۳۰۴۰۳ مترجمين - منابع عمده‌ى دانش رياضى دوره‌ى اسلامى در درجه‌ى اول آثار يونانى و سپس آثار هندى است ، و نظرى اجمالى به فهرست مترجمين و مؤلفين حوزه‌ى بغداد كوشى را كه دانشمندان اين حوزه در اخذ و بسط دانش خارجيان داشته‌اند بخوبى روشن ميسازد .

از يعقوب ابن طارق و ابراهيم ابن حبيب فزارى در § ۳۰۴۰۲ اسم برديم ، و گفتيم كه احتمالاً ترجمه‌ى سندهند كه به توسط فزارى بعمل آمد وسيله‌ى ورود ارقام هندى به حوزه‌ى علمى بغداد بوده است . وى شك ، زيجهائى كه بر اساس سندهند تنظيم شده - مانند زيچ خوارزمى (§ ۳۰۴۰۴) و زيجهائى اوليه‌ى احمد ابن عبدالله مروزى ، معروف به حبش حاسب ^۵ - ممدّ اين امر بوده است . بعلاوه در آثار علمائى اسلامى از كتابهاى با عناوين حساب هندى و امثال آن اسم برده ميشود ، كه حاكى از ورود رياضيات هندى - لااقل تا حدّى - در نزد رياضيون دوره‌ى اسلامى است .

اما در باب ترجمه‌هاى آثار يونانى به زبان عربى اطلاعات ما وسيعتر و قاطع‌تر است ، و اگر هم از آثار مترجمه‌ى بسيار زيادى كه در كتب تاريخ علوم ذكر شده ولى متأسفانه بر اثر تصاريّف زمان فقط اسمى از آنها مانده است بگذريم ، آثارى كه چاپ شده يا نسخ خطى آنها با نام و نشان در دست است گواه كافى بر شور و ولع دانشمندان حوزه‌ى بغداد به كسب دانش يونانى است .

از مترجمين معروف آثار رياضى يكي حجاج ابن يوسف ابن مَطَر است كه در عهد هارون الرشيد (خلافتش ۱۷۰-۱۹۳ هـ ق) و مأمون (خلافتش ۱۹۸-۲۱۸ هـ ق) رونق داشته و كتاب اصول (§ ۳۰۲۰۳۰۱) را يك بار به امر هارون و ديگر بار به

(۵) منجم معروف حوزه‌ى بغداد در عهد مأمون و معتصم . وى مخترع ظلّ در مثلثات است .

امرمأمون به عربی ترجمه کرده ، و اوّلی نخستین ترجمه‌ی اصول است به عربی[☆]
دیگر اسحاق ابن حنین (متوفی در ربیع الاول ۲۹۸ یا ۲۹۹ هـ ق) ، پسر حنین
ابن اسحاق^{☆☆} معروف ، است که طبیب و ریاضیدان و بزرگترین دستیار پدر بود ، و
بعضی آثار اقلیدس و ارشمیدس و نیز مجسطی بطلمیوس را به عربی ترجمه کرد و بعضی
ازین ترجمه ها را ثابت ابن قرّه (§ ۳۰۴۰۳۰۱) اصلاح نمود .

دیگر قُسطا ابن نُوقا البعلبکی (متوفی در ۳۰۰ هـ ق) ، ریاضیدان و طبیب و
فیلسوف و منجم مسیحی یونانی الاصل ، است ، که آثار بسیاری از یونانیان را ترجمه و
ویا ترجمه‌های دیگران را اصلاح کرد ، که از آن جمله است اصول اقلیدس (§ ۳۰۲۰۳۰۱)
و کتاب حساب دیوفانتوس (§ ۳۰۲۰۲) . و بعضی آثار هرون اسکندرانی (§ ۳۰۲۰۱) .
و وی خود صاحب تألیفات عدیده بوده ، از قبیل کتاب مدخل هندسه ، کتاب شکوک اقلیدس ،
کتاب اعداد ، کتاب استخراج مسائل عددی ، و کتاب در حساب تلافی در جبر و مقابله .

و دیگر هلال ابن هلال حمّصی (متوفی در حدود ۲۷۰ هـ ق) است که چهار
مقاله‌ی اوّل کتاب مخروطات آپولونیوس (§ ۳۰۲۰۳۰۳) را برای بنوموسی ترجمه کرد .
و دیگر ابوالفتح اصفهانی [ابوالفتح محمود ابن محمّد ابن قاسم ابن فضل
اصفهانی] است که احتمالاً در حدود ۳۷۰ هـ ق برآمده ، و وی تحریر نوی از همان کتاب
مخروطات پرداخته و پنج مقاله‌ی اوّل آنرا شرح کرده ، و کتاب تلخیص المخروطات را ، که
ملخصی از هفت مقاله‌ی اوّل مخروطات آپولونیوس است ، چنانکه در مقدمه‌ی آن کتاب
مذکور میباشد^(†) ، بنام علاءالدوله ابوکالیجار کرشاسف ابن علی ابن فرامرز ، ملقب

(☆) حجاج از اولین مترجمین مجسطی است به عربی .

(☆☆) ابوزید حنین ابن اسحاق العبادی (۱۹۴ - ۲۶۵ هـ ق) ، طبیب معروف و از بزرگترین
دانشمندان و رادمردان عصر خود ، که در خدمت بنوموسی (§ ۳۰۴۰۳۰۱) به جمع‌آوری و
ترجمه‌ی نسخ یونانی اشتغال داشت .

(†) نسخه‌ی شماره‌ی ۲۷۲۴ کتابخانه‌ی ایاصوفی که عکس آن در کتابخانه‌ی مرکزی

دانشگاه تهران موجود است .

به حسام امیرالمؤمنین[☆]، تألیف کرده است.

§ ۳۰۴۰۳۰۱ - باید دانست که بعضی از مترجمین آثار یونانی و غیره خود دانشمندان عالی مقام و صاحب تألیفات و تحقیقات گرانبها بوده‌اند، و برخی از دانشمندان مترجمینی عالی قدر در استخدام داشته‌اند.

از آن جمله میتوان سه برادر دانشمند را - محمد (متوفی در ۲۵۷ یا ۲۵۹ هـ ق) و احمد و حسن - معروف به بنوموسی، فرزندان موسی ابن شاگرد که خود از منجمین دربار مأمون بود، نام برد. بنوموسی در ریاضیات و نجوم مقام شامخی داشتند، و بعلاوه قسمت اعظم ثروت خود را وقف تهیه و ترجمه‌ی نسخ یونانی کرده بودند، و دانشمندان مترجم عالی مقامی چون حنین ابن اسحاق (ذیل صفحه‌ی ۹۹) و ثابت ابن قره در استخدام آنان بودند. آثار زیادی در ریاضیات و نجوم و مکانیک باین سه برادر منسوب است. از آن جمله است کتابی در مخروطات و کتابی در مساحت کرات و تثلیث زوایا و درج دو واسطه‌ی متناسب بین دو طول (۳۰۷۰۱ §). کتاب معروف حیل بنوموسی، در مکانیک، از این سه برادر است.

دیگر ابویوسف یعقوب ابن اسحاق کندی (متوفی در حدود ۲۶۵ هـ ق)، معروف به فیلسوف العرب، است که در فلسفه و زبان یونانی کمال تبخّر را داشت، و بسیاری از آثار یونانی بوسیله‌ی وی یا تحت سرپرستی او به عربی ترجمه شد، و نیز ترجمه‌های دیگران را اصلاح کرد. از آثار وی کتابی است در حساب هندی در چهار مقاله[†].
دیگر ثابت ابن قره [ابوالحسن ثابت ابن قره ابن مروان حرّانی] (۲۱۱-۲۸۸ هـ ق) است که از بزرگترین ریاضیون عرب و، بعلمت تسلطی که بر زبانهای عربی و

(☆) مقایسه شود با: دکتر محمد معین، چهار مقاله‌ی عروضی سمرقندی، تهران ۱۳۳۳-

۳۵، ص ۴۴۴.

(†) عده‌ی آثار منسوب به کندی قریب ۲۷۵ است. بسیاری از آثار وی بتوسط گِراردوس

کِرِمونِنسیس (Gerardus Cremonensis) (۱۱۱۴ - ۱۱۸۷)، مترجم معروف ایتالیائی،

به زبان لاتینی ترجمه شده است.

سربانی و یونانی داشته، از بهترین مترجمین آثار یونانیان بوده، و در واقع مؤسس دارالترجمه‌ای بوده که بسیاری از بستگانش در آن کار میکردند. آثار مترجمه‌ی وی یا ترجمه‌هایی که تصحیح و تنقیح کرده‌مشمول است بر کتاب کمره و اسعوانه (از ارشمیدس) اصول و معطیات (از اقلیدس)، مقالات ۵ - ۷ مخروطات آپولونیوس، و غیره. وی خود صاحب تألیفات نفیسی در ریاضیات بوده که از آن جمله میتوان دو مقاله راجع به حساب نیقوماخوس^{۶۶} و مقاله در تصحیح مسائل جبر پیرهان هندسی را نام برد.

نوهی او، ابواسحاق ابراهیم ابن سنان ابن ثابت ابن قره (متوفی در ۳۳۵ هـ ق) منجم و ریاضیدانی عالی‌مقام بوده و کتاب مخروطات آپولونیوس را شرح کرده و مقاله‌ای در رسم قطوع مخروطی بطریقه‌ی نقاط یابی به وی منسوب است، و بقول سارتن «طریقه‌ی وی برای تعیین سطح سهمی از طریقه‌ی ارشمیدس ساده تر و در واقع ساده‌ترین طرق حل این مسئله قبل از اختراع حساب اتگرال بوده است»^{۶۷}.

§ ۳۰۴۰۴ خوارزمی [محمد ابن موسی الخوارزمی] (متوفی در حدود ۲۳۲ هـ ق = ۸۴۶ م +) - خوارزمی یکی از بزرگترین ریاضیون و منجمین بیت‌الحکمه‌ی مأمونی (۳۰۴۰۲ §) است. وی دانش هندی و یونانی را تلفیق کرده^{۶۸}، ولی چون در زمان او هنوز ترجمه‌ی آثار یونانی به عربی در مراحل اولیه بود، بیشتر تحت تأثیر

(۶۶) صورت عربی نام نیکوماخوس، ریاضیدان یونانی که در اواخر قرن اول میلادی رونق داشته. اثر معروف وی کتابی است به نام مدخل علم حساب که قدیمترین اثر موجودی است که در آن حساب بعنوان علم مستقلی تلقی شده است. کسانی که خواستار اطلاع از مطالب این کتاب باشند می‌توانند به کتاب المدخل الی علم العدد (ترجمه‌ی ثابت ابن قره، با اهتمام ویلهلم کوئس، بیروت ۱۹۵۸) رجوع نمایند.

(۶۷) سارتن، مدخل. جلد اول، ص ۶۳۲.

(+) بروکلمان، جلد اول، ص ۲۴۰، چاپ ۱۹۴۳. سارتن تاریخ وفات او را ۸۵۰ م ب م

ضبط کرده است (مدخل، جلد اول، ص ۵۶۳).

(++) سارتن، مدخل، جلد اول، ص ۵۶۳.

هندیان بوده است * .

شاید علت عمده شهرت خوارزمی این باشد که وی اول کسی است که کتابی به اسم جبر و مقابله نوشته ، و از آن پس این اسم بر علمی که ما «جبر» میخوانیم مانده ، و نام این علم در السنه‌ی اروپائی نیز از نام کتاب خوارزمی گرفته شده است .^{۵۵}

اما انتخاب این اسم ناشی از دو عملی است که در حل معادلات معمول بوده و خوارزمی برای اول بار آنها را تنقیح و تدوین نموده ، و ازین راه کومکی به وارد کردن جبر در مرحله‌ی علمی نموده است . بیان این دو عمل بر طبق اصطلاحات دانشمندان اسلامی بدین شرح است † که هرگاه در یک طرف معادله « استثنائی » باشد (یعنی جمله‌ای که باصطلاح امروز منفی خوانده میشود) ، آن طرف را کامل میکنند ، بدین نحو که آن استثناء را اسقاط میکنند و معادل آنرا بر طرف دیگر می‌افزایند ، و این « تکمیل » را جبر خوانند ؛ و نیز هرگاه در دو طرف معادله دو جمله از یک جنس (باصطلاح امروز ، دو جمله‌ی متشابه) موجود باشد ، اگر این دو جنس در عدد (یعنی از حیث ضریب) مساوی باشند آنها را اسقاط کنند ، و الا آنرا در طرف اقل بکلی اسقاط کرده در طرف دیگر بجای عدد اکثر زیادتیی آنرا بر عدد اقل می‌گذارند ، و این عمل را مقابله خوانند †† .

نظر به اهمیت اساسی اعمال «جبر» و «مقابله» در حل معادلات ، خوارزمی کتاب خود را حساب الجبر و المقابله نامیده ، و چنانکه میگوید ††† آنرا به اشارهی مأمون تألیف

(۵) دایرة المعارف اسلام ، جلد دوم ، در مقاله‌ی خوارزمی .

(۵۵) برای تحولات این اسم در السنه‌ی اروپائی رجوع شود به سمیت ، تاریخ ، جلد دوم ،

صص ۳۸۸ - ۳۹۲ .

(†) مثلاً رجوع شود به کتزالحساب ، چاپ تهران ، ۱۲۷۹ هـ ق ، صص ۲۵۶ - ۲۵۷ .

(††) خلاصه ، بوسیله‌ی عمل جبر مثلاً معادله‌ی $۸ = ۱۲ - ۵x$ را بصورت $۵x = ۲۰$ می‌نوشتند ،

و بوسیله‌ی مقابله مثلاً معادله‌ی $۱۵x = ۱۲ + ۷x$ را بصورت $۱۲ = ۳x$ درمی‌آوردند . البته امروز هر دو نتیجه بوسیله‌ی عمل نقل جمله‌ای از یک طرف معادله به طرف دیگر بعمل می‌آید ، ولی قدما از اعداد منفی و تسهیلات ناشی از آنها بی‌خبر بودند .

(†††) کتاب الجبر و المقابله ، لمحمد بن موسی الخوارزمی ، چاپ مصر ، ۱۹۳۷ ، ص ۱۵ .

کرده است. رؤوس مسائل این کتاب عبارتست از قواعد حلّ معادلات درجات اول و دوم و اثبات هندسی دستورات حلّ معادلات درجه‌ی دوم (۳۰۶۰۷ §)، دستوراتی در باب چهار عمل اصلی و جذر، مسائلی که حلّ آنها به معادلات درجات اول و دوم راجع میشود، اربعی متناسبه، سطوح واحجام، و مسائل مربوط به تقسیم ارث.

جبر و مقابله‌ی خوارزمی در قرون وسطی نزد اروپائیان کمال شهرت را داشته و تا زمان ویت^{۴۵} مبنای مطالعات علمی ریاضیون اروپائی بوده، و چنانکه گفتیم، اسم علم جبر در السنه‌ی اروپایی از نام کتاب خوارزمی مأخوذ است^{۴۶}.

اثر عمده‌ی دیگر خوارزمی در ریاضیات کتابی است در «حساب هند» که اصل آن از بین رفته ولی ترجمه‌ی لاتینی آن مربوط به قرن چهاردهم میلادی در دست است، و آن ظاهرأ همان رساله‌ای است که درمآخذ اسلامی بنام کتاب الجمع والتفریق بحساب الهند آمده است، و بوسیله‌ی همین کتاب است که اروپائیان شمار هندی را آموختند.

§ ۳۰۴۰۵ سایر علمای معروف جبر در دوره‌ی اسلامی - عده‌ی کسانی

از ریاضیون دوره‌ی اسلامی که آثاری در علم جبر یا تحقیقاتی مربوط به این علم به آنان منسوب است زیاد است. ما در این جزء اکتفا میکنیم به چند تن از علمای درجه‌ی اول و بعضی از آنانکه اطلاع اجمالی از کارهایشان برای مقصودی که در پیش داریم مفید است.

§ ۳۰۴۰۵۰۱ ماهانی [ابوعبدالله محمد ابن عیسی ماهانی] - ماهانی ریاضیدان

و منجم و اصلاً از ماهان کرمان ولی رونقش در بغداد بوده است (در حدود نیمه‌ی قرن سوم هجری). از آثار ریاضی او شروحی است بر هندسه‌ی اقلیدس و بعضی آثار اراشمیدس.

(*) François Viète (۱۵۴۰ - ۱۶۰۳)، ریاضیدان فرانسوی و به احتمال قوی بزرگترین

ریاضیون قرن شانزدهم میلادی. وی سهم بزرگی در بسط جبر و مثلثات دارد.

(†) لفظ آلتوریم که بمعنی حساب یافتن محاسبه وارد زبانهای اروپائی شده نیز از نام

خوارزمی مشتق است. برای اطلاع بیشتر رجوع شود به: سمیث، تاریخ، جلد ۲، ص ۹ - ۱۱

و ۷۸ و ۸۸.

وی کوشش بسیار در حلّ مسئله‌ی ارشمیدس (§ ۳۰۷۰۱) کرده و آنرا به معادله‌ای که امروز به صورت $x^2 + a = cx^2$ نوشته میشود باز گردانیده، ولی از حل این معادله عاجز مانده است، و معادله‌ی مذکور در نزد ریاضیون اسلامی به معادله‌ی ماهانی معروف بوده است. *

معادله‌ی ماهانی را ابو جعفر خازن خراسانی (متوفی بین ۳۵۰ و ۳۶۰ هـ ق) بوسیله‌ی قطوع مخروطی حل کرد.

§ ۳۰۴۰۵۰۲ ابو کامل [ابو کامل شجاع ابن آسلم ابن محمد ابن شجاع الحاسب المصری] - ابو کامل از ریاضیون بزرگ دوره‌ی اسلامی و مصری الاصل است. رونق او را میتوان بین زمان محمد ابن موسی الخوارزمی (متوفی در ۲۳۲ هـ ق) و علی ابن احمد عمرانی (متوفی در ۳۴۴ هـ ق) دانست، چو ابو کامل جبر خوارزمی را تکمیل کرده و عمرانی جبر ابو کامل را شرح کرده است.

بقول سمیث (تاریخ، جلد اول، ص ۱۷۷)، هیچیک از معاصرین ابو کامل در حلّ معادلات و استعمال آنها در حلّ مسائل هندسی مهارت وی را نداشته، و بقول همین نویسنده، شهرت ابو کامل عمده بواسطه‌ی تحقیقاتی است که در باب مخمس و معشر و در حساب وجز کرده، و بقول سارتن (مدخل، جلد اول، ص ۶۳۰)، کرخی (§ ۳۰۴۰۵۰۷) فایده‌ی فراوان از کارهای او برده است.

از آثار ابو کامل کتاب جبر و مقابله و کتاب خطایین را میتوان نام برد.

§ ۳۰۴۰۵۰۳ ابو الوفای بوزجانی [ابو الوفاء محمد ابن محمد ابن یحیی ابن اسماعیل ابن عباس] (۳۲۸-۳۸۸ هـ ق) - ابو الوفاء از بزرگترین ریاضیون و منجمین ایرانی و متولد بوزجان قهستان بوده است. وی در ۳۴۸ هـ ق به عراق مهاجرت کرد و تاهنگام مرگ در آنجا بزیست. اهمیت کارهای ابو الوفاء در بسط علم مثلثات[†] و در نجوم

(* نیز رجوع شود به § ۳۰۷۰۲، § ۵۰۷۰۶، § ۶۰۴۰۴.

(†) بالخصوص وی طریقی برای استخراج جیب زاویه‌ی سی دقیقه ابداع کرده که نتیجه‌ی آن

تا هشت رقم با مقدار واقعی $\sin 30'$ مطابقت دارد.

از موضوع بحث ما و از گنجایش این مختصر بیرون است. از آثار جبری منسوب به وی میتوان اینها را نام برد: تفسیر کتاب خوارزمی در جبر و مقابله؛ کتاب تفسیر کتاب ذیوفنطس^۵ در جبر؛ تفسیر کتاب ابرخس⁺ در جبر؛ کتاب براهین قضایائی که ذیوفنطس در کتاب خود بکار برده بر حسب آنچه (ابوالوفاء) در کتاب تفسیر خود آورده است؛ کتاب در استخراج ضلع مکعب و مال مال و آنچه از اینها ترکیب شود؛ و غیره.

متأسفانه هیچیک از تفسیرهای ابوالوفاء بر کتابهای خوارزمی و دیوفانتوس در دست نیست، و رساله‌ی اخیر از فهرست فوق نیز بدست ما نرسیده است، ولی از روی عنوان آن میتوان احتمال داد که ابوالوفاء معادله‌ی $x^4 + px^2 = q$ را (شاید بوسیله‌ی نقاط تقاطع دو قطع $x^2 + y^2 + ax = b$ و $x^2 - y^2 = b$) حل کرده است.

§ ۳۰۴۰۵۰۴ خجندی [ابومحمد حامد ابن خضر خجندی] (متوفی در ۳۹۵ هـ ق) - وی اهل ماوراءالنهر و از منجمین و ریاضیون معروف زمان فخرالدوله دیلمی بوده و بیشتر در نجوم و مثلثات کروی کار کرده است. خجندی برهان ناقصی بر امتناع معادله‌ی $x^2 + y^2 = z^2$ آورده است.

§ ۳۰۴۰۵۰۵ ابوسهل کوهی [ابوسهل ویجن ابن رستم کوهی] - ابوسهل اصلاً از طبرستان بوده و در زمان عضدالدوله دیلمی و پسرش شرفالدوله میزیسته. کوهی نه فقط منجم دقیق و بزرگی بوده، بلکه در ریاضیات مقام شامخی داشته است.

(۵) رجوع شود به ذیل صفحه‌ی ۸۲.

(+) صورت نام هیپارخوس (Hipparchos) در مآخذ اسلامی. معروفترین شخصی که به این نام میشناسیم عالمی است از اهل نیقیه در ناحیه‌ی بیتونیا از آسیای صغیر، که گویا در حدود ۱۸۵ ق م متولد شده و در حدود ۱۲۵ ق م وفات یافته است، و از منجمین معروف قدیم می باشد. از طرف دیگر این ندیم از شخصی به نام ابرخس رفتی اسم می برد (اللهه رست، الفن الثانی من المقالة السابعة) که بگفته‌ی او صاحب کتابی در «صناعت جبر» بوده که ابوالوفای بوزجانی آنرا اصلاح کرده است. و این ابرخس ظاهراً منسوب است به رفینه از بلاد طرابلس شام. ویکه عبارتی از پلوتارک نقل می کند (جبر عمر خیام، ص ۷۲) که بقول وی مؤید این است که ابرخس منجم تألیفات دیگری علاوه بر آثار نجومی داشته است. معذک معلوم نیست که «ابرخس رفتی» همان ابرخس منجم است یا نه.

تحقیقات او درحلّ معادلات بالاتراز درجه‌ی دوّم جزء بهترین آثار جبرهندسی دوره‌ی اسلامی است. در رساله‌ای، نامش زیادات بر کتاب ارشمیدس، علاوه بر مسائل مقاله‌ی دوّم کتاب کره واستوانه‌ی ارشمیدس، به حلّ مسئله‌ی تعیین عرفچینی کروی میپردازد که حجمش مساوی سطح عرفچین مفروض و سطحش مساوی سطح عرفچین مفروض باشد، و پس از ساختن معادله‌ی مسئله در آن بحث میکند. اثر دیگر او کتاب پر ۳۴ رتام است مشتمل بر طرح پرکاری برای رسم قطوع مخروطی.

§ ۴۰۴۰۵۰۶ ابن هیثم [ابو علی حسن ابن حسن (یا حسین) ابن الهیثم البصری] (۳۵۴-۴۳۰ هـ ق) - ابن هیثم یکی از بزرگترین دانشمندان دوره‌ی اسلامی است. وی اوایل عمر را در بصره گذرانید و سپس به مصر رفت. محققین تاریخ علوم طرز فکر او را مانند دکارت می‌دانند. مؤلفات زیادی در علوم ریاضی و فیزیک و نجوم به ابن هیثم منسوب است* ولی متأسفانه اغلب آثار او از بین رفته است.

ابن هیثم مسئله‌ی ارشمیدس (§ ۳۰۷۰۱) را بوسیله‌ی تقاطع قطوع مخروطی حلّ کرده و تحقیقات خود را درین باب در رساله‌ی قول فی قسمة الخطّ الذی استعماله ارشمیدس فی کتاب الكرة والاسطوانه گرد آورده است، و ویکه ترجمه‌ای از آنرا به جبر ومقابلبه‌ی خیام خود ضمیمه کرده است.

§ ۴۰۴۰۵۰۷ - کرخی [ابوبکر محمد ابن حسن (یا حسین) حاسب کرخی] (متوفی در ۴۲۵ هـ ق) - کرخی از بزرگترین علمای جبر در قرن چهارم و اوایل قرن پنجم هجری است. اصل او از کرخ (در حومه‌ی بغداد) بوده†. آثار عمده‌ی وی

(* نام نود تألیف او در کتاب جبر ومقابلبه‌ی خیام مصاحب آمده است (ص ۱۱۶-۱۲۲).

از آن جمله است کتاب تحلیل مبرهن مسائل عدوی بطریق جبر ومقابله، تلخیص مقالات آپولونیوس در قطوع مخروطات، مقاله در حساب هندی، کتاب در پر ۳۴ قطوع مخروطی، استخراج چهار خطّ

(ظاهراً درحلّ معادله‌ی درجه‌ی پنجم $x^5 = a$. رجوع شود به § ۵۰۱۵۰۶۰۱، مثال چهارم).

(†) بعضی او را اهل کرخ نزدیک تهران کنونی ونسبت او را کرخی دانسته اند. رجوع شود به

صفحات ۷۳-۷۵ از مقاله‌ی عادل انبویا در مجله‌ی الدراسات الادبیه (شماره‌ی دوم وسوم، تابستان وپائیز ۱۳۳۸، نشریه‌ی دانشگاه لبنان، بیروت) و صفحات ۶۶-۶۹ از ملخص فارسی همان مقاله

در همان شماره‌ی مجله‌ی مذکور.

یکی کتاب الکافی فی علم الحساب است که عمدهٔ مبتنی بر کارهای یونانیان می‌باشد، و دیگر کتاب معروف اوست در جبر و مقابله، بنام فخری، که آنرا با اسم فخرالملک واسطی (ابو غالب محمد ابن علی ابن خلف)، وزیر بهاء الدوله و سلطان الدوله دیلمی و مقتول در ۴۵۷ هـ ق، تألیف کرده و از مهمترین تألیفات جبری دوره‌ی اسلامی است. فرانتس ویکه ترجمه‌ی فرانسوی ملخصی از این کتاب را به ضمیمه‌ی مقدمه‌ی جامعی در باب حلّ معادلات سیال در دوره‌ی اسلامی در پاریس چاپ کرده است (۱۸۵۳)، و بالاخص در مقدمه توضیح می‌دهد که کارهای ریاضیون اسلامی در این باب مبتنی بر کارهای دیوفانتوس (§ ۳۰۲۰۲) بوده، ولی ریاضیون مذکور راههای جدیدی برای حلّ مسائل سیال کشف کرده و معادلاتی از درجات بالاتر طرح و حلّ کرده‌اند، و کارهای فیبوناتچی^(۵) که معمولاً بدیع شمرده میشود اکثر از کارهای ریاضیون دوره‌ی اسلامی و خاصه کتاب فخری گرفته شده است.

§ ۳۰۴۰۵۰۸ ابوالجود [ابوالجود محمد ابن احمد ابن لیث] - وی از ریاضیون بزرگ و معاصر ابوریحان بیرونی (۳۶۲-۴۴۰ هـ ق) بوده و در حلّ معادلات درجه‌ی سوم و مسئله‌ی تثلیث زاویه و تقسیم دایره به هفت و نه جزء متساوی مطالعاتی کرده و در رساله‌ای، در پاسخ ابوریحان در باب تقسیم دایره به نه جزء متساوی، حلّ مسئله را به معادله‌ی درجه‌ی سوم $x^3 + 1 = 3x$ باز گردانیده، و در رساله‌ی دیگری، که آن نیز در جواب سؤال ابوریحان است، مسئله‌ی مورد بحث (§ ۳۰۷۰۳) را به معادله‌ای از درجه‌ی چهارم باز گردانیده و معادله را بوسیله‌ی قطوع مخروطی حلّ کرده است (§ ۳۰۷۰۳). بالاخره در جبر ختّام (§ ۵۰۱۱۰۱) اطلاعات جالبی از کارهای ابوالجود در حلّ معادلات درجه‌ی سوم آمده است.

§ ۳۰۵ تاریخچه‌ی علم جبر در دوره‌ی اسلامی - چنانکه سابقاً اشاره کردیم،

(۵) لئوناردو فیبوناتچی (Leonardo Fibonacci) یا لئوناردو دا پیسا (L. da Pisa)،

ریاضیدان ایتالیایی و احتمالاً بزرگترین ریاضیون قرون وسطی در دنیای مسیحی بود. در حدود

۱۱۷۵ میلادی متولد شده و بعد از ۱۲۴۵ وفات یافته است.

علم ریاضی دوره‌ی اسلامی مبتنی بر ریاضیات هندی و یونانی است، و اگر چه تأثیر روشها و افکار دانشمندان این دو قوم در ریاضیون اسلامی مورد بحث است، شاید با اطمینان خاطر بتوان گفت که، لااقل پس از مراحل اولیه‌ی نهضت علمی اسلامی، دانش ریاضی مسلمین - و بطور کلی « اندیشه‌ی ریاضی » ریاضیون اسلامی - تحت نفوذ آثار و افکار دانشمندان یونانی بوده است، و نه فقط پیروی از افکار ریاضی یونانیان و تقلید از ریاضیون یونانی باعث محدودیت‌هایی در ریاضیات دوره‌ی اسلامی شده بود، بلکه تسلط افکار فلسفی یونانیان در باب مفاهیم ریاضی (از قبیل عدد و کمیت) بردانشمندان دوره‌ی اسلامی بحدی بوده که تحقیقات ریاضی آنان را هم سخت تحت تأثیر گرفته و شدیداً محدود ساخته بود (مثلاً رجوع شود به § ۴۰۲۰۱)، و خاصه ریاضیدانهای فیلسوف و فلاسفه‌ی ریاضیدان حقایق ریاضی را بازبجه‌ی اصطلاحات فلسفی میکردند، و البته در پیچ و خم این بازی گمراه میشدند^۵.

پس از این مقدمه، می پردازیم به سیر عمومی دانش جبر در دست دانشمندان دوره‌ی اسلامی - در باب بعضی مسائل مخصوص بحث مفصل تری در § ۳۰۶۰۱ و § ۳۰۶۰۹ - ۳۰۷۰۳ - ۳۰۷۰۱ خواهد آمد.

بطور خلاصه میتوان گفت که جبر در دست علمای دوره‌ی اسلامی از جهاتی پیشرفت کرده و از طرف دیگر انحطاط یافته است.

اول دفعه ریاضیون اسلامی جبر را وارد مرحله‌ی علمی کردند، و آنرا فی حد ذاته، و نه مثلاً بصورت مجموعه‌ای از مسائل مشتت، مورد تحقیق قرار دادند و معادلات سه درجه‌ی اول را طبقه بندی کردند (§ ۳۰۶۰۶، و نیز § ۴۰۲)، و در واقع میتوان گفت که اولین کتاب در علم جبر همان کتاب خوارزمی (§ ۳۰۴۰۴) است، و در همین کتاب است که برای نخستین بار اعمال «جبر» و «مقابله» به صورت قواعد کلی منظمآ استعمال میشود.

(۵) نمونه‌ی آن بحث بی بنیاد خیام است در نقطه‌ی حل معادله‌ی دو مجذوری

($x^4 + ax^2 + b = 0$) به طریقی که امروز معمول است (§ ۶۰۴۰۲۰۱).

پیشرفت دیگری که بدست ریاضیون اسلامی در جبر حاصل شده استعمال جبر در هندسه است و بالعکس، و این امر در بسط هندسه‌ی تحلیلی تأثیر بسزائی داشته است. *

بطور کلی، در مطالعه‌ی آثار ریاضیدانان دوره‌ی اسلامی در جبر، گاهی به مواردی برمیخوریم حاکی از اینکه افکار و روشهایی مؤثر در بسط علم در ذهن آنان در شرف تکوین بوده، ولی متأسفانه از قوه‌ی بقل در نیامده یا صورت منظم علمی نگرفته است، و شاید، چنانکه ویکه میگوید، « این امر بعثت نداشتن اندیشه‌ی نافذ و مخترع نبوده بلکه صرفاً بسبب نداشتن وقت کافی بوده است » (رجوع شود به آخر § ۳۰۶۰۸).

از طرف دیگر، با اینکه کتاب علم حساب دیوفانتوس (§ ۳۰۲۰۲) در قرون اولای اسلامی بدست دانشمندان حوزه‌ی علمی بغداد رسیده بود، ریاضیون دوره‌ی اسلامی روش علامتی دیوفانتوس را به یکسو نهاده بهمان مرحله‌ی لفظی (§ ۳۰۱۰۲) عقب رفتند، و این همان انحطاطی است که بآن اشاره کردیم.

تحلیل چگونگی این مسئله، و بطور کلی تحلیل تأثیر افکار یونانی در دانشمندان دوره‌ی اسلامی مسئله‌ایست غامض که شاید هیچگاه بدرستی روشن نشود. از یک طرف می‌بینیم که محقق نکته‌ی سنجی چون خیّام چنان از روش دیوفانتوس غافل است که در سراسر رساله‌ی جبر وی کوچکترین اثری از استعمال علامات اختصاری دیده نمی‌شود، و از طرف دیگر در حل معادله‌ی $x^2 + bx = a$ (§ ۵۰۴۰۲) زوج بودن b و مجذور کامل بودن $a + (b/2)^2$ را شرط امکان مسئله می‌شمارد، و این قید را جز به تقلیدی بی مورد از دیوفانتوس حمل نتوان کرد، چو در مسائلی که مورد بحث دانشمند یونانی است نوع مسئله مقتضی منطق بودن جوابها است.

نمونه‌ی فاحش تر این روش متناقض کتاب معروف فخری است (§ ۳۰۴۰۵۰۷)

(*) رجوع شود به مطالب مقبّس از ویکه در § ۳۰۷۰۲؛ و نیز: سمیت، تاریخ، جلد

که مبتنی بر کتاب دیوفانتوس ولی از آن جامعتر و متضمن طرق نوین و مسائل جدید و از درجات بالاتر از دوّم است، ولی از مرحله‌ی لفظی تجاوز نمی‌کند. اگر از دیوفانتوس که مستقلاً به مسائل عددی راجع به معادلات پرداخته است بگذریم، باید گفت که در نزد یونانیان هندسه مرکز ریاضیات بود، و سایر مباحث این علم عملاً تحت الشعاع و تابع آن ملحوظ می‌شد. اما تسلط همین فکر بر ریاضیون اسلامی که خود جبر را به مرحله‌ی علمی وارد کردند - و خاصه در مورد ختّام که تجرید را بآن پایه رسانیده که معادلات را فی حدّ ذاته و قطع نظر از منشاء (مثلاً هندسی) آنها مورد بحث قرار می‌دهد - موجب شگفتی است.



منظور از سطور فوق، چنانکه اشاره کردیم، نظر اجمالی به سیر عمومی علم جبر در دوره‌ی اسلامی بود، و بهمین جهت از مسائل و مباحث خاص و کارها و زحمات ریاضیون دوره‌ی اسلامی در حلّ و بحث آنها صحبتی نکردیم. در این باب آنچه مربوط به کلیات جبر و معادلات درجات اوّل و دوّم و دستگامهای معادلات و معادلات سیّال است با کمال اختصار در ۳۰۶۰۹-۳۰۶۰۱ §§ گفته خواهد شد. تحقیقات ریاضیدانان اسلامی در معادلات درجه‌ی سوّم در ۳۰۷۰۲ § و ۴۰۲ § و در معادلات درجات بالاتر در ۳۰۷۰۳ § باجمال آمده است. امّا در باب سایر مطالب مربوط به جبر و علم حساب - از قبیل دستورات جمع کردن سلسله‌ها، یا تحقیقاتی از قبیل آنچه ثابت ابن قرّه (۳۰۴۰۳۰۱ §) در اعداد متحابّه کرده است، و غیره - چیزی نمی‌گوئیم، و کسانی که خواستار اطلاعاتی در این مسائل هستند باید به کتابهای تاریخ علوم ریاضی مراجعه کنند.

§ ۳۰۶ معادلات جبری

§ ۳۰۶۰۱ مقدمه - موضوع اصلی جبر مقدماتی حلّ معادلات و مسائلی است که بآنها باز می‌گردد. بنا برین، درین مبحث تفصیل بیشتری در تاریخ حلّ معادلات و مطالب وابسته به آن می‌آوریم.

§ ۳۰۶۰۲ علامات جبری - قدیمترین علامات اعمال که از آنها خبر داریم از مصریان است (۳۰۱۰۴)، ولی ظاهراً دیوفانتوس (۳۰۲۰۲) اول کسی است که کوشش منظمی در وضع علاماتی برای اعمال کرده است، اما چون قدیمترین نسخه‌ای که از کتاب علم حساب او در دست است قریب هزار سال بعد از اصل کتاب نوشته شده نمیتوان اطلاع قاطعی از علاماتی که وی بکار برده عرضه کرد.

§ ۳۰۶۰۳ اعداد منفی - درین مقام ذکر مختصری از اعداد منفی خالی از فایده نیست، زیرا بی خبری ازین اعداد و تسهیلات و تعمیم‌های ناشی از آنها یکی از مشکلاتی بوده است که متقدمین در طبقه‌بندی و حلّ معادلات و مسائل جبری داشته‌اند، و مثلاً خوارزمی بجای اینکه از معادلات درجه‌ی دوّم بطور کلی بحث کند، و خیّام بجای بحث از معادله‌ی کلی درجه‌ی سوّم، در طرفین معادله، بوسیله‌ی اعمال «جبر» و «مقابله» (۳۰۴۰۴)، نقل و انتقالاتی بعمل می‌آورند که، باصلاح ما، جمله‌ی منفی در معادله نباشد. و هم‌چنین، خیّام، باتسامحی که از وی عجیب است، و با احتمال قوی ناشی از تسلط افکار یونانیان بر اوست، در مواردی هم که شکل بالعیان میتواند ریشه‌های منفی را نشان دهد آنها را نادیده میگیرد.

مفهوم عدد منفی را فی حدّ ذاته نباید با عدد منفی بعنوان مفروق یا با احکامی از قبیل $(a-b)(c-d) = (ac+bd) - (ad+bc)$ که متضمّن اعمالی بر اعداد منفی است اشتباه کرد. بسیاری از اینگونه قواعد قرن‌ها پیش از پیدایش مفهوم اعداد منفی معلوم بوده است. چینیه‌ها در ایّام قدیم (لااقل از حدود ۲۰۰ سال قبل از میلاد) از اعداد منفی بعنوان مفروق صحبت کرده‌اند، و نیز، اگرچه دیوفانتوس معادله‌ی $4x + 20 = 0$ را بعلمت اینکه منجر به $x = -5$ میشود «نامعقول» شمرده است، مسلماً از مفهوم انتزاعی عدد منفی بی‌خبر بوده، و حال آنکه یونانیان احکام هندسی معادل دستورات بسط $(a-b)^2$ و $(a-b)(a+b)$ را میدانسته و ثابت کرده بودند.

ریاضیون عربی نویس درین باب چیزی بر آثار یونانی نیفزوده‌اند و محمّد ابن موسی خوارزمی، و دیگران که بعد از او به جبر پرداخته‌اند، همان قواعد

علامات را بدون تصرفی تکرار کرده‌اند، و فقط از دوره‌ی رنسانس بی‌بعد است که اعداد منفی فی حد ذاته بتدریج مورد توجه قرار می‌گیرند. در نتیجه‌ی همین بی‌خبری، طبقه‌بندی معادلات در نزد علمای اسلامی ناقص بوده، زیرا مثلاً شامل معادله‌ی $ax+b = 0 (a > 0, b > 0)$ نشده است.

۳۰۶۰۴ § **جمل معادله** - پیش از رواج استعمال علامات، الفاظی برای نامیدن جمل معادلات بکار میرفت. **آحمس** (۳۰۱۰۴ §) مجهول را **آه** یا **هائو**، بمعنی «جرم» یا «مقدار» یا «توده» و دیوفانتوس آنرا «عددی نامعلومی از آحاد» مینامیده‌اند. در جبر هندسی یونانیان، قوه‌ی دوّم مجهول (یعنی حاصل ضرب آن در خودش) «عدد چهار گوشه» یا **دولامیس** (= قوه) خوانده می‌شده. دیافانتوس قوه‌ی سوّم را **کوبوس** (= مکعب) و قوه‌ی چهارم را **دولامورولامیس** (قوه - قوه) و قوه‌ی پنجم را **دولاموکوبوس** (قوه - مکعب) و قوه‌ی ششم را **کوبوکوبوس** (مکعب - مکعب) خوانده است.

ریاضیون عربی نویس مجهول را **شیء** خوانده‌اند، و لفظ لاتینی **یس** (res)، بمعنی شیء، که در قرون وسطی در مغرب زمین برای نامیدن مجهول بکار میرفته ناشی از همین جا است. ضمناً ریاضیون عربی نویس مجهول را (نسبت به مربع آن) **ضلع** یا **جذر** نیز می‌خواندند. لفظ اخیر در لغت بمعنی بیخ و ریشه است، و لفظ لاتینی **رادیکس** (radix)، بمعنی ریشه، که در اروپا بکار میرفته ناشی از این تسمیه می‌باشد، و بعضی معتقدند که علامت $\sqrt{\quad}$ ، که امروز برای نشان دادن ریشه بکار می‌رود و اوّل بار در آثار ربع اوّل قرن شانزدهم دیده می‌شود، از شکل حرف **r** گرفته شده است.

ریاضیون عربی نویس قوه‌ی دوّم مجهول را **مال** می‌خواندند، و لفظ لاتینی **تَنسوس** (censos)، بمعنی ثروت، که سابقاً در اروپا به همان منظور بکار میرفته از این تسمیه ناشی است. قوه‌ی سوّم را **مُعبیا** یا **مکعب** مینامیدند، و نام سایر مراتب مجهولات ترکیبی از این الفاظ بوده است، باین شرح:

شیء، جنر، ضلع	مجهول (x)
مال [☆]	قوهی دوّم مجهول (x ^۲)
کعب	قوهی سوّم مجهول (x ^۳)
مال مال	قوهی چهارم مجهول (x ^۴)
مال کعب	قوهی پنجم مجهول (x ^۵)
کعب کعب	قوهی ششم مجهول (x ^۶)
...	...

جمله‌ی معلوم معادله نیزاسامی مختلف داشته است. دیوفانتوس آنرا موناوس، و ریاضیون عربی نویس «عدد»، «عدد مفروض»، «اعداد»، «آحاد»، و حتی «دراهم» (جمع «درهم») خوانده‌اند †.

دیوفانتوس ضرب را پلٹوس مینامیده که به معنی گروه‌است، و ریاضیون عربی-نویس گاهی لفظ عدّه را برای این منظور بکار میبردند، ولی اغلب ضرب را اسقاط میکردند. (رجوع شود به امثله‌ی § ۳۰۶۰۵).

§ ۳۰۶۰۵ بیان معادلات - بیان معادلات تابع علامات اعمال و الفاظ یا علاماتی است که نماینده‌ی جمل معادله است.

(☆) باید دانست که لفظ مال به معنی مطلق مقدار نیز استعمال شده است. مثلاً یکی از

مسائل فخری (§ ۳۰۴۰۵۰۷) و حل آن اینست:

«مال ضربته فی نفسه عاد اربعة امثال المال الاول فاجعل المال شيئاً واضربه فی نفسه یکن

مالاً و ذلك یعدل اربعة اشياء والشيء اربعة دراهم و هوالمال».

که در آن فقط در موردی که لفظ مال با حروف درشت چاپ شده بمعنی مربع است:

«مقداری است که اگر در خودش ضرب شود چهار برابر مقدار اول حاصل گردد. مقدار

اول را شیء [x] قرار دهید، و آنرا در خودش ضرب کنید. مال [x^۲] حاصل می‌شود، که

معادل چهار شیء [4x] است. پس شیء چهار درهم است، و آن همان مقدار [مطلوب] می‌باشد.

(†) لفظ «عدد» مترادف با آنچه ما امروز عبارت جبری می‌خوانیم نیز استعمال

می‌شده است.

در دوره‌ی اسلامی بیان معادلات جنبه‌ی لفظی صرف داشته [☆]، و مثلاً معادله‌ی

$$x^2 + bx = a$$

را چنین بیان میکردند:

اموال و جذور تعدل عددا (خوارزمی)

(مالهائی و جذرها معادل عددی است).

مال و جذر يعدل عددا (خیّام)

(مالی و جذر معادل عددی است).

والبته استعمال «ضلع» و «اضلاع» و «شیء» و «اشیاء» (§ ۳۰۶۰۴) بجای «جذر» و «جذور» هم معمول بوده است.

§ ۳۰۶۰۶ طبقه بندی معادلات - اولین طبقه بندی معادلات در آثار دانشمندان

اسلامی همان است که در جبر و مقابله‌ی خوارزمی (§ ۳۰۴۰۴) آمده است. وی

«اعدادی» [☆] را که در «جبر و مقابله» محتاج الیه است منحصر به سه دسته - جذرها

(مجهول) و مالها (قوه‌ی دوم مجهول) و عدد (معلوم) - می‌شمارد، [†] و سپس از معادله‌ی

بعضی ازین اقسام با بعضی دیگر یا معادلات بین سه قسم مذکور صحبت میکند. در

اصطلاح ریاضیون اسلامی معادلاتی که ما دوجمله‌ای می‌خوانیم مقترنات و معادلاتی

که بیش از دوجمله داشته اند مقترنات و گاهی مرگبات خوانده می‌شدند. مفردات

خوارزمی عبارتست ازین سه معادله:

$$(ax^2 = bx) \quad \text{مالهائی معادل جذرهائی است}$$

$$(ax^2 = c) \quad \text{مالهائی معادل عددی است}$$

$$(bx = c) \quad \text{جذرهائی معادل عددی است}$$

دسته‌ی دوم در طبقه بندی خوارزمی معادلات کامل درجه‌ی دوم است:

$$(x^2 + bx = a) \quad \text{معادله‌ی بین مالها و جذرها با عدد}$$

$$(x^2 + a = bx) \quad \text{معادله‌ی بین مالها و عدد با جذرها}$$

(☆) به ذیل ☆ صفحه‌ی ۱۱۳ نیز رجوع کنید.

(☆☆) رجوع شود به ذیل † صفحه‌ی ۱۱۳.

(†) کتاب الجبر والمقابله لمحمد ابن موسی الخوارزمی، چاپ مصر، ۱۹۳۷، ص ۱۶.

معادله‌ی بین جذرها و عدد با مالها $(bx + a = x^2)$

خیّام اول کسی است که ازین مرحله گذشته معادلات سه درجه‌ی اوّل و دوّم و سوّم را طبقه بندی کرده است (§ ۵۰۲ و § ۶۰۴۰۳).

طبقه بندی معادلات را بر حسب درجه از کارهای ریاضیون اروپائی میدانند، و درواقع چنین طبقه بندی باتوجه به ضرایب حرفی که ممکن است مثبت یا منفی باشند ازقرن هفدهم رواج یافته^{*}، ولی مطلبی که درحدود اطلاعات محدود نگارنده تازگی دارد اینست که طبقه بندی معادلات سه درجه‌ی اوّل در رساله‌ی تحلیل... خیّام (قسمت ششم کتاب حاضر)، برخلاف آنچه در رساله‌ی وی درعلم جبر آمده (§ ۵۰۲)، براساس درجه‌ی معادله است، بدین معنی که در این رساله، پس از اشاره به معادلات درجات اوّل و دوّم ابتداءً از «معادله‌ی بین کعب و سایر مراتب»، یعنی معادله‌ی درجه‌ی سوّم، سخن میرود، و سپس این معادلات را به مفردات و مقترنات تقسیم میکند (§ ۶۰۴۰۳).

چنانکه قبلاً اشاره کردیم (§ ۳۰۶۰۳)، طبقه بندی معادلات قبل از کشف و رواج اعداد منفی ناقص بوده است.

§ ۳۰۶۰۷ حلّ معادلات درجات اوّل و دوّم - با احتمال قوی حلّ معادلات در اوایل بوسیله‌ی «امتحان» انجام میگرفته؛ ولی حتّی در زمان آحمس (حدود ۱۵۰۰ ق م یا بیشتر) طرق امتحان تا حدّی منظم و از صورت حدس صرف خارج شده بود⁺ و در واقع طریقه‌ی خطّائین در استخراج مجهولات صورت کامل شده و منقّحی از طریقه‌ی «امتحان» و «تصحیح» است، و این طریقه بوسیله‌ی ریاضیون دوره‌ی اسلامی به اروپائیان رسیده است.

در باب معادلات ساده‌ی درجه‌ی اوّل مطلب قابل ذکر نیست جز یادآوری

(*) سمیت، تاریخ، جلد دوم، ص ۴۴۳.

(+) رجوع شود به § ۳۰۱۰۴، و برای توضیحات نسبتاً جامع به سمیت، تاریخ، جلد

دوم، ص ۴۳۶.

تنقیح حلّ این معادلات بوسیلهی اعمال «جبر» و «مقابلہ» (§ ۳۰۴۰۴).
 قدیمترین اثر مشتمل بر حلّ مسائلی که صورت جبری آنها از درجهی دوّم
 است پایروس برلن است (§ ۳۰۶۰۸) * .
 جبرهندسی یونانیان (§ ۳۰۲) مشتمل بر مسائلی است که از نظر جبری به
 معادلات درجهی دوّم باز میگردد، و تفصیل این مطلب در فروع § ۳۰۲ گذشت .
 از اطلاعات هندیان در § ۳۰۳۰۲ یاد کردیم .
 حلّ معادلات کامل درجهی دوّم در کتاب خوارزمی (§ ۳۰۴۰۴) مبتنی بر طریق
 یونانی است . وی این معادلات را ، عند اللزوم پس از تقسیم طرفین بر ضریب جملهی
 درجهی دوّم ، به سه دسته تقسیم میکند (§ ۳۰۶۰۶) که باعلامات امروزی چنین نوشته
 می شود :

$$(۱) \quad x^2 + bx = a,$$

$$(۲) \quad x^2 + a = bx,$$

$$(۳) \quad bx + a = x^2,$$

و سپس به ذکر طریق حلّ هر يك و اثبات هندسی آن می پردازد . برای مزید
 توضیح روش خوارزمی را در معادلهی اوّل با تفصیل و در دو معادلهی دیگر به اجمال
 می آوریم . **

(I) - « مالی وده جذر آن معادل سی و نه درهم است » . †

« مفتاح آن اینست که جذرها را نصف کنیم و آن در این مسئله پنج است . پس
 آنرا در مثل خودش ضرب می کنیم می شود بیست و پنج و آنرا برسی و نه می افزائیم
 میشود شصت و چهار . پس جذر آنرا میگیریم و آن هشت است . پس نصف جذرها را که
 پنج است از آن میکاهیم سه باقی میماند و آن جذر مالی است که میخواستیم و آن مال
 نه است » .

(*) سمیت ، تاریخ ، جلد دوم ، ص ۴۴۳ .

(**) با استدلال خیام در اجزای § ۵۰۴ مقایسه کنید .

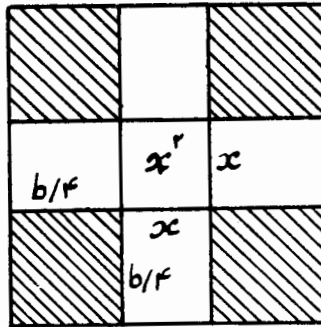
(†) $x^2 + 10x = 39$. صورت کلی : $x^2 + bx = a$.

خلاصه‌ی این بیان طولانی اینست که جواب معادله‌ی (۱) چنین می‌باشد:

$$x = \sqrt{(b/2)^2 + a} - (b/2)$$

سپس خوارزمی دو دلیل در اثبات طریقه‌ی مذکور می‌آورد که هر دو بعلمت روش لفظی، وی خیلی طولانی است و خلاصه‌ی آنها اینست.

دلیل اول - مال (یعنی x^2) را بوسیله‌ی مربعی به ضلع x نمایش می‌دهد. چون هر ضلع مربع را $b/4$ امتداد داده قسمت خالی از پرداز شکل را تمام کنیم، سطح قسمت خالی از پرداز $x^2 + bx$ خواهد بود، که بنا بر معادله مساوی a است. حال قسمت خالی از پرداز را با افزودن چهار مربع، هر یک به مساحت $b^2/16$ ، به صورت مربعی در می‌آوریم. سطح این مربع $(b/2)^2 + a$ است، و لهذا ضلع آن که در شکل $x + b/2$



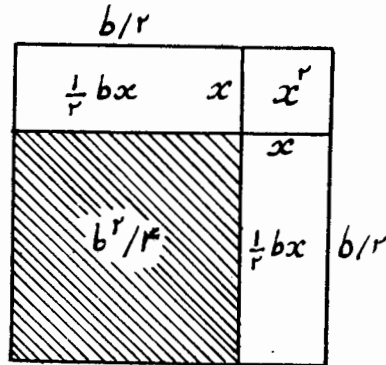
است، برابر $\sqrt{(b/2)^2 + a}$ می‌باشد، و بالنتیجه

$$x = \sqrt{(b/2)^2 + a} - (b/2)$$

(البته خوارزمی از ریشه‌ی منفی بی‌خبر است).

دلیل دوم - در دو طرف مربعی که نمایش مال (x^2) است دو مستطیل که ضلع

دیگر هر یک $b/2$ است می‌سازیم.



قسمت خالی از پرداز در شکل $x^2 + bx$ و بموجب معادله مساوی a است، و چون قسمت پرداز دارا که $(b/2)^2$ است بر آن بیفزائیم، مربع بزرگ، بمساحت $(b/2)^2 + a$ حاصل میشود، که بالنتیجه ضلع آن $\sqrt{(b/2)^2 + a}$ است، و چون همین ضلع در شکل $x + b/2$ است، خواهیم داشت:

$$x = \sqrt{(b/2)^2 + a} - (b/2)$$

(II) - «مالی و بیست و یک درهم معادل ده جذر آنست».

جواب این معادله را خوارزمی چنین میدهد:

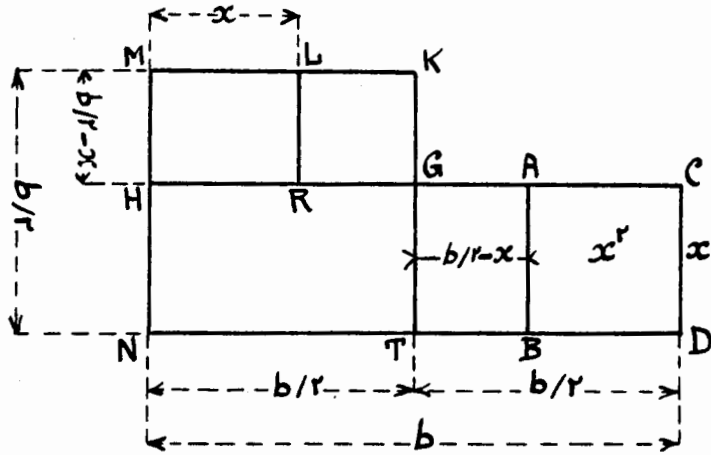
$$x = (b/2) \pm \sqrt{(b/2)^2 - a}$$

و گوید اگر $a < (b/2)^2$ مسئله ممتنع است و اگر $(b/2)^2 = a$ جواب معادله $x = b/2$ میباشد، و نیز گوید که فقط همین صنف از معادلات سه جمله‌ای درجه‌ی دوم است که در آن می‌توان با افزودن $a + \sqrt{(b/2)^2 + a}$ به $b/2$ یا کاستن آن عمل کرد، یعنی فقط همین صنف است که ممکن است دو جواب (مثبت) داشته باشد.

دلیل (+) - فرض کنیم $AD = x^2$ و $HB = a$. نقطه‌ی G وسط HC است. مربع GL را که ضلعش مساوی AG است ساخته شکل را تمام میکنیم.

(*) $x^2 + 21 = 10x$. صورت کلی: $x^2 + a = bx$.

(†) خوارزمی در مورد معادله‌ی $x^2 + 21 = 10x$ استدلال می‌کند.



بموجب شکل $HN \cdot HC = bx$ ، و لهذا بموجب معادله، $HD = x^2 + a = HN \cdot HC$ ؛
 و چون $NH = x$ ، $HC = b$ ، اینک میتوان مقادیر طولها را به شرحی که در شکل مندرج
 است تعیین کرد. سپس گوئیم $MR = TA$ ، و لهذا

$$HT + MR = HT + TA = HB = a$$

$$KR = MT - (HT + MR) = (b/2)^2 - a$$

$$x = AC = CG - GA = b/2 - GK = (b/2) - \sqrt{(b/2)^2 - a}$$

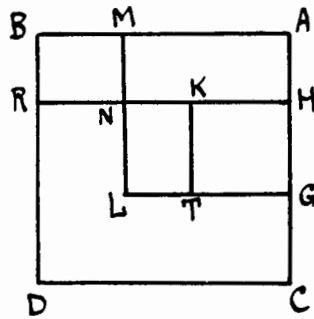
(خوارزمی برای جواب دیگر معادله دلیل نمی آورد).

(III) - «سه جذر و چهار عدد معادل مال است».

$$x = \sqrt{(b/2)^2 + a} + (b/2) \quad \text{جواب:}$$

دلیل - فرض کنیم $AD = x^2$ و $HC = b$. نقطه‌ی G وسط HC است. مربع HT
 را می‌سازیم و LT را مساوی AH جدا کرده شکل را تمام می‌کنیم. بموجب شکل

$$(\ast) \quad x^2 - 2x + a = bx \quad \text{صورت کلی:} \quad bx + a = x^2$$



$HD = bx$ ، $HB = x^2 - bx$ ، و لہذا بموجب معادله، $HB = a$. باسانی معلوم میشود که
و، $BN = TN$

$$a = HB = AN + NB = AN + TN$$

$$GM = HT + (AN + TN) = (b/2)^2 + a$$

$$x = AG + GC = \sqrt{(b/2)^2 + a} + (b/2)$$

فہوالمطلوب .

طریق خیام در حل معادلات درجهی دوم سه جمله‌ای ساده تر و منقح تر از طریق
خوارزمی ولی بر همان اساس است (§§ ۵۰۴۰۲-۵۰۴۰۴) .

§ ۳۰۶۰۸ دستگاہهای چند مجهولی - قدما با دستگاہهای چند مجهولی زیاد
سروکار نداشته‌اند . قدیمترین اثر از مسائل چند مجهولی در مصر بدست آمده است ، و
پاپیروسهای برلن (شماره ۶۶۱۹) و کاهون ، مربوط به دوره‌ی پادشاهی وسطای مصر
(حدود ۲۱۶۵ - ۱۷۵۵ ق م) ، مشتمل بر مسائلی ازین قبیل میباشد . *

ظاہراً دستگاہهای چند مجهولی در قرن چهارم قبل از میلاد در یونان سابقه داشته
است . در آثار دیوفانتوس (§ ۳۰۲۰۲) نیز آثاری از اینگونه دستگاہها دیده میشود ،
و وی مجهولات را « عدد اول » و « عدد دوم » و غیره می خوانده است .
ہندیان مجهولات را در دستگاہها با اسامی رنگها می خوانده‌اند .

در دوره‌ی اسلامی مسائل چند مجهولی چندان مورد توجه نبوده است. دستگاه‌هایی که در کتاب فخری (§ ۳۰۴۰۵۰۷) آمده دستگاه‌های سیال (§ ۳۰۶۰۹) است. در این مقام مقتضی است به نکته‌ی بسیار جالبی در کتاب فخری اشاره کنیم، و آن اینست که کرخی در دو مسئله‌ی دومجهولی، عیناً بطریقی که ما با x و y عمل میکنیم، مجهول دوم را با لفظ خاصی نامیده است، منتهی این لفظ در دو مسئله یکسان نیست[⊛] و چنانکه وپکه می‌گوید^{⊛⊛}، این نمونه‌ای از قدم نهادن در راه کشف بسیار مهمی است، و اینکه ریاضیون «عرب» این راه را به پایان نرسانیده‌اند بعلمت نداشتن اندیشه‌ی نافذ و مخترع نبوده بلکه صرفاً بسبب نداشتن وقت کافی بوده است.

§ ۳۰۶۰۹ معادلات و دستگاه‌های سیال - مسائلی که حل آنها به معادلات سیال[†] باز میگردد بسیار قدیمی است، و مسئله‌ی تعیین مثلثات قائم‌الزاویه با اضلاع صحیح، یعنی تعیین جوابهای صحیح معادله‌ی $x^2 + y^2 = z^2$ ، مورد توجه دانشمندان یونان از جمله فیثاغورس و افلاطون و اقلیدس و ارشمیدس بوده است. اما اول کسی که جدّاً به معادلات سیال پرداخته دیوفانتوس (§ ۳۰۲۰۲) است.

اثر عمده‌ی دانشمندان دوره‌ی اسلامی درین باب کتاب فخری از کرخی (§ ۳۰۴۰۵۰۷) است.

§ ۳۰۷ درجه‌ی سوم و درجات بالاتر.

§ ۳۰۷۰۱ چند مسئله‌ی تاریخی - در بحث تاریخی از معادلات درجه‌ی سوم همواره اسم چند مسئله درکار می‌آید، و لهذا بی‌مناسب نیست که مقدمه‌ی این مسائل را بخوانند کان معرفی کنیم تا بهنگام مراجعه سرگردان نشوند.

قدیمترین این مسائل یکی مسئله‌ی تضعیف مکعب و دیگری مسئله‌ی تثلیث

(⊛) در يك مسئله «قسط» و در دیگری «قسم».

(⊛⊛) فخری، ص ۱۱.

(†) يك معادله با چند مجهول، یا بطور کلی دستگاهی که در آن عده‌ی مجهولات بیش

از عده‌ی معادلات باشد. درین گونه معادلات معمولاً جوابهای صحیح یا منطبق^{•••} مطلوب است.

زاویه است، و سه مسئله‌ی معروف به مسائل ثلاثه عبارتست از همین دو مسئله و مسئله‌ی ترییع دایره[☆]، و این سه مسئله از قدیم الایام نزد یونانیان معروف بوده‌است. منظور از تضعیف مکعب تعیین مکعبی است که حجمش دو برابر حجم مکعب مفروض باشد. اگر a ضلع مکعب مفروض و x ضلع مکعب مطلوب باشد، حل مسئله به حل معادله‌ی $x^3 = 2a^3$ و، از جنبه‌ی هندسی، به رسم خطی مانند x که درین معادله صدق کند باز می‌گردد.[†]

مسئله‌ی تثلیث زاویه تقسیم زاویه‌ی مفروض است به سه جزء مساوی، و اگر a جیب زاویه‌ی مفروض و x جیب ثلث آن باشد، از نظر جبری حل مسئله به حل معادله‌ی $4x^3 = 3x - a$ باز می‌گردد.

حل مسئله‌ی تضعیف مکعب و بطور کلی معادله‌ی درجه‌ی سوم دو جمله‌ای را میتوان به مسئله‌ی دیگری بازگردانید که آن نیز شهرتی بسزا دارد، و ما آنرا درج دو واسطه‌ی متناسب بین دو طول مفروض خوانیم.

(☆) یعنی رسم مربعی همسطح دایره‌ی مفروض.

(†) در باب مسئله‌ی تضعیف مکعب افسانه‌ای باین مضمون از یونانیان روایت شده که در زمان افلاطون مردم آتن دوچار وبائی سخت شدند که اطباء از علاجش عاجز ماندند. ناچار به عابدی که در معبد دِلوس مقام داشت مراجعه کردند، و وی سرش داد که راه علاج وبا تضعیف میز آپولون است. اجرای این امر بنظر مردم خیلی آسان آمد. پس میزی ساختند که ابعادش مضاعف ابعاد آن میز بود، ولی بلا سخت‌تر گردید، و خداوند مردم را آگاهی داد که منظورش میزی است که حجم آن دو برابر حجم میز آپولون باشد. مردم وقتی خود را عاجز از این‌کار دیدند از افلاطون استمداد جستند. . . .

چنانکه در متن گفته می‌شود، حل مسئله‌ی تضعیف مکعب را می‌توان به مسئله‌ی درج دو واسطه‌ی متناسب بین دو خط مفروض تحویل کرد، و شاید صورت افسانه‌ی مذکور در کتب اسلامی (مثلاً رجوع شود به: مصاحب، جبر و مقابله‌ی خیام، ص ۲۷؛ یا شیخ بهاء‌الدین عاملی، کشکول، چاپ تهران، ۱۳۱۸ هـ ق، صص ۱۷۳ - ۱۷۴) - که بموجب آن، چون مردم از افلاطون استمداد جستند، وی گفت چون «شما را نفرت از هندسه بوده حق تعالی شما را باین صورت تنبیه فرمود، و گفت «هر گاه که استخراج خطین بر نسبت واحده توانید کرد مقصود حاصل گردد»- تلفیقی از افسانه‌ی یونانی و تحویل مذکور و اهمیت معروف هندسه در نزد افلاطون باشد.

منظور ازین مسئله اینست که هرگاه دو طول a و b مفروض باشد، دو طول مانند x و y تعیین کنیم که*

$$(۱) \quad a : x = x : y = y : b .$$

ازین معادلات حاصل می‌شود:

$$(۲) \quad y^2 = bx, \quad (۳) \quad xy = ab,$$

و بالنتیجه،

$$(۴) \quad x^2 = a^2 b, \quad (۵) \quad y^2 = ab^2 .$$

تعیین هندسی وسایط مطلوب از همین معادلات استنباط می‌شود: (۱) و (۲) بترتیب معادلات یک سهمی و یک هذلولی متساوی القطرین است، و بوسیله‌ی نقاط تقاطع این دو منحنی وسایط مطلوب بدست می‌آید. در حالت خاصی که $b = 2a$ ، نتیجه می‌شود $x^2 = 2a^3$ ، که همان معادله‌ی مسئله‌ی تضعیف مکعب است.

آخرین مسئله‌ای که ذکر آن لازم است مسئله‌ی ارشمیدس است، که مبنای تحقیقات جالبی در حل معادله‌ی درجه‌ی سوم، خاصه در دوره‌ی اسلامی، بوده است.

ارشمیدس در شکل چهارم مقاله‌ی دوم کتاب کره و استوانه باین مسئله می‌پردازد:

(مسئله‌ی ارشمیدس) کروی مفروضی را بوسیله‌ی صفحه‌ای چنان قطع کنید

که نسبت احجام دو قطعه کروی حاصل مساوی مقدار مفروضی باشد.

دانشمند یونانی این مسئله را به مسئله‌ی ذیل[†] برمیگرداند:

(*) بعبارت مصطلح امروز، مقصود مسئله تعیین هندسی دو واسطه‌ی هندسی است بین a و b .

(†) حل این مسئله در کتاب کره و استوانه نیامده، ولی بقول ائوتوکیوس (Eutocios)

ارشمیدس آنرا بوسیله‌ی فصل مشترک سهمی $x^2 = \frac{b^2}{c} - y$ و هذلولی $y = ac - cx$ حل کرده

است. برای اطلاع بیشتر رجوع شود به چاپ جدید کتاب آثار ارشمیدس (از ت. ل. هیث، نیویورک)، فصل ششم مقدمه (صص cxxiii-cxli و صفحات ۶۲ - ۷۹ از مقاله‌ی دوم رساله‌ی کره و استوانه در همان کتاب).

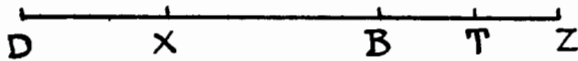
ائوتوکیوس سابق‌الذکر، که در مآخذ اسلامی اوطوقیوس و اطوقیس (عسقلانی) خوانده

شد، از شارحین بعضی آثار ارشمیدس و آپولونیوس است، و در حدود ۴۸۰ میلادی در عسقلان (بر سواحل فلسطین) متولد شده است.

قطعه خط DZ و نقاط B و T برین خط مفروض است، و B بین D و T جا دارد. نقطه‌ای مانند X بر DZ چنان تعیین کنید که

$$XZ : ZT = \overline{BD}^2 : \overline{DX}^2 .$$

فرض کنیم $BD = a$ ، $ZT = b$ و $ZD = c$ ، $DX = x$. حلّ مسئله بحلّ معادله‌ی



$$x^2 + a^2 b = cx^2 \text{ یا } (c-x) : b = a^2 : x^2 \text{ باز می‌گردد.}$$

مسئله‌ی ارشمیدس مورد توجه خاص دانشمندان دوره‌ی اسلامی واقع شده، و ظاهراً اوّل بار ماهانی (§ ۳۰۴۰۵۰۱) آنرا به معادله‌ی درجه‌ی سوم سابق الذّکر (معادله‌ی ماهانی) باز گردانید، و ابوجعفر خازن این معادله را بکومک قطوع مخروطی حلّ کرده است (§ ۶۰۴۰۴).

§ ۳۰۷۰۲ تاریخچه‌ی معادلات درجه‌ی سوم - مسائلی که حلّ آنها به

معادلات درجه‌ی سوم باز می‌گردد اوّل بار در آثار یونانیان دیده می‌شود. گویند بقراط خیوسی (§ ۳۰۲۰۱) مسئله‌ی تضعیف مکعب را به درج دو واسطه‌ی متناسب بین دوخط باز گردانید، و احتمالاً منایخموس (§ ۳۰۲۰۱) مسئله‌ی اخیر را بوسیله‌ی فصل مشترک قطوع (۲) و (۳) (§ ۳۰۷۰۱) حلّ کرد. بعضی دیگر از ریاضیون یونانی نیز بوسایل مختلف به حلّ مسائل تضعیف مکعب و تثلیث زاویه پرداخته بودند.^۵ نظر باین مسائل متفرّق که در آثار یونانی آمده، بعضی چنین پنداشته اند که یونانیان معادلات درجه‌ی سوم را حلّ کرده‌اند. درین باب وپکه سخنی مختصر و مفید دارد که نقش دانشمندان دوره‌ی اسلامی را در بسط جبر و نیز تا حدّی ماهیت جبر هندسی یونانیان (§ ۳۰۲۰۱) را روشن می‌سازد.

(۵) مصاحب، جبر خیام، صص ۱۸۵-۱۹۵، که مطالب آن عمدهً از تاریخ ریاضیات

سمیث (جلد ۲، صص ۲۹۷-۳۱۵) گرفته شده است. نیز رجوع شود به: هیت، تاریخ،

جلد اول، صص ۲۱۸-۲۷۵.

خلاصه‌ی بیان ویکه اینست که † اگرچه یونانیان بعضی مسائل هندسی حل کرده‌اند که اگر آنها را بصورت جبری درآوریم به معادلات درجه‌ی سوم می‌رسیم، ولی قول و گمان کسانی که می‌پندارند یونانیان معادلاتی از درجه‌ی سوم حل کرده‌اند دور از صواب است، چه حل هندسی مسئله‌ای ازین قبیل با تشخیص اینکه حل آن به معادله‌ی درجه‌ی سوم باز می‌گردد تفاوت بسیار دارد؛ وبرشمردن منظم جملگی معادلات درجه‌ی سوم وساختن جواب يك يك آنها وبحث درحالات خاص هر يك، که در آثار دانشمندان اسلامی و خاصه در جبرخیام آمده است، در آثار یونانیان بی‌سابقه می‌باشد. وسپس می‌گوید که چون در آثار یونانیان هیچ اثری از جبر نیست، نمیتوان گفت که آنان معادلات درجه‌ی سوم حل کرده‌اند، و نتیجه می‌گیرد که دانشمندان اسلامی اول دفعه علم جبر را در هندسه بکار برده‌اند وبالعکس، وبدین ترتیب، بنیان رابطه‌ی جبر و هندسه را نهاده‌اند که بعدها از منابع مهم بسط ریاضیات بوده است. در دوره‌ی اسلامی مسائلی که به معادله‌ی درجه‌ی سوم باز می‌گردد - از جمله مسئله‌ی درج دو واسطه بین دو خط، مسئله‌ی ارشمیدس، مسئله‌ی تثلیث زاویه (§ ۳۰۷۰۱)، و مسئله‌ی تقسیم دایره به اجزای متساوی - وتحقیق درحل وبحث آنها بوسیله‌ی قطوع مخروطی مورد توجه ریاضیون بوده است، و این تحقیقات در رساله‌ی جبرخیام به کمال می‌رسد، وچون درین باب بعداً باتفصیل کافی سخن خواهیم گفت، درین مقام به همین اندازه اکتفا می‌کنیم.

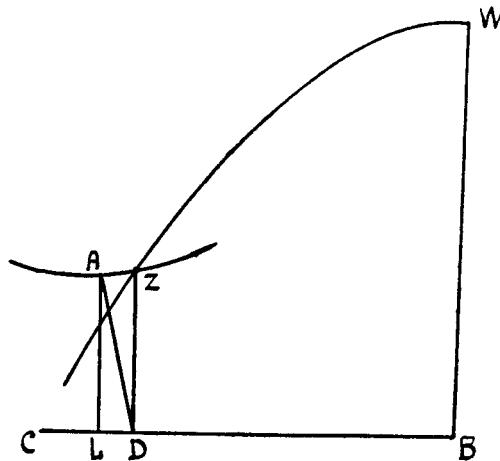
تبصره - ریاضیون دوره‌ی اسلامی به حل عددی معادلات درجه‌ی سوم موفق نشدند، ولی در مواردی مقدار تقریبی ریشه‌ی مورد نظر را می‌توانستند حساب کنند (مثلاً رجوع کنید به § ۶۰۷). حل معادلات عددی درجه‌ی سوم در قرن شانزدهم بوسیله‌ی ریاضیون ایتالیائی انجام گرفت. *

(†) ویکه، جبر عمر خیام، ص ۱۱۰. ویکه همه‌جا - حتی وقتی از خیام سخن می‌گوید - از «ریاضیون عرب» صحبت می‌کند، و البته مقصود وی از «عرب» «عربی‌نویس» است. (☆) برای نمونه‌ای از تحقیقات ملا علی محمداصفهانى، ریاضیدان ایرانی قرن سیزدهم ه. ق، در این باب رجوع شود به: مصاحب، جبر ومقابله‌ی خیام، ص ۱۶۲ - ۱۶۳.

§ ۴۰۷۰۴ معادلات درجات بالاتر - بعضی از ریاضیون دوره‌ی اسلامی به برخی صور معادلات درجه‌ی چهارم برخورد کرده و آنها را بوسیله‌ی قطوع مخروطی حل کرده‌اند. متأسفانه از کارهای منسوب به ابوالوفای بوزجانی (§ ۳۰۴۰۵۰۳) در این باب اطلاعی نداریم. اما دو نمونه از کارهای ریاضیون مذکور را وپکه درضمیمه‌ی چهارم کتاب جبر عمر خیّام خود آورده است. یکی از آنها رساله‌ای است [☆] که ابوالجود (§ ۳۰۴۰۵۰۸) در جواب سؤال ابوریحان پرداخته، و موضوع آن حل این مسئله است: خط BC و نقطه‌ی A در دست است. از این نقطه خطی چنان مرور دهید، که اگر محل تلاقی آن با BC باشد، رابطه‌ی $AD \cdot BC + \overline{BD}^2 = \overline{BC}^2$ برقرار شود. اگر فرض کنیم L تصویر A بر BC باشد، و $AL = a$ و $CB = b$ و $CL = c$ و $CD = x$ ، معادله‌ی مسئله چنین خواهد بود:

$$x^4 - 4cx^3 + 3c^2x^2 + 2c^2bx - c^2(b^2 + c^2) = 0$$

ابوالجود، پس از تشکیل دادن معادله، آنرا بدین طریق حل میکند: BW را مساوی BC بر عمود کرده سهمی به رأس W و محور WB وضع قائم BC و هذلولی متساوی



(☆) عنوان نسخه‌ای که وپکه در اختیار داشته چنین بوده: «جواب الشیخ الفاضل ابی الجود محمدبن اللیث ایدة الله تعالی عما سأله عنه الاخ الفاضل ابوالریحان محمد ابن احمد البیرونی». وپکه فقط ترجمه‌ی فرانسوی صورت مسئله و حل و بحث آنرا در کتاب خود آورده است.

القطرینی به رأس A و ضلع قائم AL و محور AL رسم میکند. اگر Z محل تلاقی دو منحنی و D تصویر Z بر BC باشد، CD جواب معادله است. و سپس ابوالجود در شرایط امکان مسئله بحث میکند.

در دنبال رساله‌ی ابن لیث مسئله‌ی ذیل حل شده ولی مصنف آن معلوم نیست:

نودنقه‌ای مانند ABCD چنان رسم کنید که سطحش ۹۰ باشد و

$$AD = AB = BC = 10.$$

بطور کلی اگر $AD = AB = BC = a$ و سطح شکل b^2 فرض شود معادله‌ی مسئله

چنین خواهد بود:

$$x^4 - 2ax^2 + 2a^2x - a^4 + b^4 = 0$$

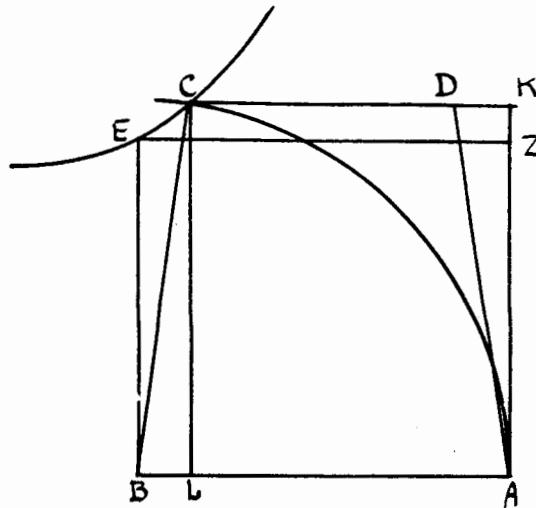
حل کننده‌ی مسئله AB را قاعده‌ی اطول و AD و BC را دوساق نودنقه و فاصله‌ی

D را از تصویر A بر قاعده‌ی اقصر (مثلاً نقطه‌ی K) مجهول مسئله میگیرد. اگر این

فاصله مساوی x فرض شود معادله‌ی مسئله چنین میشود:

$$x^4 + 200x = 20x^2 + 1900$$

سپس مسئله را به این طریق حل میکند: طول AB را مساوی ۱۰ اختیار



کرده عمود EB را مساوی $\frac{1}{10} AB$ بر AB اخراج کرده مستطیل ABEZ را میسازد، و بر E هذلولی با مجانبهای BA و AZ مرور می‌دهد، و بمرکز B و شعاع BA دایره‌ای رسم میکند، و میگوید، چون $AB > BE$ ، دایره هذلولی را قطع میکند. سپس BC را وصل کرده زاویه BAD را برابر زاویه ABC میسازد، و AD را مساوی AB جدا کرده CD را وصل میکند. شکل ABCD نوزنقه‌ی مطلوب است، زیرا اگر L تصویر C بر AB باشد، نوزنقه‌ی مذکور معادل مستطیل ALCK است، و چون C بر هذلولی قرار دارد، سطح مستطیل مساوی سطح ABEZ است که مساوی ۹۰ میباشد.

بالاخره، ظاهراً ابن هیثم (§ ۳۰۴۰۵۰۶) معادله‌ی درجه‌ی پنجم $x^5 = a$ را بوسیله‌ی تحویل آن به دستگاه

$$1 : x = x : y = y : v = v : w = w : a$$

حل کرده است (رجوع شود به § ۵۰۱۰۶۰۱ ، مثال چهارم).

قسمت چهارم

ملاحظات کلی در باب

کارهای جبری خیام

قسمت چهارم

ملاحظات کلی درباره کارهای جبری خیام

§ ۴۰۱ خیام و آثار ریاضی او

۴۰۱۰۱ § خیام یا عمر خیام [غیاث‌الدین ابوالفتح (یا ابو حفص) عمر ابن ابراهیم ختّام (یا ختّامی)]^{۵۱} - ختّام از بزرگترین ریاضیون قرون وسطی و از شعراء و حکماء و منجمین معروف ایران در نیمه دوم قرن پنجم و اوایل قرن ششم ه ق است. وی در نیشابور متولد شد، و هم در آنجا وفات یافت. تاریخ ولادت او معلوم نیست[†]، و وفاتش را به احتمال در ۵۱۷ یا ۵۲۶ ه ق شمرده‌اند. روایت ملاقات او با ابوعلی سینا (متوفی در ۴۲۸ ه ق) و یا درس خواندن او در نزد وی بسیار مستبعد است. گفته‌اند به سمرقند و بلخ و هرات و ری و اصفهان و حجاز سفر کرد، و نام وی جزء منجمینی ذکر شده است که به امر سلطان ملک‌شاه سلجوقی، برای اصلاح سال و ماه ایرانی، در ۴۶۷ ه ق در ری یا اصفهان یا نیشابور گرد آمدند.

(۵) مقصود ما ازین مقدمه معرفی خیام است بعنوان عالم جبر، و ترجمه‌ی احوال او و گفتگو از وی بعنوان شاعر و حکیم یا منجم و عالم فیزیک و شریک در اصلاح سال شمسی ایرانی از موضوع بحث ما خارج است. برای این مطالب می‌توان به کتب و مقالات ذیل رجوع کرد:
چهار مقاله‌ی عروضی سمرقندی، بکوشش دکتر محمد معین، تهران ۱۳۳۳-۳۵، صص ۲۹۲ - ۳۶۴ و ۶۱۸ - ۶۲۴؛

مقاله‌ی مینورسکی در جلد سوم دایره‌المعارف اسلام؛
مقاله‌ی عباس اقبال آشتیانی، بعنوان راجع باحوال حکیم عمر خیام نیشابوری، مجله‌ی شرق، دوره‌ی اول، شماره‌ی ۸، مرداد ۱۳۱۵ ه ش، صص ۴۶۶ - ۴۸۵.
نقی زاده، دروس، صص ۸۵-۹۲ (مخصوصاً در موضوع اصلاح سال و ماه منسوب به خیام).

(†) سوامی گوویندا تیرتههه، از روی اوضاع کواکب بهنگام ولادت خیام و با استفاده از بعضی اطلاعات تاریخی و تواریخ احتمالی، ولادت او را بهنگام طلوع آفتاب روز ۱۸ ماه مه سال ۱۵۴۸ (دوشنبه‌ی ۱۸ ذیقعدی ۴۳۹ ه ق) یافته است. رجوع شود بکتاب اوبنام The Nectar of Grace در شرح حال و آثار خیام، چاپ الله آباد ۱۹۴۱، صص XXXII - XXXIV.

قبل از کشف رساله‌ی او در جبر (۴۰۳۰۱ §)، و پیش از اینکه تحقیقات جبری او چنانکه شاید مورد توجه قرار گیرد، در مشرق زمین بواسطه‌ی سهم عمده‌ای که در اصلاح سال و ماه برای او قائل بودند[☆] و در اروپا بسبب ترجمه‌ی انگلیسی رباعیات وی بتوسط فیتزجرالد^{☆☆} شهرت یافته بود، و متأسفانه دانشمندان و ورّخین دانشمند اسلامی از تحقیقات جبری او بکلی بی‌خبر بودند (۴۰۲ §)، و از اواخر قرن نوزدهم میلادی ببعد است که وی جای خود را در تاریخ ریاضیات باز میکند، تا آنجا که رساله‌ی او در جبر یکی از برجسته‌ترین آثار قرون وسطائی درین علم شناخته میشود (۴۰۲ §).

آثار خیم[†]، علاوه بر تألیفات ریاضی (۴۰۱۰۲ §) و رباعیات معرف او، مشتمل است بر چند رساله‌ی فلسفی و رساله‌ای بنام رساله فی الاحیال لمعرفة مقداری الذهب والفضه فی جسم مرکب منهما در وزن مخصوص، و غیره.

۴۰۱۰۴ § آثار ریاضی خیم. (الف) رساله‌ی جبر خیم. عمده‌ترین اثر ریاضی خیم رساله‌ی اوست در علم جبر که متن آن در قسمت اول و ترجمه‌ی فارسی آن در قسمت پنجم کتاب حاضر چاپ شده است، و بعداً به تفصیل از آن سخن خواهد رفت. این رساله را خیم بنام «قاضی القضاة ابوطاهر» تدوین کرده است، و این ابوطاهر را همان ابوطاهر عبدالرحمان ابن علك (۴۳۰ - ۴۸۴ هـ ق)، فقیه شافعی توانگرو متنقذ سمرقند شمرده‌اند^{††} که شرح شکایت بردن او به سلطان ملکشاه سلجوقی در ضمن وقایع سنه‌ی

(☆) مورد تأمل است. رجوع شود به: تقی زاده، دروس، صفحه‌ی ۸۵ ببعد.

(☆☆) Edward Fitzgerald (۱۸۵۹ - ۱۸۸۳). اولین ترجمه‌ی فیتزجرالد در

۱۸۵۹ بعمل آمد.

(†) در جبر و مقابله‌ی خیم (مصاحب، تهران، ۱۳۱۷) اسامی ۲۱ کتاب منسوب بار

جمع‌آوری شده، ولی صحت اسناد بعضی خالی از شبهه نیست، (تقی زاده، دروس، ص ۸۵).

و نیز رجوع شود به چهار مقاله‌ی عروضی سمرقندی، باهتمام دکتر محمد معین، ص ۳۲۶-۳۳۱.

(††) رجوع شود به صفحات XLIV - XLV کتاب سوامی گوویندا تیرتهه مذکور در ذیل

صفحه‌ی ۱۳۵ کتاب حاضر.

۴۸۲ هـ ق درکامل این اثیرمذکور است. *

(ب) رساله در تحلیل يك مسئله . این نامی است که ما ، برای تسهیل اشاره ، به رساله‌ای از خیّام داده‌ایم که متن آن در قسمت دوم و ترجمه‌ی فارسی آن در قسمت ششم کتاب حاضر بطبع رسیده ، و پیش از رساله‌ی جبر تألیف شده (§ ۴۰۴۰۱) ، و موضوع آن تحلیل يك مسئله‌ی هندسی به معادله‌ی درجه‌ی سوم و حل آن بوسیله‌ی قطوع مخروطی است .

ظاهراً اول بار است که این رساله (در جزء کتاب حاضر) بطبع میرسد ، و در باب آن بعداً با تفصیل بیشتر بحث خواهیم کرد (§ ۴۰۴) .

(ج) رساله فی شرح ما اشکل من مصادرات کتاب اقلیدس . این رساله در باب اصل موضوع معروف اقلیدس و مباحث مربوط به نسبت و تناسب در کتاب اوست ، و ظاهراً تنها نسخه‌ی کامل موجود آن همان نسخه‌ی کتابخانه‌ی لیدن از بلاد هلنداست ، و این نسخه ، ظاهراً بر طبق عبارتی که در پایان آن آمده ، در ۶۱۵ هـ ق از روی نسخه‌ای که خیام خود در سنه‌ی ۴۷۰ نوشته استنساخ شده است .

این کتاب در اسفند ۱۳۱۴ هـ ش به اهتمام دکتر تقی‌ارانی در تهران چاپ شده است .

(د) مفکلات الحساب . نسخه‌ای از این رساله در مونیخ موجود است. **

علاوه بر اینها ، رساله‌ای در صحت طرق هندی برای استخراج جذر و کعب در فهرست نسخ فارسی و عربی کتابخانه‌ی ملی شرقی بنکپور (کلکته ۱۹۰۸) بنام خیّام مذکور است † که تا کنون نسخه‌ای از آن بدست نیامده ، و ممکن است همان رساله‌ای باشد که خیّام در کتاب جبر خود بآن اشاره کرده است (§ ۵۰۳۰۲) . ††

(*) الکامل فی التاریخ (قاهره) ، جلد ۸ ، ص ۱۴۸-۱۴۹ و ۱۵۹ .

(**) مقاله‌ی مینورسکی در دایرة المعارف اسلام ، جلد ۳ .

(†) ترجمه‌ی انگلیسی جبر خیام ، ص ۵ .

(††) در باب اطلاعات و تحقیقات ریاضیون اسلامی در استخراج ریشه و دوجمله‌ای نیوتن ،

می توان به مقاله‌ی پاول لوکی (Paul Luckey) در مجله‌ی *Mathematische Annalen*

(برلن ، گوتینگن ، هایدلبرگ ، ۱۹۴۸) ، جلد ۱۲۵ ، جزوه‌ی دوم ، ص ۲۱۷-۲۷۴ ،

رجوع کرد .

۴۰۲ § خیام بعنوان عالم جبر - مآخذی که ما برای بررسی کارهای

خیام در علم جبر در دست داریم عبارتست از :

(۱) رساله‌ی او در جبر ،

(۲) رساله‌ی وی در حلّ يك مسئله‌ی هندسی بوسیله‌ی قطوع مخروطی که

ظاهراً آنرا پیش از رساله‌ی اوّل نوشته است (§ ۴۰۴۰۱) ،

(۳) نتایج بررسیهای محققین غربی، چون وپکه و سو تر و سارتن و دیگران ،

که ، با استفاده از وسایل فراوان، مطالعات کمابیش جامع در تاریخ علوم - یا بالاخص تاریخ ریاضیات - کرده و پیشرفتهایی را که در ادوار مختلف در علوم حاصل شده با هم مقایسه نموده و به نتایجی رسیده‌اند ، و ما باید با کمال فروتنی از آنان سپاسگزار باشیم که با کوششهای خالصانه‌ی خود نام دانشمندان ما و آثار ایشان را زنده گردانیده‌اند. (۴)

اینک وارد اصل مطلب می‌شویم .

ظاهراً کارهای خیام در علم جبر در بسط این علم تأثیری نداشته است ؛ زیرا در

اروپا در اواسط قرن هیجدهم و بلکه در نیمه‌ی دوم قرن نوزدهم از آن با خبر می‌شوند،

و در آن زمان علوم ریاضی در اروپا به چنان مرحله‌ای رسیده بود که جبر خیام و

امثال آن جز از جنبه‌ی تاریخی اهمیتی نمی‌توانست داشت . اما در نزد خودمان ، نه

فقط دلیلی نداریم که کسی تحقیقات خیام را ادامه داده یا از آنها در بسط علم جبر

استفاده‌ای برده باشد ، بلکه - برخلاف - شواهدی هست حاکی از اینکه بعضی ریاضیون

(۴) این مطلب مخصوصاً در مورد خیام صدق می‌کند . چنانکه در متن آمده است ، در

مشرق زمین ، کسانی هم که اسمی از تحقیقات متقدمین در حل معادلات درجه‌ی سوم شنیده بودند

از کارهای اساسی خیام درین موضوع و بلکه اصلاً از اینکه وی تحقیقاتی درین مبحث کرده است

بی‌خبر بودند . با این وصف ، گمانی ازین جهت ، در دنیای اسلامی مغرب ، شکفت آور

نخواهد بود ، و نمی‌توان بر مورخ دانشمند معروف عرب ، ابن خلدون (۷۳۲ - ۸۰۸ هـ) ،

خرده گرفت که سخن خود را در « جبر و مقابله » با این عبارات ختم می‌کند : « و قد بلغنا

ان بعض ائمة العالم من اهل المشرق انہی المعادلات الی اکثر من هذه الستة اجناس و

بلغنا الی فوق العشرین و استخراج لها کلاً اعمالاً وثيقة ببراہین هندسیة واللہ . . . » (مقدمه‌ی ابن

خلدون ، طبع م . کاترمر ، پاریس ۱۸۵۸ ، جلد اول ، قسمت سوم ، ص ۹۹) .

عالی مقام هم که گاه در ممالک اسلامی پیدا می‌شدند حتی اسمی از کارهای جبری خیام بنام وی نشنیده بودند، و اگر هم شنیده بودند از اصل موضوع بی‌خبر بودند. نمونه‌ی آن اینکه غیاث‌الدین جمشید کاشانی^{۵۱}، ریاضیدان و منجم و محاسب عالی مقام، در فصل هفتم از باب اول از مقاله‌ی پنجم کتاب معروف خود، مفتاح الحساب، پس از بیان شش صنف «مشهور» معادلات (معادلات درجات اول و دوم و یا قابل تحویل بآنها)، گوید^{۵۲}: «اما اگر تعادل بین چهار جنس متوالی، مانند عدد و شیء و مال و کعب، باشد - یعنی بعضی ازین چهار معادل بعضی دیگر از آنها باشد... اقسام آن منحصر در بیست و پنج مسئله است^{۵۳}، و شش از آنها همانست که گذشت، و نوزده مسئله می‌ماند». سپس از قول شارح بهائیه^{۵۴} آورده است که

(۵) متوفی در صبح چهارشنبه ۱۹ رمضان ۸۳۲: هق (محمد تقی دانش پژوه، فهرست کتابخانه‌ی اهدائی سید محمد مشکوة به کتابخانه‌ی دانشگاه تهران، جلد سوم، بخش دوم، تهران ۱۳۳۲، ص ۸۶۶).

(۵۵) مفتاح الحساب، تهران، ۱۳۵۶ هق، ص ۱۶۷؛ مفتاح الحساب و رساله‌ی محیطیه، مسکو، ۱۹۵۶، متن و ترجمه و حواشی بزبان روسی از ب. آ. روزنفلد و آ. پ. یوشکویچ، ص ۱۹۲ و ۳۵۶ - ۳۵۷ و ۴۷۶.

(۶) برای صورت این بیست و پنج مسئله (یعنی معادله) رجوع کنید به ۴.۳.۴.۲ §. (۶۶) ظاهراً متصوّر کتاب الفوائد البهائیه فی القواعد الحسابیه است در علم حساب از عمادالدین عبدالله ابن محمد الخدام العراقی البغدادی (سارتن، مدخل، جلد ۳، قسمت اول، ص ۷۵۷. نیز رجوع شود به کشف‌الظنون، چاپ اسلامبول، ۱۹۴۳، جلد ۲، ستون ۱۲۹۶؛ و ص ۴۷۶ از کتاب سابق‌الذکر روزنفلد و یوشکویچ)، که از شاگردان خواجه نصیرالدین طوسی بوده. این کتاب را کمال‌الدین فارسی (۶۶۵ - ۷۱۸ هق)، از اجله‌ی ریاضیون و فیزیکدانان ایرانی، بنام اساس القواعد فی اصول الفوائد شرح کرده و ظاهراً مقصود از «شارح بهائیه» که در مفتاح الحساب مذکور است همین کمال‌الدین فارسی است.

امام شرف‌الدین مسعودی مذکور در مفتاح‌الحساب، بنا بر تصریح قاضی زاده‌ی رومی در رساله‌ی استخراج جیب‌الدرجة الواحده (چاپ تهران، ۱۲۹۹ هق، ص ۴۲. ضمیمه‌ی مفتاح - الحساب)، همان شرف‌الدین محمدابن مسعود [ابن محمد] مسعودی است. گویند وی شاگرد خیام بوده (دورساله دربارهی آثار علوی، بکوشش محمد تقی دانش پژوه، پنجمین نشریه‌ی فرهنگ ایران زمین، تهران، تابستان ۱۳۳۷)، و درین صورت بسیار محتمل است که تحقیقات خیام به مسعودی نسبت داده شده باشد.

« امام شرف‌الدین مسعودی نوزده مسئله غیر از شش مسئله مشهور حل کرده و طریق استخراج مجهول را در آنها آشکار ساخته ، و ممکن است این نوزده مسئله همان نوزده مسئله باشد . » با احتمال قوی ، این نوزده مسئله همانهاست که خیّام آنها را حل کرده و در هر حال ، هر کس آنها را حل کرده ، شخصی چون غیاث‌الدین جمشید از راه حل آنها بی‌خبر بوده است . *

خلاصه آنکه کارهای خیّام در علم جبر در نزد ما گمنام بوده ، و در اروپا هم وقتی جلب توجه کرده که از لحاظ بسط علوم ریاضی فاقد هر گونه ارزشی بوده است .

بعلاوه ، چنانکه در § ۳۰۷۰۲ دیدیم ، حل معادلات درجه‌ی سوم و بلکه درجات بالاتر (§ ۳۰۷۰۳) بوسیله‌ی قطوع مخروطی بی‌سابقه نبوده است .

معذک ، بر طبق تحقیقات و نظر محققین غربی ، خیّام - خاصه در علم جبر - یکی از بزرگترین ریاضیون قرون وسطی است . **

این رأی ناشی از اینست که در تاریخ ریاضیات خیّام اول کسی است که به تحقیق منظم علمی در معادلات درجات اول و دوم و سوم پرداخته ، و طبقه‌بندی تحسین-آوری از این معادلات آورده است † ، و در حل تمام صور معادلات درجه‌ی سوم منظمآ تحقیق کرده ، و بحل (در اغلب موارد ناقص) هندسی آنها توفیق یافته ، و رساله‌ی وی در علم جبر ، که مشتمل بر این تحقیقات است ، معرف یک فکر منظم علمی است ؛ و این رساله یکی از برجسته‌ترین آثار قرون وسطانی و احتمالاً برجسته‌ترین آنها درین علم است . ††

در رسائل جبری خیّام دو نکته‌ی اساسی جلب توجه میکند . اول اینکه وی

(*) ملا محمد باقر ابن زین‌العابدین یزدی ، ریاضیدان قرن یازدهم هجری ، در کتاب *عیون الحساب* خود (تا کنون چاپ نشده) در پایان « مطلب چهارم » از قسمت جبر آن کتاب همین گفته‌ی غیاث‌الدین جمشید را نقل می‌کند .

(**) سارتن ، مدخل ، جلد ۱ ، ص ۷۵۹ - ۶۵۰ .

(†) در این باب مخصوصاً به طبقه‌بندی بر حسب درجه ، که در § ۳۰۶۰۶ ذکر شد ،

رجوع کنید .

(††) سارتن ، مدخل ، جلد ۲ ، قسمت اول ، ص ۸ .

مشعر به اهمیت تعمیم و احتیاج ریاضیات بآن می باشد. در آثار خود مکرر، تصریحاً یا تلویحاً، مسائل جزئی را بانظر تحقیر مینگرد، و احکام کلی میجوید. درعین حال، از آنچه در ریاضیات «بحث در مسئله» (یا در معادله) خواننده میشود غافل نیست.

دوم مواردی است که ختیم را در تردید و تزلزلی که همراه سیراز مرحله‌ای از علم بمرحله‌ای بالاتر است می بینیم. اندیشه‌ای در شرف تکوین است؛ گاهی پیش میرود؛ گاهی به عقب باز میگردد؛ ولی سیر عمومی تکاملی است.

مثلاً، برخلاف آنچه در جبر ختیم - که بعد از رساله‌ی تحلیل یک مسئله (قسمت ششم) تصنیف شده (§ ۴۰۴۰۱) - می بینیم، در رساله‌ی تحلیل اساس طبقه بندی معادلات بر حسب درجه دیده میشود: معادلات اولاً به مفردات و مقترنات تقسیم نمیشوند؛ بلکه ابتداء از معادله‌ی «بین کعب و سایر مراتب»، یعنی معادله‌ی درجه‌ی سوم، سخن میرود (§ ۶۰۴۰۳)، و سپس این معادلات را به مفردات و مقترنات تقسیم میکند. آیا نمی توان این سیر قهرائی را نمونه‌ای از تزلزل در انتخاب دوطریق طبقه بندی شمرد؟ از طرف دیگر، در رساله‌ی تحلیل یک مسئله، علم جبر «اموری هندسی که بوسیله‌ی اشکال پنجم و ششم مقاله‌ی دوم اصول مبین میشود» شمرده شده (§ ۶۰۴۰۲)، ولی در رساله‌ی جبر این علم را حتی با آنچه از الفاظ «جبر» و «مقابله» (§ ۳۰۴۰۴) استنباط می شود محدود نمی کند، بلکه آنرا فن استخراج مجهولات عددی و هندسی می شمارد (§ ۵۰۱۰۱).

نمونه‌ی دیگر این است که ختیم، در رساله‌ی تحلیل، حل عددی معادلات درجه‌ی سوم غیر قابل تحویل به درجات پایین تر را غیر ممکن می شمارد (§ ۶۰۷)، و حال آنکه در رساله‌ی جبر در این باب گوید: «اما اثبات [حل] این اصناف وقتی موضوع مسئله عدد مطلق باشد بر ما و بر دیگر علمای جبر ممکن نشده است، و شاید دیگران که بعد از ما آیند بر آن وقوف یابند» (§ ۵۰۱۰۶).

بالاخره این مطلب نیز باید گفته شود که ختیم متوجه تسهیلات ناشی از استعمال

« الفاظ اهل جبر » (§ ۲۰۳۰۴) یا اصطلاحات آنان (§ ۶۰۳۰۴) بوده است ، ولی متأسفانه شخصاً قدمی در راه بسط این اصطلاحات و دامنه‌ی استعمال آنها برنداشته است .
 § ۴۰۲۰۱ - اما نباید از نظر دور داشت که خیام يك رياضيدان قرون وسطائي است ، وسخت تحت تأثير افكار يونانيان بوده است ، ومحدودیت‌های ناشی از بندهائی که این افکار بردست وپای اوبسته بخوبی از آثارش هویدا است . در این باب ، آنچه مربوط به مسائل وموارد خاص مندرج در آثار اوست در ضمن تحلیل این آثار گفته خواهد شد .
 در این مقام ، بعنوان نمونه ، فقط به بعضی مطالب کلی اشاره میکنیم .

کارهای جبری خیام ، چنانکه خود میگوید (§ ۵۰۱۰۴) ، مبتنی بر کتابهای اصول و معیّات اقلیدس و (دومقاله‌ی اوّل) مخروطات آپولونیوس است ، ولی تبعیت او از این آثار محدود به آنچه از دانشمند نکته سنجی چون خیام انتظار میرود نیست ، و مثلاً وقتی حکم میکند که « براهین عددی جای براهین هندسی را نتوانند گرفت » ، در تأیید این نظر ، میگوید مگر نمی‌بینی که اقلیدس هم همین راه رفته است (§ ۵۰۱۰۵) ، و حال اینکه مکرر کردن اقلیدس احکام عمومی مقاله‌ی پنجم اصول را در مقاله‌ی هفتم در مورد اعداد طبیعی عمل لغوی بوده است ، و توجیه معقولی برای آن بنظر نمیرسد .
 خداوند همه را از گزند تعصب و بت پرستی محفوظ بدارد .

خیام ، به پیروی از فلاسفه‌ی یونان ، تفاوت فاحشی بین « عدد » یا « عدد مطلق » و « مقدار » یا « کم متصل » (خط ، سطح ، جسم ، زمان) قائل است ، و کارهای جبری او - وبعبارت اصح ، روش او در جبر - سخت تحت تأثیر و نفوذ این اندیشه است . متأسفانه در هیچیک از دو رساله‌ی خیام تعریفی از جواب یا ریشه‌ی معادله و از حلّ معادله دیده نمیشود . آنچه مسلم است اینست که وی نه فقط از جوابهای منفی (و بالتّیجه از جوابهای موهومی) بی‌خبر بوده ، بلکه جواب صفر را هم ملحوظ نمی‌داشته . اما مطلب به همین جا ختم نمیشود . وی ، در تحت تأثیر فکر مذکور ، معادلات را بر حسب اینکه موضوع (= مجهول) آنها « عدد مطلق » یا « مقدار » باشد با دو نظر بسیار متفاوت مینگرد ، و برای

هر معادله از دو جهت برهان حلّ لازم می‌شمارد، یکی وقتی مجهول عدد باشد، و دیگری در صورتی که مجهول مقدار باشد. در معادلات دسته‌ی دوّم، وقتی باصطلاح ما معادله جواب مثبت دارد آنرا ممکن و الا ممتنع می‌شمارد^{۵۴}. اما در معادلات عددی درجه‌ی دوّم، بدون اینکه شرایطی برای ضرایب معادله قائل شود، صحیح بودن جوابها را جزء شرایط امکان معادله می‌شمارد، و این امر، چنانکه در § ۳۰۵ نیز اشاره کردیم، تقلیدی بی‌مورد از مسائل دیوفانتوسی بیش نیست، زیرا در مسائل مورد بحث دیوفانتوس، نوع مسائل این قید را ایجاب میکند، و حال آنکه در مسائل مورد بحث خیّام چنین قیدی خالی ازوجه است.

خیّام، چنانکه در قدیم معمول بوده، x^2 و x^3 را در «مقادیر» بمعنی مربّع و مکعبی با ضلع x می‌شمارد، و بنابراین، در نظر او، مال (x^4) در مقادیر امری موهوم است و وجود خارجی ندارد (§ ۶۰۴۰۲)، و استعمالش در جبر بر سیل مجاز است (§ ۵۰۱۰۵)^{۵۵}. این طرز فکر نه فقط نظر خیّام را در معادلات محدود میکند، بلکه منجر به احتجاجات بی‌بنیادی می‌شود که نمونه‌ی آن در § ۶۰۴۰۲۰۱ آمده است.

§ ۴۰۳ جبر خیّام

§ ۴۰۳۰۱ کشف جبر خیّام - رساله‌ی خیّام در علم جبر، مانند بسیاری از دیگر آثار دانشمندان دوره‌ی اسلامی، بتوسط اروپائیان کشف شد، و این امر در سال ۱۷۴۲ در شهرلیدن از بلاد هلند پیش آمد، و بر حسب عنوان رساله، آنرا مشتمل بر حلّ معادلات درجه‌ی سوّم پنداشتند.

بعدها ژان ایتین مونتوکل^X، مورخ معروف ریاضیات، در جلد اول تاریخ ریاضیات

(۵) در باب عدّه‌ی جوابها رجوع شود به ۴۰۳۰۴۰۵ §.

(۵۵) این طرز فکر تا زمان دکارت نافذ بود، و او بود که آنرا بکلی درهم شکست (مثلاً رجوع شود به جهان ریاضیات، نیویورک، ۱۹۵۶، جلد اول، ص ۲۴۱-۴۳).

(†) مطالب § ۴۰۳۰۱ از این قسمت به بعد تقریباً تماماً از مقدمه‌ی کتاب ویکه

(§ ۴۰۳۰۳) اقتباس شده است.

(X) Jean Étienne Montucla (۱۷۲۵ - ۹۹).

مشهور خود، بهمین موضوع اشاره میکند * .

معدلك، رساله مورد توجهی از طرف ریاضیون و مستشرقین واقع نشد تا آنکه سدیو^{**} پاره‌ای از يك نسخه‌ی خطی در علم جبر در کتابخانه‌ی سلطنتی (کتابخانه‌ی ملی پاریس) کشف کرد که موضوعش شباهت تامی با موضوع نسخه‌ی کتابخانه‌ی لیدن داشت، و در ضمن مقاله‌ای که در صفحات ۱۳۵ - ۱۳۶ جلد سیزدهم یادداشتها و مطالب مستخرج از نسخ خطی کتابخانه‌ی سلطنتی مندرج است، تفصیلات زیادتری درباره‌ی این نسخه آورد، و سپس گاسپار مونژ[†] در کتاب مهم خود، بنام نظر تاریخی در باب بسط و تکامل هندسه (بروکسل، ۱۸۳۷)، باستناد مقاله‌ی سدیو، مطالعه‌ی کتاب ختّام را از لحاظ تاریخ علوم ریاضی حائز اهمیت اساسی شمرد.

در همین ایام گولیمو لیبری^{††} نسخه‌ی کاملی از این کتاب نفیس در کتابخانه‌ی سلطنتی یافت، و اعلام کرد که قصد نشر کردن آنرا دارد، ولی باین کار توفیق نیافت، و سرانجام فرانتس ویکه^x متن رساله‌ی جبر ختّام را با ترجمه‌ی فرانسوی آن و حواشی کرانبها و ضمایمی، بنام جبر عمر الخیامی (L'Algèbre d'Omar Alkhayyami)، در سال ۱۸۵۱ میلادی در پاریس بچاپ رسانید (§ ۴۰۳۰۲).

§ ۴۰۴۰۴ کتاب ویکه - ویکه با نشر جبر ختّام خدمت بزرگی به تاریخ ریاضیات کرد، و نام ختّام را در بین ریاضیون بلند نمود. بعلاوه کتابهایی که تا کنون

(*) تاریخ ریاضیات، جلد اول، پاریس، ۱۷۵۸، ص ۳۶۸ - ۶۹.

(**) Louis Pierre Eugène Amélie Sedillot (۱۸۵۸-۱۸۷۵). مستشرق فرانسوی.

(†) Gaspard Monge (۱۷۴۶ - ۱۸۱۸).

(††) Gulielmo Libri (۱۸۵۳ - ۶۹)، ریاضیدان ایتالیائی الاصل. وی در فلورانس

متولد شد. در ۱۸۳۵ به فرانسه پناهنده شد، و در آنجا به عضویت آکادمی فرانسه و استادی دانشگاه سوربون رسید. بعداً بعنوان سرقت نسخ خطی کرانبها تحت تعقیب قرار گرفت و ناچار به انگلستان گریخت. وی صاحب تألیفات و مقالات علمی مهمی است، و از آثار معروفش تاریخ علوم ریاضی در ایتالیا (چهار جلد، پاریس، ۱۸۳۷ - ۴۱) می‌باشد.

(x) Franz Woepcke (۱۸۲۶-۶۴). مستشرق آلمانی - فرانسوی که مخصوصاً در روشن

کردن تاریخ ریاضیات در دوره‌ی اسلامی سهم بزرگی دارد.

درباب جبر خیام نوشته شده مبتنی بر کتاب وپکه بوده و مؤلفین آنها فواید بی حساب از این کتاب برده‌اند. بنابراین، بی‌مناسبت نیست که اثر گرانبهای وپکه را با تفصیل بیشتری به خوانندگان معرفی کنیم.

کتاب وپکه مرگب است از:

- (۱) متن عربی جبر خیام (صفحات ۱-۵۱ از راست به چپ)، که در پایان آن ترجمه‌ی احوال خیام از کتاب تاریخ الحکمای ابن قفطی نقل شده است (صفحه‌ی ۵۲)؛
- (۲) مقدمه‌ی کتاب (صفحات i-xix)، مشتمل بر چگونگی کشف جبر خیام، معرفی خیام، تحلیل انتقادی جبر خیام، ملاحظات تاریخی^۵، و غیره؛
- (۳) ترجمه‌ی فرانسوی جبر خیام (صفحات ۱-۸۸)، با توضیحات و حواشی فراوان و سودمند، و نقل براهین خیام با استعمال علامات، که در فهم استدلال‌های بسیار طولانی و ملال‌انگیز لفظی خیام کومک مؤثری است؛
- (۴) پنج ضمیمه، بزبان فرانسوی، که وپکه برای روشن ساختن بعضی نکات تاریخی ریاضیات در دوره‌ی اسلامی به کتاب خود ملحق کرده است (صفحات ۹۰-۱۲۸)، بشرح ذیل:

ضمیمه‌ی A - مفاد رساله‌ی ابن هیثم (۳۰۴۰۵۰۶ §) در درج دو واسطه‌ی متناسب بین دو خط (۳۰۷۰۱ §)، و طریق دیگری برای حل همان مسئله بوسیله‌ی حرکت که مصنفش معلوم نیست.

ضمیمه‌ی B - مفاد رساله‌ی در حلّ این مسئله:

دو خط AB و C در دست است. بر اولی نقطه‌ای مانند D چنان بیاید که

$$AD/C = C^2 / \overline{BD}^2$$

و وپکه احتمال می‌دهد که این رساله از کوهی (۳۰۴۰۵۰۵ §) است.

ضمیمه‌ی C - مفاد رساله‌ی کوهی راجع به طرح قطعه کره‌ای که حجمش برابر حجم

(۵) از قبیل نکاتی که از وپکه در ۳۰۷۰۲ § نقل کردیم.

قطعه کره‌ی مفروض و سطحش مساوی سطح قطعه‌ی کره‌ی مفروض باشد.

ضمیمه‌ی D - مفاد رساله‌ی ابوالجود در حلّ این مسئله :

خط BC و نقطه‌ی A در دست است . از این نقطه خطی چنان بکشید که اگر D

محل تلاقی آن با BC باشد ،

$$AD \cdot BC + BD^2 = BC^2$$

(رجوع کنید به § ۳۰۷۰۳) . و نیز حلّ مسئله‌ی ذیل (§ ۳۰۷۰۳) که مصتّف آن

معلوم نیست :

نوزنقه‌ای مانند ABCD چنان طرح کنید که $AB = AD = BC = 10$ و سطح از

شکل ۹۰ باشد .

ضمیمه‌ی E - مفاد رساله‌ی ابوسمید سجزی^{*} در تثابیت زاویه .

§ ۴۰۴۰۲۰۱ متن رساله‌ی خیّام در کتاب وپکه^۹ - چون متن رساله‌ی جبر

خیّام در کتاب حاضر عیناً از کتاب وپکه گرفته شده ، نکات مهمّ توضیحاتی را که وی

در مقدمه‌ی کتاب خود در این باب آورده است نقل می‌کنیم .

« من برای تنظیم متن عربی کتاب سه نسخه در اختیار داشتم . اوّل نسخه‌ی

عربی شماره‌ی ۱۱۳۶ کتابخانه‌ی ملی که مورد توجه لیبری واقع شده بود[†] . خطّ

این نسخه بسیار زیباست ، ولی قسمت اعظم کلمات در آن بی‌نقطه است . این نسخه از

دو نسخه‌ی دیگر صحیح‌تر است ، و در موارد ابهام این نسخه را مأخذ قرار داده‌ام ، و

در ضبط نسخه‌ی بدلها این نسخه را با حرف A مشخص کرده‌ام .

نسخه‌ی دوّم ، که آنرا با حرف B مشخص کرده‌ام ، همانست که مورد توجه

سدیو[†] واقع شده و جزء نسخه‌ی خطّی شماره‌ی ۱۱۰۴ کتابخانه‌ی ملی است . خطّ

(*) احمد ابن عبدالجلیل سجزی ، ریاضیدان و منجم معروف قرن چهارم هجری . برای

اطلاع بیشتر رجوع شود به دکتر محمد معین ، چهار مقاله‌ی عروض سمرقندی ، ص ۲۵۹ - ۲۶۱ .

(†) § ۴۰۳۰۱ ، ص ۱۳۹ .

این نسخه بخوبی نسخه‌ی اوّل نیست، ولی معجم و در مواردی مشکل است. اما متأسفانه در ابتدای موضوع عمده و بدیع کتاب، یعنی حلّ معادلات درجه‌ی سوّم، مطلب قطع می‌شود. *

نسخه‌ی سوّم همان نسخه‌ی کتابخانه‌ی لیدن است ** است که اوّل بار کشف شد و موتو کلا از آن نام برده است. این نسخه، که آنرا با حرف C مشخص کرده‌ام، با خطّ درشت و خوانا نوشته شده است ولی بدرستی نسخه‌ی A نیست.

تصاویر در نسخه‌ی A تاحدی واضح است، ولی قطوع مخروطی همه جا با قوسهای دایره نمایش داده شده. تصاویر نسخه‌ی C در بعضی موارد با متن نامطابق است.

بطوری که ویکه می‌نویسد †، نسخه‌ی کتابخانه‌ی لیدن را احتمالاً یک عرب مسیحی که در آمستردام میزیسته، و برای استنساخ نسخ خطّی که صاحبانشان حاضر به فروش آنها نبوده‌اند در استخدام «گولیوس شهیر» †† بوده، از روی یک نسخه‌ی شرقی استنساخ کرده است.

تاریخ اتمام تحریر اصل نسخه‌ای که ویکه چاپ کرده ظهر روز یکشنبه‌ی بیست و سوّم ماه ربیع الاول بوده، و در محلّ سنه صورت **ربیع** رسم شده که خواندن آن مقدور نشده است.

§ ۴۰۳۰۴ سایر ترجمه‌های جبر خیام.

(الف) ترجمه‌ی انگلیسی. ترجمه‌ی انگلیسی جبر خیام در ۱۹۳۱ در نیویورک چاپ شده X، و آن تقریباً مشتمل بر تمام تعلیقات ویکه بر رساله‌ی خیام است، ولی ملحقات

(*) رجوع شود به ذیل صفحه‌ی ۲۷ در کتاب حاضر.

(**) § ۴۰۳۰۱، ص ۱۳۸.

(†) جبر عمر خیام، صه ijz - jz.

(††) ظاهراً مقصود با کوبوس گولیوس (Jacobus Golius) (۱۵۹۶ - ۱۶۶۷)، مستشرق

هلندی، است، که ولع عجیبی به تهیه‌ی نسخ عربی داشته است.

The Algebra of Omar Khayyam, by Daoud S. Kasir, New york, 1931 (X)

کتاب ویکه در آن نیامده است .

مترجم کتاب می نویسد که آنرا از روی نسخه‌ی خطی کامل و واضحی از رساله‌ی خِیام متعلق به دیوید یوجین سمیت[☆] ، استاد دانشگاه کلمبیا ، ترجمه کرده است ، و بقول مترجم ، نسخه‌ی مذکور را سمیت در لاهور از یک نفر تاجر ایرانی تحصیل کرده و آن عبارتست از ۹۹ صفحه که با خط نسخ خوانا نوشته شده ، و با استثنای بعضی موارد ، بی نقطه است ، و اغلاطی نیز در آن مشاهده می شود .

بقول مترجم ، نسخه‌ی مذکور با متن نسخه‌ی لیدن (§ ۴۰۳۰۲۰۱ و § ۴۰۳۰۱) مطابقت ، الا اینکه عنوان ندارد ، و پایان دو رساله نیز متفاوت می باشد ، و تحریر آن در روز یکشنبه‌ی سیزدهم ربیع الاول سنه‌ی ... (لایقره) بیان رسیده ، و سپس اسم محرر به خط اردو ضبط شده است .

(ب) ترجمه‌های فارسی . تا حدی که نگارنده‌ی این سطور اطلاع دارد ، در ایران ، جبر خِیام اول بار در سال ۱۳۱۷ هـ ش در جزء کتابی ، تحت عنوان جبر و مقابله‌ی خِیام با نضام تاریخ علوم ریاضی از سه هزار سال قبل از میلاد تا زمان خِیام ، بتوسط مؤلف کتاب حاضر و به همت آقای نصرالله سبوحی ، صاحب کتابفروشی مر کزی ، در تهران به چاپ رسید . و کتاب مذکور ، علاوه بر ترجمه‌ی ملخص رساله‌ی خِیام بزبان امروز ریاضیات و تعلیقات و حواشی مربوط بآن ، مشتمل بر متن آن رساله ، تاریخ ریاضیات ، تاریخ ارقام و وضع علامات و استعمال حروف ، و مسائل ثلاثه میباشد ، و در تهیه‌ی آن استفاده‌ی کامل از کتاب ویکه شده و به ترجمه‌ی انگلیسی نیز مراجعه شده است . و دومین ترجمه‌ی کامل[†] فارسی همین ترجمه‌ی حاضر است که به همت و تشویق انجمن آثار ملی فراهم شده و شرح مجمل آن در دیباچه‌ی کتاب آمده است .

تبصره - ترجمه‌ی روسی جبر خِیام با حواشی ، بتوسط ب. آ. روزنفلد و آ. پ.

(☆) David Eugene Smith (۱۸۶۵ - ۱۹۴۴) .

(†) مقصود اینست که تمام کتاب بدون تلخیص به فارسی نقل شده ، نه اینکه ترجمه خالی

از عیب و نقص است .

پوشکویج سابق آلد کر، در جزء جلد ششم مجموعه‌ی تحقیقات تاریخ ریاضیات بچاپ رسیده است (مسکو ۱۹۵۳).

§ ۴۰۳۰۴ تحلیل رساله‌ی جبر خیام - در این جزء ملاحظاتی چند راجع

به رساله‌ی جبر خیام می‌آوریم. این ملاحظات را می‌توان متمم کلیات مذکور در § ۴۰۲ و راهنمای مطالعه کنندگان جبر خیام تلقی کرد.

رساله‌ی جبر خیام با يك مقدمه آغاز می‌شود که تاریخچه‌ی بسیار مختصری از تحقیقاتی که پیش از خیام در حل معادلات درجه‌ی سوم شده دربر دارد. تاریخچه‌ای که در رساله‌ی دیگر خیام آمده (§ ۶۰۴۰۴) از آنچه در مقدمه‌ی رساله‌ی جبر گفته شده جامعتر است.

بقیه‌ی مواد اصلی کتاب را می‌توان به پنج مبحث عمده - تعریفات و اصطلاحات؛ طبقه‌بندی معادلات؛ معادلات درجه‌ی دوم و قابل تحویل به آنها؛ معادلات درجه‌ی سوم؛ معادلات کسری - تقسیم کرد. در پایان انتقاد کارهای ابوالجود در حل معادله‌ی درجه‌ی سوم می‌آید.

ما برای تسهیل ارجاع و مراجعه، مواد کتاب را بر حسب موضوع به شرح و با عناوین ذیل فصل بندی کرده‌ایم:

شماره در ترجمه‌ی فارسی	شماره در متن	عنوان فصل
§ ۵۰۱	§ ۱۰۱	تعریفات و اصطلاحات
§ ۵۰۲	§ ۱۰۲	طبقه بندی معادلات
§ ۵۰۳	§ ۱۰۳	حل مفردات
§ ۵۰۴	§ ۱۰۴	معادلات سه جمله‌ای درجه‌ی دوم مقترنات سه تائی درجه‌ی سوم قابل
§ ۵۰۵	§ ۱۰۵	تحویل به درجه‌ی دوم
§ ۵۰۶	§ ۱۰۶	مقدمات حل معادلات درجه‌ی سوم
§ ۵۰۷	§ ۱۰۷	مقترنات سه تائی درجه‌ی سوم

عنوان فصل	شماره در متن	شماره در ترجمه فارسی
مقترنات چهارتائی سه بایک	§ ۱۰۸	§ ۵۰۸
مقترنات چهارتائی دو با دو	§ ۱۰۹	§ ۵۰۹
معادلات کسری	§ ۱۰۱۰	§ ۵۰۱۰
نقدکارهای ابوالوجود	§ ۱۰۱۱	§ ۵۰۱۱

و اینک می‌پردازیم به تحلیل مواد رساله‌ی جبر خیّام؛ و مقدمه‌ی توجّه خواننده را به مندرجات ۴۰۲-۴۰۲۰۱ §§ در معرفی خیّام بعنوان عالم جبر جلب می‌کنیم. § ۴۰۳۰۴۰۱ فصل اول. فصل اول کتاب مشتمل است بر تعریف جبر، تعریف مقدار، اصطلاحات جبری، و ملاحظات کلی راجع به معادلات.

رؤوس مطالب گفتنی در این مباحث را سابقاً بخصوص در ۴۰۲-۴۰۲۰۱ §§ گفتیم. در باب اصطلاحات جبری می‌توان به ۳۰۶۰۴ § مراجعه کرد. نظر خیّام در باره‌ی مال مال و تمیز «حلّ عددی» معادله (یعنی حلّ آن وقتی مجهول عدد باشد) از «حلّ هندسی» آن (یعنی حلّ معادله وقتی مجهول مقدار هندسی باشد) در ۴۰۲۰۱ § بررسی شد.

§ ۴۰۳۰۴۰۲ فصل دوم، طبقه‌بندی معادلات - در این فصل خیّام معادلات سه درجه‌ی اول را بر حسب اینکه مفرد (دوجمله‌ای) یا مقترن (دارای بیش از دوجمله) باشند به ۲۵ صنف تقسیم می‌کند، باین شرح:

(الف) شش صنف مفرد (دوجمله‌ای)

(۱) $a = x$ [§ ۵۰۳۰۱]

(۲) $a = x^2$ [§ ۵۰۳۰۲]

(۳) $a = x^3$ [§ ۵۰۳۰۴]

(۴) $bx = x^2$ [§ ۵۰۳۰۶]

(۵) $bx = x^3$ [§ ۵۰۳۰۷]

(۶) $cx^2 = x^3$ [§ ۵۰۳۰۸]

(ب) نوزده صنف معادله‌ی مقتدرن (سه یا چهار جمله‌ای)

سه تائی

(I) سه صنف درجه‌ی دوم :

$$(۷) \quad x^2 + bx = a \quad [\S ۵۰۴۰۲]$$

$$(۸) \quad x^2 + a = bx \quad [\S ۵۰۴۰۳]$$

$$(۹) \quad bx + a = x^2 \quad [\S ۵۰۴۰۴]$$

(II) سه صنف قابل تبدیل بدرجه‌ی دوم :

$$(۱۰) \quad x^2 + cx^2 = bx \quad [\S ۵۰۵۰۲]$$

$$(۱۱) \quad x^2 + bx = cx^2 \quad [\S ۵۰۵۰۳]$$

$$(۱۲) \quad cx^2 + bx = x^2 \quad [\S ۵۰۵۰۴]$$

(III) شش صنف درجه‌ی سوم غیر قابل تحویل بدرجه‌ی پایین تر :

$$(۱۳) \quad x^3 + bx = a \quad [\S ۵۰۷۰۲]$$

$$(۱۴) \quad x^3 + a = bx \quad [\S ۵۰۷۰۳]$$

$$(۱۵) \quad a + bx = x^3 \quad [\S ۵۰۷۰۴]$$

$$(۱۶) \quad x^3 + cx^2 = a \quad [\S ۵۰۷۰۵]$$

$$(۱۷) \quad x^3 + a = cx^2 \quad [\S ۵۰۷۰۶]$$

$$(۱۸) \quad a + cx^2 = x^3 \quad [\S ۵۰۷۰۷]$$

چهارتائی

(IV) چهار صنف سه با يك

$$(۱۹) \quad x^3 + cx^2 + bx = a \quad [\S ۵۰۸۰۲]$$

$$(۲۰) \quad x^3 + cx^2 + a = bx \quad [\S ۵۰۸۰۳]$$

$$(۲۱) \quad x^3 + bx + a = cx^2 \quad [\S ۵۰۸۰۴]$$

$$(۲۲) \quad x^3 = bx + cx^2 + a \quad [\S ۵۰۸۰۵]$$

(V) سه صنف دو با دو

$$(۲۳) \quad x^3 + cx^2 = bx + a \quad [\S ۵۰۹۰۲]$$

$$(۲۴) \quad x^3 + bx = cx^2 + a \quad [\S ۵۰۹۰۳]$$

$$(۲۵) \quad x^3 + a = bx + cx^2 \quad [\S ۵۰۹۰۴]$$

خیام گوید از این معادلات، (۶) - (۴) قابل تحویل به (۱) یا (۲) و دسته‌ی

(II) قابل تحویل به دسته‌ی (I) است، ولی دلایل جبریه‌ای پیشین را بر این امر،

که مبتنی بر تناسب‌های

$$۱ : x = x : x^2 = x^2 : x^3$$

است، کافی نمی‌داند، بلکه وقتی مجهول معادله «مقدار» باشد، برطبق روش عمومی خود (۴۰۲۰۱ §)، برای اثبات قابل تحویل بودن، برهان هندسی لازم می‌شمارد (این براهین را در ۵۰۳ § و ۵۰۵ § می‌آورد).

در باب طبقه بندی معادلات و اهمیت کار خیام به ۳۰۶۰۶ § و ۶۰۴۰۳ § و ۴۰۲ § مراجعه شود.

۴۰۳۰۴۰۳ § فصول سوم - پنجم - این فصول چیزی زاید بر کارهای پیشینیان ندارد الا اینکه خیام تحویل بعضی معادلات را به درجه‌ی پایین‌تر به طریق هندسی ثابت کرده است.

در باب معادلات درجه‌ی دوم (۵۰۴ §)، خیام چیزی بر آنچه خوارزمی آورده (۳۰۶۰۷ §) نیفزوده و حتی بعضی مثالهایی که می‌آورد همان امثله‌ی خوارزمی است، منتهی براهین خیام منقح‌تر و جامع‌تر است.

در باب شرایط خیام برای امکان معادلات عددی درجه‌ی دوم سابقاً سخن گفتیم. شرایط وی، آنچه زاید بر منفی نبودن مبین معادله است، علاوه بر اینکه اصلاً بی‌مورد است (۴۰۲۰۱ §) نادرست هم هست *.

ضمناً دو مسئله در ۵۰۳ § آمده است که خیام در سراسر کتاب برای متجانس کردن معادلات آنها را بکار می‌برد، و آنها عبارتند از نمایش دادن يك عدد بوسیله‌ی يك «سطح» (یعنی مربع مستطیل) یا يك «مجسم» (یعنی مکعب مستطیل). عدد a را در حالت اول با مستطیلی با اضلاع a و واحد نمایش می‌دهد، و در صورت دوم با مکعب مستطیلی که قاعده‌اش «مربع واحد» (یعنی مربعی بضلع واحد طول) و ارتفاعش a است (۵۰۳۰۳ § و ۵۰۳۰۵ §).

۴۰۳۰۴۰۴ § فصل ششم، مقدمات حل معادلات درجه‌ی سوم - مسائلی که در این فصل حل شده عبارتست از:

(*) رجوع شود به ذیل مربوط به شرایط در ۵۰۴۰۲ § و نیز ذیل ۵۰۴۰۳۰۲ §

(الف) درج دو واسطه‌ی متناسب بین دو طول مفروض ($\S 30701$)، بوسیله‌ی تقاطع دو سهمی.

(ب) تعیین هندسی مکعب مستطیلی که قاعده‌اش مربع مفروض 1^2 باشد و با مکعب مستطیل مفروضی به قاعده‌ی s^2 و ارتفاع h معادل باشد.

(ج) تعیین مکعب مستطیلی که قاعده‌اش مربع و ارتفاعش h و حجمش مساوی حجم مکعب مستطیلی بقاعده‌ی s^2 و ارتفاع h' باشد.

چنانکه خواهیم دید، خیام در سراسر کتاب خود از مسائل (ب) و (ج) برای متجانس کردن معادلات استفاده می‌کند؛ بدین طریق. فرض کنیم a و c و β مقادیر مفروضی باشند. a را، چنانکه در $\S 4030403$ گفته شد، بوسیله‌ی مکعب مستطیل S بقاعده‌ی 1×1 و ارتفاع a نمایش می‌دهیم. بر طبق مسائل (ب) و (ج) می‌توان مکعب مستطیلی مانند S' ، هم حجم S ، ساخت که: (۱) قاعده‌اش ربعی به ضلع β باشد، یا (۲) قاعده‌اش مربع و ارتفاعش c باشد. اگر λ ارتفاع اولی‌یاضلع قاعده‌ی دومی باشد، در حالت اول $\beta^2 a = c \lambda^2$ و در صورت ثانی $a = c \lambda^2$.

پس از این مقدمات حل هندسی معادله‌ی $x^3 = a$ بوسیله‌ی تقاطع سهمی و دایره می‌آید.

$\S 4030405$ فصول هفتم - نهم - این فصول مهمترین قسمت رساله‌ی خیام و مشتمل بر حلّ و بحث اصناف سیزده گانه‌ی معادلات درجه‌ی سوم است (معادلات دسته‌های III - V، $\S 4030402$).

تفصیل طریق خیام برای حلّ هر صنف از معادلات درجه‌ی سوم در ترجمه‌ی رساله‌ی وی و توضیحات کافی در ذیل مسائل آمده است ($\S\S 50701 - 50905$). در این مقام اصول کلی طریق وی را بیان می‌کنیم.

خیام در تمام معادلات مورد بحث ضریب جمله‌ی درجه‌ی سوم را واحد می‌گیرد، و قبل از شروع به حلّ معادله آنرا متجانس می‌کند، بدین طریق:

(۱) ضریب جمله‌ی درجه‌ی دوم (c) را بوسیله‌ی طولی نمایش می‌دهد.
 (۲) ضریب جمله‌ی درجه‌ی اول (b) را بصورت β^2 ، یعنی بوسیله‌ی مربعی
 به مساحت b ، نمایش می‌دهد ($b = \beta^2$).

برای این منظور، b را بوسیله‌ی «سطحی» نمایش می‌دهد (§ ۴.۳.۴.۰۳)،
 و سپس مربعی معادل این سطح می‌سازد.

(۳) جمله‌ی معلوم (a) را در معادلات $x^2 + cx^2 = a$ و $x^2 + a = cx^2$
 بصورت λ^3 ، و در معادله‌ی $x^2 = cx^2 + a$ بصورت λ^2 ، و بالاخره در سایر معادلات
 بصورت $\lambda\beta^2$ نمایش می‌دهد.

این مقصودها بوسیله‌ی مسائلی که قبلاً حل شده بعمل می‌آید. توضیح آنکه
 نمایش a بصورت λ^3 بحل معادله‌ی $\lambda^3 = a$ بر می‌گردد، و دو نمایش دیگر بطریقی
 که در § ۴.۳.۴.۰۴ توضیح دادیم.

پس از اینکه معادله متجانس شد، قطوع لازم برای حل هر معادله را برحسب
 ضرایب معادله تعریف می‌کند، و از تقاطع آنها جواب مثبت معادله را (در صورت
 وجود آن) بدست می‌آورد، و بوسیله‌ی مقایسه‌ی احجام و افزودن و اسقاط حجم‌ها،
 صدق کردن جواب را در معادله ثابت می‌کند.

اینک می‌رسیم به عده‌ی جوابها. ختیم، پس از حل هر مسئله، در عده‌ی نقاط
 تقاطع قطوع مربوط به آن، یعنی در عده‌ی جوابهای (مثبت) معادله بحث می‌کند، و
 در همه‌ی حالات عده‌ی ریشه‌های مثبت را بدرستی تعیین می‌کند، مگر در
 دو مورد، که اگر در آنها به خطا نرفته بود، به احتمال قوی به اکتشافات
 بسیار مهم و اساسی نائل می‌شد.

یکی از این موارد معادله‌ی $x^2 + bx = cx^2 + a$ است (§ ۵.۰۹.۰۳)، که
 با $c < a/b$ ممکن است سه ریشه‌ی حقیقی و مثبت داشته باشد. اما بحث
 ختیم در عده‌ی نقاط تقاطع قطوع مسئله خالی از دقت است، و بهمین جهت فقط یکی
 از جوابهای معادله را بدست می‌آورد. خطای ختیم در این مورد باعث تأسف است،

زیرا وی با خبر بود که معادله‌ی درجه‌ی دوّم ممکن است دو جواب (مثبت) داشته باشد، و اگر به معادله‌ی درجه‌ی سوّمی با سه ریشه می‌رسید شاید به کشف رابطه‌ی بین عدّه‌ی جوابهای معادله با درجه‌ی آن نایل می‌شد.

در تشخیص عدّه‌ی جوابهای معادله‌ی $cx^2 + bx + a = x^3$ نیز در بعضی حالات خیّام بخطا رفته و متوجّه دوّمین ریشه‌ی مثبت معادله نشده است (§ ۵۰۹۰۴). منشاء این خطا اینست که خیّام فقط به رسم کردن قسمتی از قطوع (نصف دایره ، نصف سهمی ، یک شاخه‌ی هذلولی) مورد نیاز اکتفا می‌کند ، و این بسیار جای تأسف است ، زیرا بعّلت همین رسم قطوع ناتمام ، وی از دریافتن یکی از مهمترین مفاهیم ریاضی - یعنی اعداد منفی - باز مانده است ، اگر عادت زبان آور رسم قطعهای ناتمام نبود ، به احتمال قوی متوجّه ریشه‌های منفی می‌شد ، و به یکی از بزرگترین اکتشافات ریاضی می‌رسید .

باید دانست که خیّام ، در بحث از عدّه‌ی جوابها ، شرایط تقاطع یا تماس یا عدم تقاطع قطوع را بر حسب ضرایب معادله تعیین نمی‌کند ، مگر در بعضی موارد که اجمالا در این مطلب وارد می‌شود ^۵ . از جمله می‌توان بحث معادلات $x^2 + a = cx^2 + bx + a$ (§ ۵۰۷۰۶) و $x^2 + a = cx^2 + bx + a$ (§ ۵۰۸۰۴) را نام برد .

بالاخره ، خیّام حلّ معادله‌ی درجه‌ی چهارم را به طرّقی که در رساله‌ی جبر آورده ممتنع می‌شمارد ، و حال آنکه بعضی از پیشینیان وی صور خاصی از معادله‌ی درجه‌ی چهارم را بوسیله‌ی قطوع مخروطی حلّ کرده‌اند (§ ۳۰۷۰۳) .

§ ۴۰۴۰۴۰۶ فصل دهم ، معادلات کسری - معادلات کسری خیّام معادلاتی است بین قوای مجهول و قوای عکس آن ، و طرّیق وی برای حلّ این معادلات تغییر مجهول $(1/x = z)$ و یا ضرب کردن طرفین معادله در قوه‌ی مناسبی از مجهول است ، و وی معادلات مورد بحث را به بیست و پنج صنف اصلی تقسیم می‌کند .

(۵) بعضی ریاضیون پیش از خیّام نتایج بسیار دقیقتری در این باب بدست آورده‌اند که نمونه‌های آنها را وپکه در ضمایم B و C از کتاب نفیس خود (§ ۴۰۳۰۲) آورده است .

§ ۴۰۴ رساله در تحلیل يك مسئله

§ ۴۰۴-۱ مقدمه - نگارنده اول بار بوسیله‌ی مقاله‌ی سابق الذکر * عباس اقبال آشتیانی راجع به عمر خیّام از این رساله، که در ۱۰۲۰۴۰ § در ضمن آثار ریاضی خیّام از آن اسم برده شد، اطلاع یافت. در ضمن این مقاله، محقق مذکور چنین می‌نویسد:

« غیر از تألیفاتی که از خیّام در دست است و یا مورّخین از او نقل کرده‌اند »

« نگارنده رساله‌ای از او دارم به عربی در پنج ورق بخط نسخ ریز در حلّ يك مسئله‌ی »

« جبری بوسیله‌ی قطوع مخروطی در جواب کسی که آنرا از حکیم سؤال کرده، »

« و عنوان آن اینست: »

« هذه رسالة لابي الفتح عمر بن ابراهيم النخيامي . »

« رساله‌ی مزبور با اینکه موضوع آن ریاضی است باز از پاره‌ای مسائل تاریخی »

« و حکمتی خالی نیست و ما ترجمه‌ی يك فقره از آنرا که به تاریخ علوم ریاضی در »

« میان مسلمین مربوط است در اینجا نقل می‌کنیم . . . » * * *

بعداً فاضل نامبرده نسخه‌ی خطّی خود را، که جزء مجموعه‌ی † کوچکی از رسائل ریاضی بود، در اختیار نگارنده گذاشت، و او رساله‌ی خیّام و بعضی دیگر از

(*) رجوع شود به ذیل صفحه‌ی ۱۳۵ .

(**) سپس قسمتی از مطالب تاریخی § ۶۰۴۰۴ نقل شده است .

(†) محقق محترم، آقای محمد تقی دانش پژوه، شرحی در معرفی این مجموعه، که فعلاً در کتابخانه‌ی مرکزی دانشگاه تهران محفوظ است، در مجلد هشتم فهرست کتابخانه‌ی مرکزی دانشگاه (تحت طبع)، تحت شماره‌ی ۱۷۵۱ نگاشته‌اند که خلاصه‌ای از آن با اندک تصرفی ذیلاً برای مزید فایده نقل می‌شود :

این مجموعه را عباس اقبال در ذیحجه‌ی ۱۳۳۵ در بازار حلبی ساها به بهای سه‌قران خریده است، و آن مشتمل بر یازده رساله است در ۸۱ ورق بخط نسخ محمد ابن ابانراب ابن احمد، و در پشت اوراق ۵۶ و ۸۵ تاریخ کتابت ۱۲۸۳ مذکور است. بعضی صفحات ۱۷ و برخی ۲۳ سطر دارد، و اندازه‌ی متن صفحات ۱۷ سطری ۱۵×۷٫۵ سانتیمتر و اندازه‌ی سایرین ۱۵×۹ سانتیمتر، و بالاخره اندازه‌ی خارجی مجموعه ۱۴×۲۰٫۵ سانتیمتر می‌باشد. کاغذ آن فرنگی و جلدش تیماج حنائی است .

رسالات جزء مجموعه بشرح ذیل است :

(بقیه در ذیل صفحه‌ی بعد)

مطالب آن مجموعه را بدقت استنساخ کرد، و کوشید که تصرفی در آن ننماید مگر در مواردی که حروف مربوط به تصاویر یا قضایا و مقالات هندسه‌ی اقلیدس نادرست بود، یا کلمه‌ای اشتبهاً مکرر شده بود، و امثال اینها.

وقتی طبع کتاب حاضر آغاز گردید، چون نگارنده را خبری از اصل رساله‌ی مذکور نبود، همان نسخه‌ای را که استنساخ کرده بود برای چاپ آماده ساخت، و آن همانست که در قسمت دوم این کتاب بنظر خوانندگان میرسد. بعداً بتوسط محقق محترم، آقای دانش پزوه، اطلاع حاصل شد که اصل مجموعه در کتابخانه‌ی مرکزی دانشگاه تهران محفوظ است، و بشرح مذکور در مقدمه‌ی این کتاب، عکس نسخه‌ی رساله‌ی خیام فراهم شد، و برای مزید فایده به آخر کتاب حاضر ملحق گردید. از جنبه‌ی تاریخی و در بررسی رشد فکر ریاضی خیام (۴۰۲ §) شاید توجه باین مطلب خالی از فایده نباشد که خیام این رساله را قبل از رساله‌ی جبر تصنیف کرده است، زیرا در این رساله وعده می‌دهد (آخر ۶۰۴۰۴ §) که «اگر فرصتی دست دهد و توفیق رفیق شود، همه‌ی این اصناف چهارده گانه [از معادلات درجه‌ی سوم] را، با جملگی شاخه‌ها و حالات آنها و تمیز آنچه ممکن است از آنچه ممتنع است» گرد آورد، «تا رساله‌ای شامل عده‌ای از مقدمات که در اصول این فن [یعنی فن جبر] فواید عظیم دارد پرداخته آید».

بقیه‌ی ذیل صفحه‌ی قبل

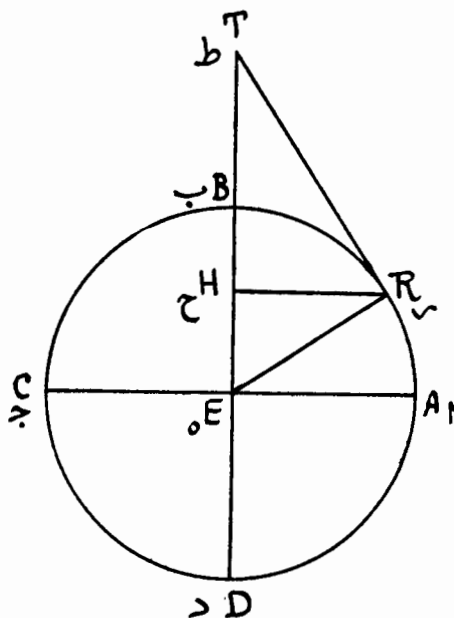
- (۱) شرح المقالة العاشرة من اصول اقلیدس، از ابوتراب ابن احمد، مورخ ۲۲ رجب ۱۲۶۱؛
- (۲) [رساله‌ی مورد بحث در کتاب حاضر]؛ (۳) مقالة فی الوزن والمیزان، از اقلیدس؛ (۴) رساله فی استخراج تناسب الاعداد الستة؛ (۵) مسئله من کتاب ارشمیدس؛ (۶) برهان آخر للسنجری [برهان دیگری از همان مسئله است]؛ (۷) رساله فی استخراج ضلع المسبع فی الدائرة، از ابو سهل کوهی؛ (۸) رساله عمل الخمس المتساوی الاضلاع من مربع معلوم، از ابوسهل کوهی؛ (۹) فائدة فی النسبة؛ (۱۰) مقالة فی ان النبر طبیعة موسیقاریه؛ (۱۱) رساله در معرفت وترثلث قوس، از میرزا ابوتراب. پایان مطالب مستخرج از یادداشتهای آقای دانش پزوه
- میرزا ابوتراب مذکور (مؤلف رسالات شماره‌ی ۱ و ۱۱)، بقول عباس اقبال آشتیانی در مقاله‌ی سابق الذکر (رجوع شود به ذیل صفحه‌ی ۱۳۵)، از ریاضیون عهد محمدشاه قاجار بوده است.

§ ۴۰۴۰۲ مندرجات رساله - مندرجات رساله را می توان به دو بخش عمده تقسیم کرد، اول طرح مسئله‌ی موضوع رساله و تحلیل آن به يك معادله‌ی درجه‌ی سوم و حل این معادله بوسیله‌ی قطوع مخروطی؛ دوم کلیاتی راجع به معادلات که بالاخص مشتمل بر طبقه‌بندی معادلات درجه‌ی اول تا سوم و تاریخچه‌ای از کارهای ریاضیون اسلامی در حل معادلات درجه‌ی سوم است.

مسئله‌ی موضوع رساله یافتن نقطه‌ای مانند R است بر ربع دایره‌ی AB بطوری

که $AE:RH = EH:HB$.

خیّام در حل مسئله بطریق تحلیل و ترکیب* عمل می کند، یعنی، باصطلاح امروز، ابتداء فرض می کند مسئله حل شده و تقسیم مطلوب بعمل آمده است (§۶۰۲)، و از آنجا نتیجه می گیرد که در مثلث قائم الزاویه‌ی ERT، $ET = ER + RH$.



(*) در باب طریق تحلیل و ترکیب یونانیان در اثبات احکام و حل مسائل رجوع شود به: هیث، سیزده مقاله، جلد ۱، صص ۱۳۷ - ۱۴۲، و مخصوصاً صص ۱۴۰ - ۱۴۱ که در آنها نکات لازم الرعایه در حل مسائل بوسیله‌ی تحلیل و ترکیب به بهترین وجهی تشریح شده است.

بدین وسیله، حلّ مسئله را برمی گرداند به تعیین مثلث قائم‌الزاویه‌ای که وترش مساوی مجموع یکی از دو ضلع دیگر و ارتفاع وارد بر وتر باشد، و ما برای اختصار چنین مثلثی را مثلث مُعین می‌خوانیم. سپس مثلثی واجد خاصیت مذکور می‌سازد، و برای این منظور تصویر ضلع مذکور را بر وتر ده می‌گیرد، و ثابت می‌کند که اگر x ارتفاع مثلث باشد، x در معادله $20x^2 + 2000 = x^2 + 200x$ صدقمی‌کند (§ ۶۰۳۰۴)، و پس از حلّ این معادله بوسیله‌ی قطوع مخروطی (§ ۶۰۵)، مثلث مُعین را می‌سازد، و بالاخره در § ۶۰۶ مسئله‌ی موضوع رساله را بوسیله‌ی این مثلث حل می‌کند. تفصیل مطلب با شرح و توضیحات اضافی ما در قسمت ششم کتاب آمده است.

باید گفته شود که این قسمت از رساله اهمیت خاصی ندارد، و اگرچه قریب یازده صفحه از رساله‌ی پانزده صفحه‌ای خیّام در حلّ مسئله‌ی مذکور است، در پایان رساله طریق دیگری در ده سطر از مصنّف نامعلومی آمده است که ما آنرا در پایان متن رساله (صفحه‌ی ۷۴) و ترجمه‌ی فارسی آنرا در آخر قسمت ششم نقل کرده‌ایم. اما چند مطلب دیگر در این رساله جالب توجه است.

(الف) طبقه‌بندی معادلات در این رساله (§ ۶۰۴۰۳) اساساً بر حسب درجه است. در باب اهمیت این موضوع رجوع کنید به § ۳۰۶۰۶ و § ۴۰۲.

(ب) قسمت تاریخی رساله (§ ۶۰۴۰۴) در روشن کردن مساعی دانشمندان دوره‌ی اسلامی در حلّ معادله‌ی درجه‌ی سوّم بسیار سودمند و از آنچه در مقدمه‌ی جبر خیّام آمده جامعتر است.

(ج) توجه به حلّ عددی مسئله (§ ۶۰۷). در رساله‌ی جبر خیّام از این مقوله

سخنی نیست.

بالاخره نکته‌ی دیگری که در این رساله بنظر ما حائز اهمیت است اشاره‌ی

(*) حالت خاصی از معادله‌ی « کعب و شیء » با « مال و اعداد ». رجوع شود به

§ ۵۰۹۰۳.

خیّام است^۵ به آلانی برای ساختن مکعبی معادل مکعب مستطیل مفروض برای اشخاصی که مخروطات نداند. به یقین می‌دانیم که ریاضیون اسلامی آلانی، بنام پرگار تام^۶، برای رسم قطوع مخروطی طرح و رسائی در باب آنها تألیف کرده بودند^۷ اما «آلتی» برای حلّ معادله‌ی $x^3 = a$ ، یعنی برای استخراج کعب، برای کسی که مخروطات نداند، حائز اهمیت است، و امیدواریم روزی معلوم شود که مقصود از آلتی که خیّام بآن اشاره می‌کند چیست.

در پایان این مختصر توجه خواننده را به ۴۰۲۰۱ - ۴۰۲ §§، در معرفی خیّام بعنوان عالم جبر، که در ضمن آن رساله‌ی مورد بحث با رساله‌ی جبر خیّام از جهاتی مقایسه شده است، جلب می‌کنیم.

§ ۴۰۵ اصطلاحات ریاضی خیّام

§ ۴۰۵۰۱ - اصطلاحات ریاضی خیّام همان اصطلاحات رایج در نزد ریاضیون اسلامی است.

از اصطلاحات جبری قدیم در § ۳۰۴۰۴ و § ۳۰۶۰۶ - ۳۰۶۰۴ §§ با تفصیل، کافی سخن گفتیم. بعلاوه، خیّام بعضی از اصطلاحات جبر را در رسائل خود تعریف می‌کند (رجوع شود به § - های ۱۰۱۰۳، ۱۰۱۰۳، ۵۰۱۰۳، ۱۰۱۰۵، ۵۰۱۰۵، ۱۰۲۰۱، ۵۰۲۰۱، ۲۰۴۰۲، و ۶۰۴۰۲).

اکثر اصطلاحات هندسی خیّام همانهاست که امروز نزد ما - یا لااقلّ نزد کسانی از ما که از عقل سلیم برخوردارند - رایج است، مانند خط، منحنی، قوس،

(۵) در حلّ مکعبی که معادل اعداد باشد، یعنی معادله‌ی $x^3 = a$.
 (۶) از آن جمله است رساله‌ی فی البرکار التام والعمل به از ابوسهل کوهی (۳۰۴۰۵۰۵ §)، و رساله‌ی فی البرکار التام از محمد ابن الحسین ابن محمد ابن الحسین، که در اواسط نیمه‌ی دوم قرن ششم هـ ق برآمده، و رساله‌ی مذکور را بنام سلطان معروف ایوبی الملك الناصر صلاح الدین یوسف I ابن ایوب (۵۳۲ - ۵۸۹ هـ ق)، نوشته است. رجوع شود به: ویکه، جبر خیّام، حواشی ص ۵۶ - ۵۷. (ونیز سارتن، مدخل، جلد اول، ص ۶۶۵ و ۷۱۸؛ بروکلان، جلد اول، ص ۲۵۴ و ۶۲۱).

دایره، مرکز، قطر، قاعده، ارتفاع، و غیره. از اصطلاحاتی که امروز منسوخ است میتوان اضافه کردن **سطحی برخطی و متکافی** (یا **مکافی**) بودن را ذکر کرد، که اولی را در § ۳۰۲۰۳۰۱ (ص ۸۵-۸۶) توضیح دادیم، و دیگری را خیام بمعنی «به نسبت عکس یکدیگر بودن» مصطلح امروز بکارمی برد. مثلاً گوید هر گاه مساحات دو مستطیل مساوی باشد، «قواعد آنها با ارتفاعاتشان متکافی اند»، یعنی قواعد آنها به نسبت عکس ارتفاعاتشان است؛ و كذلك در مورد دو مکعب مستطیل *.

بعلاوه، خیام الفاظ **سطح و مجسم** را بترتیب برای مستطیل و مکعب مستطیل اصلاح می کند (۱۰۶۰۳۰۱ § و ۵۰۶۰۳۰۱ §)، و لفظ **مرّبع** را، علاوه بر معنی اصطلاحی، احياناً بمعنی شکل (مستوی) چهار ضلعی بکار می برد (مثلاً ۲۰۴۰۲ § و ۶۰۴۰۲ §). در ترجمه‌ی فارسی رسائل خیام، در این موارد ما اصطلاحات کنونی را بکار برده‌ایم.

در باب **اصطلاحات مخروطات** توجه به توضیحات آتیه برای فهم مطالب خیام مفید است **.

خیام محور کانونی قطع را **سهم** آن و نقطه‌ی تقاطع آن را با منحنی (در مورد قطع مکافی) یا شاخه‌ای از آن که مورد نظر است (در مورد قطع زاید) **رأس** منحنی می خواند. **ضلع قائم** † در اصطلاح او طولی مساوی وتر کانونی عمود بر محور کانونی و **ضلع مایل** †† طول قطر کانونی است.

(*) تعریف «اشکال متکافیة الاضلاع» که در تحریر اقلیدس آمده (ابتدای مقاله‌ی ششم، ص ۸۲) بی معنی است، و همچنین است تعریف اقلیدس در متن یونانی موجود کتاب اصول (رجوع شود به: هیت، سیزده مقاله، جلد ۲، ص ۱۸۹).

(**) برای تسمیه‌ی قطوع رجوع شود به § ۳۰۲۰۳۰۳.

(†) رجوع شود به ذیل صفحه‌ی ۹۱.

(††) به لاتینی لائوس ترانسورسوم (Latus transversum).

قطوعی که خیام بکار می برد منحصر به دایره ، قطع مکافی (سهمی) ، و قطع زاید (هذلولی) متساوی القطرین است ، و در استعمال خواص[†] دو قطع اخیر - جز در مواردی که قطع زاید را به مجانب‌هایش[†] نسبت می دهد - رأس و سهم و مماس مرسوم از رأس را بر منحنی بترتیب ، باصطلاح امروز ، مبداء مختصات و محور طول و محور عرض می گیرد . عرض نقطه‌ای از منحنی را نسبت باین دستگاه خط[†] ترتیب و زاویه‌ی دو محور را زاویه‌ی ترتیب می خوانند .

(†) خیام اصطلاح خاصی برای مجانب منحنی ندارد ، و هر جا می خواهد از « هذلولی بسا » مجانبهای D و D' صحبت کند می گوید « قطع زایدی که خطوط D و D' آن را قطع نکنند » .

قسمت پنجم

رساله‌ی جبر خیام

(ترجمه‌ی فارسی)

قسمت پنجم رساله‌ی حکیم فاضل

غیاث‌الدین ابوالفتح عمر ابن ابراهیم خیامی نیشابوری

در اثبات مسائل جبر و مقابله

[مقدمه]

حمد خدا راست - خدائی که پروردگار جهانیان است - و انجام نیک پرهیزکاران را؛ و دشواری و تنگی جز بر ستمکاران نیست؛ و درود بر پیغمبران، خصوصاً بر محمد و جمیع خاندان پاک او.

یکی از مباحث ریاضی که در قسمتی از حکمت که معروف به علوم ریاضی است محتاج الیه می‌باشد فن جبر و مقابله است که برای استخراج مجهولات عددی و هندسی وضع شده است. و در این فن اصنافی [از معادلات] هست که در حل آنها یک رشته مقدمات بسیار دشوار محتاج الیه می‌باشد، و باین جهت، اغلب کسانی که باین اصناف پرداخته‌اند در حل آنها و امانده‌اند. [توضیح آنکه] از پیشینیان سخنی درین باب به ما نرسیده است - شاید در حل این اصناف جستجو و مطالعه کرده‌اند، ولی چیزی در نیافته‌اند، یا در تحقیقات خود نیازمند به امعان نظر در آنها نشده‌اند، و یا بالاخره، شاید آثارشان درین باب به زبان ما ترجمه نشده است. و اما از متأخرین، یکی از ایشان، بنام ماهانی^۱، در صدد تحلیل جبری مقدمه‌ای برآمد که ارشمیدس در شکل چهارم از مقاله‌ی هشتم کتاب خود موسوم به کره و اسطوانه بکار برده است، و این امر منجر شد به معادله‌ای بین کعبها و مالها و اعداد، و وی، بعد از تفکر زیاد، از حل آن عاجز ماند، و لهذا حکم به امتناع آن کرد. بعد، ابو جعفر خازن پیدا شد، و آن را به وسیله‌ی قطوع مخروطی حل نمود. سپس، بعد از وی، جماعتی از علمای

هندسه به [حل] عده‌ای از اصناف [معادلات] جبر محتاج شدند ، و بعضی از آنان برخی از آنها را حل کردند ، ولی هیچک را در برشمردن اصناف معادلات و معین کردن انواع هر صنف و برهان حل آنها مطلب معتبری نیست مگر در مورد دو صنف که بزودی ذکر خواهم کرد ^{۴۰} .

و من همواره سخت اشتیاق به تحقیق استدلالی این اصناف و جدا کردن حالات ممکن و ممتنع هر صنف داشتم ، چو می‌دانستم که این امر در حل مسائل دشوارشیداً مورد احتیاج است . لکن تضاریف زمان همواره با پیشامدهائی همراه بود که پرداختن باین امر را بعهده‌ی تعویق می‌انداخت ، و برای من فراغتی نمی‌گذاشت که صرف تدوین این مطلب کنم و فکر خود را بر آن متمرکز سازم . زیرا ما گرفتار روزگاری هستیم که از اهل علم فقط عده‌ی کمی ، مبتلی به هزاران رنج و محنت ، باقی مانده ، که پیوسته در اندیشه‌ی آنند که غفلت‌های زمان را فرصت جسته به تحقیق در علم و استوار کردن آن بپردازند . و بیشتر عالم نمایان زمان ما حق را جامه‌ی باطل می‌پوشند ، و گاهی از حد خود نمائی و تظاهر به دانائی فراتر نمی‌نهند . و آنچه راهم می‌دانند جز در راه اغراض مادی پست بکار نمی‌برند ، و اگر بینند که کسی جستن حقیقت و برگزیدن راستی را وجهه‌ی همت خود ساخته ، و در ترك دروغ و خودنمائی و مکر و حيله جهد و سعی دارد ، او را خوار می‌شمردند و تمسخر می‌کنند . و در هر حال خدا یاری دهنده و پناه همه است .

و چون خدای تعالی نعمت پیوستگی به آستان سرور بزرگ بیهمتا ، قاضی القضاة ، امام سیدابوطاهر[†] را ، که خداوند بزرگیش را همواره برقرار دارد و حسودان و دشمنانش را مقهور فرماید ، به من ارزانی داشت - و این پس از آن بود که از دیدن کسی چون او ، که در همه‌ی فضایل عملی و نظری و در جمع بین موشکافی در علوم و پایداری در اعمال و خیرخواهی برای هر فردی از هم‌نوعان خود کامل باشد ، مأیوس

(۴۰) در این باب مخصوصاً به §۶۰۴۰۴ مراجعه شود .

(†) §۴۰۱۰۲ (الف) .

شده بودم - قلبم به دیدار او باز و نامم به مصاحبت او بزرگ شد ، و در پرتو انوار وی کارم بالا گرفت ، و به انعام و الطاف او پشتگرمی یافتم . پس ، برای نزدیکی جستن به مجلس بلندپایه‌ی او چاره جز آن ندیدم که ، با تلخیص زبده‌های حقایق فلسفی که راستی و درستی آنها را معلوم کرده بودم ، فرصتی را که سختیهای روزگار از من گرفته بود تلافی کنم ، و این کار را با تنظیم این اصناف از مقدمات جبری آغاز کردم - چو ریاضیات به تقدیم سزاوارتر است - و در این امر به ریسمان توفیق الاهی چنگ زدم ، و از او چشم امید دارم که مرا به ادامه‌ی این کار موفق بدارد تا نتیجه‌ی بحث خود و بحث پیشینیانم را در علومی که اهمّ از دیگر علوم است بدرستی تعیین کنم ، و در این امر به دستاویز محکم پروردگار که حافظ ما از خطاها است چنگ می‌زنم ، که البته اجابت دعا در دست او و در همه حال توکل بر اوست .

[§ ۵۰۱ تعریفات و اصطلاحات]

[§ ۵۰۱۰۱ جبر و مقابله -] بیاری خدا و توفیق نیک وی ، گویم که فن جبر و مقابله فنی است علمی که موضوع آن عدد مطلق و مقادیر قابل سنجش است از آن جهت که مجهول اند ولی مرتبط با چیز معلومی هستند که بوسیله‌ی آن می‌توان آنها را استخراج کرد . و این چیز یا کمیتی است ، و با رابطه‌ای که بستگی معلوم و مجهول منحصر بآن است ، و از بررسی و تحلیل مجهولات موضوع مسئله استنباط می‌شود . *

مطلوب علم جبر عوارضی است که به موضوع آن ، از آن جهت که - بشرح مذکور - موضوع آنست ، ملحق می‌شود . و کمال علم جبر آگاهی از طرق ریاضی است که بوسیله‌ی آنها نوع مذکور از استخراج مجهولات عددی یا هندسی فهمیده می‌شود .

[§ ۵۰۱۰۲ مقادیر -] و [مقصود از] مقادیر کمیت‌های متصل است ، و آن -

(*) عبارت متن (§ ۱۰۱۰۱) مشتمل بر ضمائر چندی است که مراجع آنها آشکار نیست . ترجمه‌ی فوق ، تا حدی که ما می‌توانیم تشخیص دهیم ، با متن و با اصل مطلب ظاهراً نا مطابق نیست .

بنابر آنچه بالاجمال در قاطیغوریاس و بتفصیل در حکمت اولی مذکور است - چهار است: خط، سطح، جسم، و زمان. و جماعتی مکان را نوعی قسیم سطح در تحت جنس متصل می‌شمارند[☆]، ولی بررسی دقیق بطلان این رأی را آشکار می‌سازد، و درست اینست که مکان سطحی است در حال خاصی، ولی تحقیق در این امر خارج از موضوع بحث ماست.

و عادةً زمان را در موضوعات مسائل جبرنمی‌آورند، ولی ذکر آن در این باب جایز است.

[§ ۵۰۱۰۳ بعضی اصطلاحات جبریهها^{☆☆}] - و عادت جبریهها اینست که در فن خود مجهولی را که می‌خواهند استخراج کنند شیء نامند، و حاصل ضرب آنرا در مثل خودش مال، و حاصل ضرب مال آنرا در آن [یعنی در آن شیء]، کعب، و حاصل ضرب کعب آنرا در مثل آن [شیء] مال مال، و حاصل ضرب کعب آنرا در مال آن مال کعب، و حاصل ضرب کعب آنرا در مثل آن [کعب] کعب کعب، و بهمین قیاس تا هر مرتبه که پیش رویم.

و از کتاب اقلیدس در اصول[†] معلوم است که این مراتب جملگی متناسب‌اند، یعنی نسبت واحد به جذرها مثل نسبت جذر به مال و مثل نسبت مال به کعب است. پس نسبت عدد به جذرها مثل نسبت جذرها است به مالها و مثل نسبت مالها است به کعب‌ها و مثل نسبت کعب‌ها است به مال مالها، و هکذا تا هر مرتبه که پیش رویم^{††}.

[§ ۵۰۱۰۴ مرتبه‌ی تعلیمی این رساله -] و باید دانست که این رساله را جز کسی که بر کتاب اقلیدس در اصول و کتاب وی در معطیات و دو مقاله‌ی [اول]

(☆) یعنی مکان را نوعی از جنس کم و در مرتبه‌ی سطح می‌شمارند.

(☆☆) رجوع شود به § ۳۰۶۰۴.

(†) تحریر اقلیدس، مقاله‌ی نهم.

(††) مقصود اینست که نسبت هر عدد به همان عدد از جذرها مساوی نسبت عددهای از جذرها

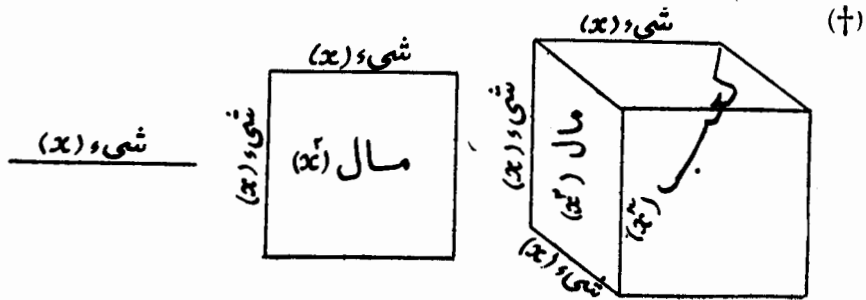
است بهمان عدد از مالها، و غیره. بعبارت امروزی

$$a : ax = bx : bx^2 = cx^2 : cx^3 = \dots$$

کتاب آپولونیوس در مخروطات مسلط باشد نمی‌فهمد، و همانا کسی که از دانستن یکی ازین سه [کتاب] بازمانده راهی برای دانستن این رساله ندارد، و من این زحمت را بر خود هموار کرده‌ام که درین رساله جز بآن کتابهای سه گانه توسل نجویم. [۵۰۱۰۵ § معادله -] و استخراج های [مجهولات به علم] جبر بوسیله‌ی معادله انجام پذیرد، و آن، بنا بر مشهور، معادله‌ی برخی ازین مراتب [‡] است با بعضی از آنها. و هر گاه جبری مال مال را در مسائل مربوط به مقادیر هندسی بکار برد، البته این استعمال بر سبیل مجاز است، نه از راه حقیقت، زیرا وجود مال مال در مقادیر ممکن نیست، و آنچه در مقادیر پیش می‌آید، یا يك بعد است، و آن جذر یا - هر گاه نسبت به مربعش [، یعنی مربعی که این بعد ضلع آن باشد،] ملحوظ شود - ضلع است؛ و پس از آن دو بعد می‌آید، و آن سطح است، و مال در مقادیر سطح مربع است؛ و پس از آن سه بعد می‌آید، و آن جسم است، و مکعب در مقادیر همانا جسمی است که شش مربع بآن محیط باشند [†]؛ و چون بعد دیگری نیست،

(‡) مقصود عدد، شیء، مال، کعب، و غیره است.

معادلاتی که درین کتاب مورد بحث است، با اصطلاح امروز، يك مجهولی است، و هر گاه از معادله‌ای بین چند مرتبه صحبت شود، مقصود مراتب مربوط به يك مجهول (یعنی يك شیء) است که همان مجهول مسئله می‌باشد. بعلاوه خیام همواره ضریب جمله‌ی بالاترین درجه را واحد می‌گیرد، و در بیان صورت معادلات اغلب بذکر مراتب اکتفا می‌کند و متعرض ضرایب نمی‌شود، و مثلاً معادله‌ی $x^3 + ax^2 + bx = c$ را بعبارت «کعبی و مالی و جذری معادل عددی است» بیان می‌کند. ما در ترجمه‌ی رسائل خیام از همین روش مسامحه‌آمیز وی پیروی می‌کنیم، ولی برای رفع شبهه و احتراز از تکرار، توجه خواننده را بنکات مذکور درین حاشیه و در ۳۰۶-۳۰۷ §§ جلب می‌نمائیم.



مال مال در مقادیر وارد نمی‌شود، چه رسد بمراتب بالاتر از آن، { و هر گاه مال مال در مقادیر گفته شود، این گفته در باب عدد اجزای مقدار است در صورت اندازه گیری، نه در باب خود آن مقدار که اندازه گیری شده است }^۵، و این دو اطلاق متفاوتند. پس مال مال، نه با لذات و نه بالعرض، در مقادیر وارد نمی‌شود، و مانند زوج بودن و فرد بودن نیست، زیرا زوجیت و فردیت باعتبار عددی که اتصال مقادیر را منفصل می‌کند [احیاناً] عارض مقدار می‌شوند^۶.

[۵۰۱۰۶ § خلاصه‌ی مندرجات و روش مؤلف درین رساله -] و آنچه

(۵) عبارت داخل { } را بعنوان ترجمه‌ی عبارت ذیل از متن خیام آورده‌ایم :

و اذا قيل مال المال في المقادير فانما يقال ذلك لعدد اجزائها عند المساحة لا لذواتها مسموحة .
ظاهراً مقصود خیام اینست که اگر از « مال مال » يك قطعه خط، یعنی قوه‌ی چهارم آن، صحبت شود، مقصود قوه‌ی چهارم عددی است که نماینده‌ی طول آن قطعه است نه قوه‌ی چهارم آن قطعه. مؤید این تفسیر سخن خیام است در رساله‌ی تحلیل (۶۰۴۰۲ §) : « اطلاق الفاظ مال مال . . . بر مقادیر متصل از جهت اطلاق عدد بر این مقادیر است ». بعلاوه، بر طبق اصطلاحات فلسفه‌ی قدیم، « کم متصل و منفصل یکدیگر را عارض شوند. اما عروض اتصال کم منفصل را سبب تجزیه‌ی واحد بود به اجزاء نامتناهی . . . »؛ و اما عروض انفصال کم متصل را سبب شمردن آن شود به احاد^۷. (رجوع شود به اساس الاقيباس، تهران ۱۳۲۶، ص ۴۲).

ویکه (ظاهراً بااستناد ۵۰۱۰۲ §)، در عبارت مورد بحث، جزء را بمعنی عکس مصطلح امروز گرفته، و در معنی عبارت مذکور چنین آورده است که « هر گاه گفته شود که مال مال جزء مقادیر قابل اندازه گیری است، این مطلب باعتبار مقدار عکس آنست که در مسائل اندازه گیری (= هندسی) بکار میرود. » (عین عبارت او در صفحه‌ی ۸ کتاب جبر عمر خیام : Et si l'on dit que le caré - carré fait partie des grandeurs mesurables, cela se dit par rapport à sa valeur réciproque employée dans les problèmes de mesure), و در توجیه این ترجمه، در ذیل همان صفحه گوید که اگر مثلاً مطلوب کره‌ای باشد که نسبت حجم آن به واحد حجم مساوی نسبت طول مفروض a به شعاع کره‌ی مطلوب (r) باشد، خواهیم داشت $3 : \pi :: 4 : a^3$ ، و بدین ترتیب قوه‌ی چهارم $4 : r$ در کار می‌آید. بنابراین آنچه گفتیم، ترجمه و توجیه ویکه بنظر ما بسیار مستبعد است، بخصوص که در مثال مذکور، معادله‌ی مسئله $a : r :: 3 : \pi r^3$ است، و بعید است که کسی که « مال مال » را در مقادیر غیر ممکن می‌شمارد این معادله را به صورتی که ویکه ساخته است در آورد.

(^۶) در نمایش مقادیر هندسی بوسیله‌ی اعداد، اگر احياناً عدد حاصل صحیح باشد، ناچار

فرد یا زوج است. رجوع شود به ذیل ۵ همین صفحه.

ازین معادلات چهار گانه‌ی هندسی- یعنی اعداد مطلق و اضلاع و مربع‌ها و مکعب‌ها- در کتب جبریه‌ها آمده است سه معادله است بین عدد و اضلاع و مالها [☆] ، و اما ما بزودی راهپائی خواهیم آورد که بوسیله‌ی آنها می‌توان مجهول را از معادلات بین چهار مرتبه‌ای که گفتیم زاید بر آنها در مقادیر واقع نمی‌شود- یعنی عدد و شیء و مال و کعب- استخراج کرد.

و آنچه [ازین معادلات] که اثبات [طریق حل] آن بوسیله‌ی خواص دایره- یعنی بوسیله‌ی کتاب اقلیدس در اصول و در معطیات- ممکن است مبرهن خواهد گردید، و منتهای کوشش در آسان کردن براهین خواهد شد. و آنچه اثباتش جز به خواص قطوع مخروطی ممکن نیست بوسیله‌ی دو مقاله‌ی کتاب مخروطات مبرهن خواهد گشت، و اما اثبات [حل] این اصناف وقتی موضوع مسئله عدد مطلق باشد [☆]- جز در سه مرتبه‌ی اول، و آن [معادله‌ی بین] عدد و شیء و مال است [†] - بر ما و بر دیگر علمای جبر ممکن نشده است، و شاید دیگران که بعد از ما آیند بر آن وقوف یابند. و من گاهی در مسائلی که می‌توان از کتاب اقلیدس برهان برای [حل] آنها آورد اشاره به براهین عددی می‌کنم. و باید دانست که وقتی موضوع مسئله عدد باشد، نه مقادیر هندسی، برهان هندسی راهها [ی حل معادلات] جای براهین عددی را نمی‌گیرد، و شاهد برین مطلب اینست ^{††} که اقلیدس در مقاله‌ی پنجم کتاب [اصول] خود برای احکامی در باب نسبتهای بین مقادیر برهان آورده، و سپس عین همین احکام را در نسبتهای بین اعداد در مقاله‌ی هفتم از نو ثابت کرده است.

(☆) مقصود سه معادله‌ی

$$x^2 + bx = a, \quad x^2 + a = bx, \quad x^2 = a + bx$$

است. خیام معادلات $a = x^2$, $a = bx$, $bx = x^2$ را که در آثار پیشینیان آمده از قلم انداخته ولی بعداً در طبقه بندی آورده است (§ ۵۰۲۰۲).

(☆☆) یعنی حل عددی معادلات. در این باب به § ۴۰۲۰۱ نیز رجوع شود.

(†) یعنی معادلات درجه‌ی دوم.

(††) رجوع شود به § ۴۰۲۰۱، ص ۱۳۷

[۵۰۴ § طبقه بندی معادلات]

[۵۰۴۰۱ § -] و معادلات بین این چهار [مرتبه *] به مفردات و مقترنات تقسیم می‌شود. **

[۵۰۴۰۲ § مفردات -] و مفردات شش صنف است: ***

(الف) عددی معادل جذری است ،

(ب) عددی معادل مالی است ،

(ج) عددی معادل کعبی است ،

(د) جذرهائی معادل مال است ،

(ه) مالهای معادل کعب است ،

(و) جذرهائی معادل کعب است .

و سه صنف ازین اصناف ششگانه در کتابهای جبریها مذکور است ، و آنان چنین گفته‌اند که نسبت شیء به مال مثل نسبت مال به کعب است † . پس لازم می‌آید که معادله‌ی مال با کعب مثل معادله‌ی شیء با مال باشد . و نیز [گفته‌اند که] نسبت عدد به مال مثل نسبت جذر به کعب است †† . و این احکام را بطریق هندسی ثابت نکرده‌اند . و اما در معادله‌ی بین عدد و مکعب ، برای استخراج عددی ضلع مکعب راهی جز استقراء × نداریم ، و اما حل هندسی [این صنف] جز باقوع مخروطی

(*) عدد ، شیء ، مال ، کعب .

(**) رجوع شود به § ۳۰۶۰۶ و § ۴۰۲ و § ۴۰۳۰۴۰۲ .

$$(۱) \quad a = x \quad (د) \quad bx = x^2 \quad (***)$$

$$(ب) \quad a = x^2 \quad (ه) \quad cx^2 = x^3$$

$$(ج) \quad a = x^3 \quad (و) \quad bx = x^2$$

(†) یعنی $x : x^2 = x^2 : x^3$.

(††) مقصود اینست که $a : x^2 = ax : x^3$.

(×) شاید مقصود تفحص در جدولی مشتمل بر مکعبات اعداد طبیعی باشد . و نیز رجوع

شود به ذیل †† صفحه‌ی ۱۷۵ و ** صفحه‌ی ۱۷۲ .

ممکن نیست *.

[§ ۵۰۲۰۳] مقترنات سه تائی - و اما مقترنات بعضی سه تائی و برخی

چهار تائی است .

اما مقترنات سه تائی دوازده صنف است .

[§ ۵۰۲۰۳۰۱] مقترنات سه تائی درجهی دوم * - . سه صنف اول

مقترنات سه تائی عبارتست از *** :

(الف) مالی و جذری معادل عددی است ،

(ب) مالی و عددی معادل جذری است ،

(ج) جذری و عددی معادل مالی است .

و این سه صنف در کتابهای علمای جبر مذکور و حل هندسی آنها مبرهن است ،

ولی برای حل عددی آنها برهانی نیآورده اند † .

[§ ۵۰۲۰۳۰۲] مقترنات سه تائی درجهی سوم قابل تحویل بدرجهی

دوم †† - و سه صنف دوم مقترنات سه تائی عبارتست از :

(الف) کعبی و مالی معادل جذری است ،

(ب) کعبی و جذری معادل مالی است ،

(ج) جذری و مالی معادل کعبی است ،

(*) و آن در ۵۰۶۰۵ § آمده است .

(**) حاجت بتذکار نیست که لفظ 'درجهی دوم' و امثال آن از جبر جدید بعبارت گرفته

شده است .

$$(۱) \quad x^2 + bx = a, \quad (ب) \quad x^2 + a = bx, \quad (***)$$

$$(ج) \quad bx + a = x^2$$

(†) خیام هم باین مضمون اکتفا می کند که برهان عددی از تصور برهان هندسی فهمیده

می شود .

$$(۱) \quad x^3 + cx^2 = bx, \quad (ب) \quad x^3 + bx = cx^2, \quad (††)$$

$$(ج) \quad cx^2 + bx = x^3.$$

و جبرها گفته‌اند که این سه صنف دوم هر يك با نظیر خود از صنف اول^{۵۴} متناسب است، یعنی معادله‌ی کعب و جذر با مال در حکم [معادله‌ی] مال و عدد با جذر است^{۵۵}، و هکذا در مورد سایرین. و این احکام را وقتی موضوع مسائل مقادیر هندسی باشد ثابت نکرده‌اند، و اما اگر موضوع مسائل عدد باشد، این احکام از کتاب اصول آشکار است، و من بزودی برای آنها برهان هندسی خواهم آورد.

[§۵۰۴.۳۰۴] مقترنات سه‌تائی درجه‌ی سوم - اما شش معادله‌ی دیگر از اصناف دوازده‌گانه[†]:

(۱) کعبی و جذری معادل عددی است،

(ب) کعبی و عددی معادل جذری است،

(ج) عددی و جذری معادل کعبی است،

(د) کعبی و مالی معادل عددی است،

(ه) کعبی و عددی معادل مالی است،

(و) عددی و مالی معادل کعبی است.

و در باب این شش صنف در کتب جبرها سخنی نیست مگر کلامی ناقص در باب یکی از آنها^{††}، و من بزودی آنها را توضیح داده برهان [حل] هندسی - نه عددی - آنها را خواهم آورد، و برهان این شش صنف جز بوسیله‌ی خواص قطوع مخروطی ممکن نیست.

(۵) مذکور در § ۵۰۲.۳۰۱

(۵۵) یعنی معادله‌ی $x^3 + bx = cx^2$ با معادله‌ی $x^2 + b = cx$ معادل است. البته

خیام از ریشه‌ی $x = 0$ بی‌خبر است.

(†) شش معادله‌ی درجه‌ی سوم مورد بحث عبارتند از

(۱) $x^2 + bx = a$

(د) $x^2 + cx^2 = a$

(ب) $x^2 + a = bx$

(ه) $x^2 + a = cx^2$

(ج) $a + bx = x^2$

(و) $a + cx^2 = x^2$

(††) مقصود معادله‌ی $x^2 + a = cx^2$ است. رجوع شود به § ۵۰۷.۰۶

§ ۵۰۲۰۴] مقترنات چهارتائی -] و اما مقترنات چهارتائی بردو قسم است .
 § ۵۰۲۰۴۰۱] مقترنات چهارتائی سه با يك -] یکی [از دو قسم مقترنات
 چهارتائی] ، که قسم اول باشد ، آنست که در آن سه مرتبه معادل يك مرتبه [ی دیگر]
 باشد ، و آن چهار صنف است * :

- (ا) کعبی و مالی و جذری معادل عددی است ،
- (ب) کعبی و مالی و عددی معادل جذری است ،
- (ج) کعبی و جذری و عددی معادل مالی است ،
- (د) کعبی معادل جذری و مالی و عددی است .

§ ۵۰۲۰۴۰۲] مقترنات چهارتائی دو با دو -] و قسم دوم آنست که در آن دو
 مرتبه معادل دو مرتبه [ی دیگر] باشد ، و آن سه صنف است * :

- (ا) کعبی و مالی معادل جذری و عددی است ،
- (ب) کعبی و جذری معادل مالی و عددی است ،
- (ج) کعبی و عددی معادل جذری و مالی است .

§ ۵۰۲۰۴۰۳] -] و اصناف هفتگانه‌ی چهارتائی همین‌ها است ، و ما را راهی به
 حل هیچیک جز بطریق هندسی نیست . و اما یکی از پیشینیان ما نیازمند نوعی از
 انواع یکی از اصناف شد † که بزودی آنرا خواهیم گفت . و برهان [حل] این اصناف
 جز بوسیله‌ی خواص قطوع مخروطی انجام پذیر نیست .

$$(۱) \quad x^3 + cx^2 + bx = a \quad (\ast)$$

$$(ب) \quad x^3 + cx^2 + a = bx$$

$$(ج) \quad x^3 + bx + a = cx^2$$

$$(د) \quad x^3 = bx + cx^2 + a$$

$$(۱) \quad x^3 + cx^2 = bx + a \quad (\ast \ast)$$

$$(ب) \quad x^3 + bx = cx^2 + a$$

$$(ج) \quad x^3 + a = bx + cx^2$$

(†) مقصود معادله‌ی $x^3 + bx + a = cx^2$ است . رجوع شود به §§ ۵۰۸۰۴-۵۰۸۰۴۰۱ .

[§۵۰۴۰۵] و من بزودی يك يك این اصناف بیست و پنجگانه * را می‌آورم و [راه حل] هر يك را ثابت میکنم ، و درین کار از خداوند یاری میجویم ، چو وی هر کس را که خالصانه باو توکل کند هدایت و از دیگران مستغنی میفرماید .

[§۵۰۴] حل مفردات * *

[§۵۰۴۰۱] صنف اول مفردات آنست که جذری[†] معادل عددی باشد .

پس جذر^۰ ناچار معلوم است ، و حکم این [معادله] در اعداد و در مقادیر هندسی یکسان باشد .

[§۵۰۴۰۲] صنف دوم آنست که عددی معادل مالی باشد .

پس مال^۰ از جنبه‌ی عددی معلوم است ، زیرا معادل عدد معلوم است ، و برای دانستن جذر آن راه عددی نداریم جز استقراء^{††}؛ زیرا آنکس که میداند جذر بیست و پنج پنج است ، البته این مطلب را از همین طریق میداند نه بر طبق قانونی [از علم حساب یا جبر] . پس توجهی بگفته‌ی کسانی از جبریها که درین باب با ما اختلاف نظر دارند نمیکنیم . و هندیان را در استخراج جذر و کعب طریقه ایست مبتنی بر اندک استقرائی ، و آن شناسائی مربعات اعداد نه گانه - یعنی مربع يك و دو و سه [... تا نه] - و نیز حاصل ضرب بعضی در بعضی است - یعنی حاصل ضرب دو در سه و امثال آن . و ما را کتابی است دربراهین درستی این راهها و منجر شدن آنها به مطلوب ، و ما انواع این طریقه‌ها را افزون کرده ایم - یعنی استخراج مال مال و مال کعب و کعب کعب^x و غیره

(*) شش صنف مفردات ، دوازده صنف مقترنات سه تائی ، و هفت صنف مقترنات چهارتائی ؛

یعنی همه‌ی معادلات درجات اول و دوم و سوم ، جز آنهایی که درین صورت مندرجند :

$$dx^3 + cx^2 + bx + a = 0 \quad (a, b, c, d \geq 0)$$

نیز رجوع شود به §۴۰۳۰۴۰۲ (صص ۱۴۵ - ۱۴۶) .

(**) رجوع شود به §۵۰۲۰۱ و §۴۰۳۰۴۰۲ (صص ۱۴۵) .

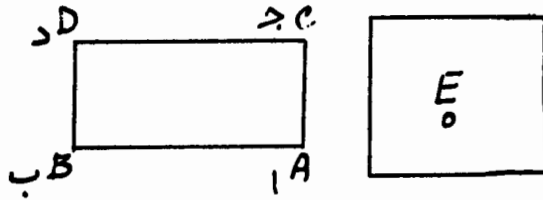
(†) برای استعمال جذر باین معنی رجوع شود به §۳۰۶۰۴ (صص ۱۱۲) .

(††) رجوع شود به ذیل X صفحه‌ی ۱۶۶ .

(X) مقصود استخراج ریشه های چهارم پنجم و ششم است ، و غیره . نیز رجوع شود به

§ ۴۰۱۰۲ (صص ۱۳۲) .

را بر آنها افزوده‌ایم، و این اضافات تازه است - و این براهین، [که بآنها اشاره شد] براهینی عددی و مبتنی بر قسمت‌های مربوط به علم حساب در کتاب اُسطقَسَات* است. و برهان هندسی [حل] صنف دوم چنین است. خط AB را مفروض و مساوی عدد مفروض و AC را واحد و عمود بر AB قرار میدهیم، و مستطیل AD ** را تمام



میکنیم. پس معلوم است که مساحت مستطیل AD مساوی عدد مفروض است. سپس - بنا بر آنچه اقلیدس در شکل چهاردهم از مقاله‌ی دوم کتاب خود ثابت کرده - سطحی بشکل مربع [که مساحت آن] مساوی مستطیل AD [باشد] میسازیم، و آن مربع E است. پس مربع E مساوی عدد مفروض و لهذا معلوم است، و بالنتیجه ضلع آن نیز معلوم می‌باشد (در براهنی که اقلیدس در شکل مذکور آورده تامل کنید)، و این همان است که میخواستیم †.

[§۵۰۳۰۳ تعریف] - و هر وقت درین رساله گوئیم که عددی مساوی سطحی است، در چنین موردی، مقصود ما از عدد سطحی است [چهار ضلعی] که زوایای آن قائمه باشند، و یکی از دو ضلع [مجاور] آن واحد باشد، و دیگری از حیث اندازه مساوی

(*) لفظ اُسطقَسَات یا اِسطقَسَات معرب لفظ یونانی ستویچیون و بمعنی اصل است، و عناصر اربعه را اسطقسات گویند. مقصود از کتاب اسطقسات در متن همان کتاب اصول اقلیدس در هندسه است. در باب تسمیه‌ی کتاب هندسه‌ی اقلیدس باین اسامی می‌توان به کتاب هیت (سیزده مقاله، جلد ۱، ص ۱۱۶) رجوع کرد.

(**) مقصود مستطیل $ABCD$ است. خیام اغلب مستطیلهای و مکعب مستطیلهای را با در رأس مقابل و گاهی فقط با یکی از رؤوس نام می‌برد. مثلاً رجوع شود به § ۵۰۶۰۴.

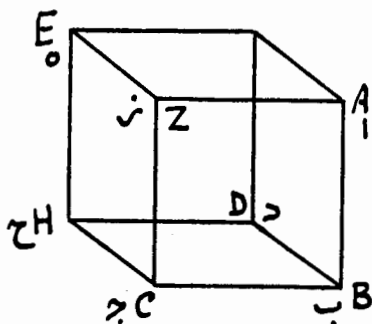
(†) خلاصه‌ی مطلب اینکه برای حل معادله‌ی $x^2 = a$ مستطیل $ABCD$ را با $AB = a$ و

۱ $AC =$ ساخته مربع E را معادل این مستطیل می‌سازیم. ضلع مربع E مساوی x است.

عدد مفروض باشد، بطوری که هر يك از اجزای اندازه‌ی آن مساوی ضلع دوم (یعنی آنکه واحد فرض کردیم) باشد.

[§۵۰۴۰۴] صنف سوم آنست که عددی معادل مکعبی باشد. پس اگر موضوع مسئله عدد باشد \star ، مکعب [آن عدد] معلومست، و برای استخراج ضلع آن [مکعب] راهی جز استقراء $\star\star$ نداریم، و چنانکه قبلاً گفتیم، در جمیع مراتب عددی از [قبیل] مال مال و مال کعب و کعب کعب حال همین است.

و اما بطریق هندسی، مربع AD را مربع واحد قرار میدهیم، یعنی AB را



مساوی BD میگیریم و هر يك را [مساوی] واحد فرض میکنیم. سپس - بنا بر آنچه اقلیدس در [شکل دوازدهم از] مقاله‌ی یازدهم کتاب خود ثابت کرده - از نقطه‌ی B از سطح AD عمود BC را برین سطح اخراج میکنیم، و آنرا مساوی عدد مفروض میگیریم، و مکعب مستطیل ABCDEZH را تمام میکنیم. پس معلوم است که حجم \dagger این جسم مساوی عدد مفروض است. اینک مکعبی میسازیم که [از حیث حجم] مساوی این جسم باشد. چون ساختن این مکعب جز بخواص قطوع مخروطی انجام پذیر نیست، آنرا

(\star) یعنی برای حل عددی معادله‌ی $x^2 = a$.

($\star\star$) رجوع شود به ذیل X صفحه‌ی ۱۶۶.

(\dagger) خیام در مورد اندازه‌ی حجم نیز لفظ مساحت بکار میبرد، ولی ما لفظ مصطلح حجم

را برگزیدیم.

مو کول میکنیم بوقتی که مقدمات کار را آورده باشیم * .

[§۵۰۳۰۵ تعریف -] و هر وقت گوئیم عددی مساوی مجسمی است ، در چنین

موردی ، مقصود ما از عدد جسمی است که اضلاعش موازی و زوایایش قائمه ** و
قاعده‌اش مربع واحد و ارتفاعش مساوی عدد مفروض باشد .

[§۵۰۳۰۶] و صنف چهارم [مانند] آنست که مالی معادل پنج برابر جذرش

باشد † .

پس عده‌ی جذرها همان جذر مال است ، و برهان عددی آن اینست که [از يك
طرف همواره] جذر چون در مثل خودش ضرب شود مال حاصل گردد ، و [از طرف
دیگر ، در مسئله‌ی مورد بحث] ، این [جذر مطلوب] جذری است که چون در پنج ضرب
شود مال حاصل گردد . پس این [جذر مطلوب] پنج است . و برهان هندسی آن - چون
مربعی معادل پنج برابر ضلع آن بگیریم - شبیه همین [برهان عددی] است .

[§۵۰۳۰۷] صنف پنجم آنست که اشیائی معادل کعب باشد .

پس در مسائل عددی و واضحست که [این معادله] در حکم آنست که عددی معادل
مالی باشد . مثلاً اگر گفته شود که چهار جذر معادل کعب است ، بنا بر تناسب
مذکور †† ، مانند آنست که گویند چهار عدد معادل مالی است .

اما بطریق هندسی ، مکعبی مانند ABCDE میگیریم که حجمش چهار برابر
یکی از اضلاعش باشد ، و AB ضلع آن باشد . پس ضلع AB ازین مکعب ، چون در
چهار ضرب شود ، مکعب ABCDE حاصل میگردد ، و از طرف دیگر ، ضلع این مکعب

(*) رجوع شود به §۵۰۶۰۵ .

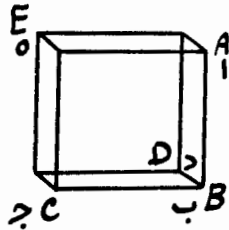
(**) مقصود جسمی است بشکل مکعب مستطیل .

(†) در حل معادله‌ی $bx = x^2 -$ که در آن x^2 مال ، x جذر مال ، و b عده‌ی جذرهاست -

خیام فقط جواب $x = b$ را می‌دهد . استدلال وی اینست که اولاً همواره $x^2 = x \cdot x$ ، و ثانیاً
در معادله‌ی مورد بحث $x^2 = b \cdot x$ ؛ پس $x \cdot x = x \cdot b$ (خیام این مرحله را ذکر نمی‌کند)؛
بالتیجه $x = b$.

(††) $x : x^2 = x^2 : x^3$

چون در مربع خود، یعنی در مربع AC ، ضرب شود همان مکعب حاصل میشود. پس مربع AC [مساوی] چهار است.



[§ ۵۰۳۰۸] و صنف ششم آنست که مالهای معادل کعب باشد.

و آن در حکم اینست که عددی معادل جذر باشد. برهان عددی آن اینست که، بنابر آنچه در مقاله‌ی هشتم اصول ثابت شده، نسبت عدد به جذر مثل نسبت مال است به کعب.

و اما بطریق هندسی، مکعب $ABCDE$ را معادل عددهای از مالهای \square آن، مثلاً معادل دو مال، و مربع ضلع آن را AC میگیریم. پس سطح AC چون در دو ضرب شود مکعب $ABCDE$ حاصل گردد، و از طرف دیگر، همین سطح چون در BD که ضلع مکعب است ضرب شود مکعب $ABCDE$ حاصل میشود. پس BD که ضلع مکعب است مساوی دو است، و مطلوب همین بود $\square\square$.

[§ ۵۰۳۰۸۰۱ تعریف-] و هر جا در این رساله لفظ مالهای مکعب آوریم مقصود مربعهای اضلاع مکعب است.

[§ ۵۰۴] معادلات سه جمله‌ای درجه‌ی دوم

[§ ۵۰۴۰۱-] اینک که مفردات را آورديم به سه صنف اول از اصناف

(۵) «مال» يك مكعب یعنی مربع ضلع آن، یا وسعت یکی از وجوهش. رجوع شود به § ۵۰۳۰۸۰۱.

(۵۵) اگر S سطح مربع AC و V حجم مکعب مورد بحث باشد، بموجب فرض مسئله $V = ۲ \cdot S$ و بموجب دستور حجم مکعب $V = S \cdot BD$. پس $S \cdot BD = ۲ \cdot S$ ، و لهذا $BD (=x) = ۲$.

دوازده گانه \star میپردازیم.

§ ۵۰۴۰۲ -] و صنف اول از آنها [مانند] آنست که مالی و ده جذر معادل

سی و نه عدد باشد $\star\star$.

پس [برای حل آن] نصف [عدهی] جذرها را در مثل آن ضرب کن، و حاصل را بر عدد بیفزا، و از جذر حاصل جمع نصف عدهی جذرها را کم کن. باقیمانده همان جذر مال است \dagger .

اگر مسئله عددی باشد [برای امکان آن] این دو شرط باید برقرار باشد $\dagger\dagger$: یکی از آنها اینکه عدهی جذرها عدد زوجی باشد تا نصف داشته باشد، و دوم اینکه مجموع مربع نصف [عدهی] جذرها با عدد مربع [کامل] باشد، و الا مسئله از جنبه‌ی عددی غیر ممکن است.

اما از جنبه‌ی هندسی هیچیک از مسائل این صنف ممتنع نیست.

و چون برهان هندسی [حل] این صنف صورت پذیرد برهان آن از جنبه‌ی عددی

(\star) § ۵۰۲۰۳۰۱

($\star\star$) همان معادله‌ی خوارزمی است (\S ۳۰۶۰۷). طریق حل خیام در مورد معادله‌ی $x^2 + bx = a$ اینست. فرض کنیم $AB = AD = x$, $DE = b$, $EZ = ZD = b/2$. سطح EB مساوی $x^2 + bx$ است که بموجب معادله مساوی a است. اما بموجب شکل ششم مقاله‌ی دوم اصول، $EA \cdot AD + \overline{DZ}^2 = \overline{ZA}^2$. پس بترتیب

$$a + (b/2)^2 = \overline{ZA}^2 = (ZD + DA)^2 = (b/2 + x)^2,$$

$$\sqrt{a + (b/2)^2} = (b/2) + x,$$

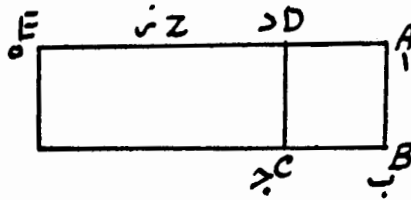
$$x = \sqrt{(a + b/2)^2} - (b/2).$$

(\dagger) صورت معادله $x^2 + bx = a$ و جوابی که خیام می‌دهد اینست:

$$x = \sqrt{a + (b/2)^2} - (b/2)$$

($\dagger\dagger$) رجوع شود به § ۴۰۲۰۱ و § ۴۰۳۰۴۰۳. چنانکه ویکه تذکر می‌دهد (جبر عمر خیام، ذیل صفحه‌ی ۱۸) هیچیک از این دو شرط برای صحیح بودن x لازم نیست، چه اگر σ عددی اصم و مثبت و α عددی صحیح و مثبت و کمتر از σ باشد، باز $a = \sigma\alpha$ و $b = \sigma - \alpha$ معادله‌ی $\alpha\sigma = (\sigma - \alpha)x + x^2$ حاصل می‌شود که دارای جواب مثبت و صحیح α است، و حال آنکه بالبداهه $\alpha - \sigma$ زوج نیست، و مبین مجذور کامل نیست (زیرا جذرش اصم است).

آسان خواهد بود، و برهان هندسی آن چنین است.
فرض میکنیم مربع AC با ده جذر آن معادل سی ونه عدد باشد، و سطح CE [مساوی] ده جذر آن باشد. پس خط DE ده خواهد بود. و این خط را در Z نصف میکنیم. حال چون خط DE در Z نصف شده و AD در امتداد آن بر آن افزوده شده،



[بنابر شکل ششم مقاله‌ی دوم اصول، حاصل ضرب EA در AD، که مساوی سطح EB است، بعلاوه‌ی مربع DZ مساوی مربع ZA است. اما مربع DZ که مساوی نصف [عدی] جذرها است معلومست، و سطح BE که عدد مفروض است معلوم میباشد. پس مربع AZ معلوم و [بالتیجه] خط AZ معلوم است، و چون ZD از آن کاسته شود، باقیمانده، که AD باشد، معلوم خواهد بود.

§۵۰۴۰۳۰۱ طریق دیگر-] و این صنف را برهان دیگری است* . ABCD

را مربع فرض میکنیم، و BA را تا E امتداد میدهیم، و EA را مساوی ربع [عدی] جذرها میگیریم، و آن دو و نیم است. و DA را تا Z امتداد میدهیم، و ZA را مساوی ربع عدی جذرها میگیریم، و همچنین، از جمیع زوایای مربع خطوطی بهمین وصف

(*) این طریقه در حل معادله‌ی $x^2 + bx = a$ اساساً همان طریقه‌ی خوارزمی (§۳۰۶۰۷)

و مبتنی بر «مجدور کامل کردن $x^2 + bx$ » است. اگر فرض کنیم $EA = AB = BC = x$ ، خواهیم داشت $ZA = b/4$ ، $EZ = (b/4)^2$ و $ZB = (b/4)x$ ، $ZB = bx$ چون فرض $x^2 + bx = a$ ، نتیجه می‌شود،

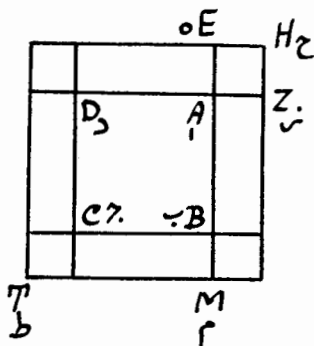
$$HT = AB^2 + \epsilon EZ + \epsilon ZB = x^2 + bx + (b/4)^2 = a + (b/4)^2$$

پس $EM = \sqrt{a + (b/4)^2}$ و

$$x = EM - \epsilon EA = \sqrt{a + (b/4)^2} - (b/4).$$

فهرالمطلوب. باید دانست که در شکل، سطح مربع وسط باضافه‌ی چهار مستطیل اطراف مساوی $x^2 + bx$ است، که با افزودن چهار مربع کوچک «مجدور کامل» می‌شود.

اخراج میکنیم، و سطح HT را تمام میکنیم. این سطح مربع است، زیرا بنا بر آنچه در [اشکال بیست و سوم و بیست و چهارم] مقاله‌ی ششم اصول ثابت شده، ZE مربع است و AC مربع است و CT مربع است. و چون هر يك از مربعات چهار گانه، که در گوشه-

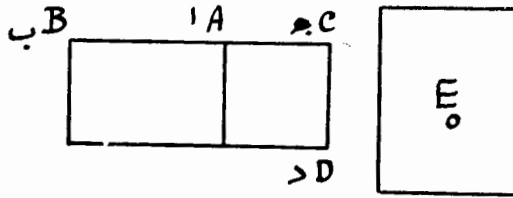


های مربع بزرگ جا دارد، مربع دو و نیم است، مجموع آنها بیست و پنج میباشد، که مربع نصف [عده‌ی] جذرها است. اما سطح ZB [مساوی] دو جذر مربع AC و نصف جذر آنست، زیرا ZA دو و نیم است. پس سطوح چهار گانه [، یعنی چهار مستطیل ZB و غیره، مساوی] ده جذر مربع AC است. اما مربع AC با ده جذرش [مساوی] سی و نه عدد فرض شده بود. پس مربع HT شصت و چهار است، و چون جذر آنرا بگیریم و از حاصل پنج بکاهیم AB میماند.

[§ ۵۰۴۰۲۰۲ تبصره -] و اما اگر خط AB مساوی ده فرض شود، و مربعی بخواهیم که حاصل جمع آن بعلاوه‌ی حاصل ضرب ضلعش در AB مساوی عدد مفروضی باشد، بطریقی که [در § ۵۰۳۰۳] گذشت، عدد مفروض را مساوی سطح E قرار میدهیم، و آن متوازی الاضلاعی است که زوایایش قائمه‌اند. و بنا بر آنچه اقلیدس در مقاله‌ی ششم اصول ثابت کرده است^{۵۱}، بر خط AB متوازی الاضلاعی مساوی سطح E اضافه میکنیم که مازاد آن بر سطح مضاف بر تمام خط AB مربع باشد. فرض کنیم

(۵) § ۳۰۲۰۳۰۱. خوانندگان توجه فرمایند که متاسفانه در متن جبر خیام در کتاب حاضر در درج شکل مربوط باین مسئله اشتباهی روی داده، بدین معنی که شکل پایین صفحه‌ی ۱۶ متعلق به اول صفحه‌ی ۱۸ است و بالعکس.

BD این سطح باشد. بنا بر آنچه در [شکل ششم] معطیات آمده است، مربع زاید AD و ضلع آن AC معلوم است [فهوالمطلوب].



[§۵۰۴۰۳] و صنف دوم از آنها آنست که مالی و عددی معادل جذری باشد. درین صنف باید عدد بزرگتر از مربع نصف [عده‌ی] جذرها نباشد، والا مسئله غیر ممکن است. و اگر عدد مساوی مربع نصف [عده‌ی] جذرها باشد، نصف [عده‌ی] جذرها همان جذر مال است. و اگر عدد کمتر از مربع نصف [عده‌ی] جذرها باشد، عدد را از مربع نصف [عده‌ی] جذرها کم میکنیم، و جذر باقیمانده را میگیریم، و حاصل را به نصف [عده‌ی] جذرها میافزائیم یا از آن کم میکنیم. حاصل جمع و باقیمانده‌ی تفریق جذر مال است. ^{۵۵}

و برهان عددی آن از تصور برهان هندسی آن صورت گیرد، و برهان هندسی آن اینست ^{۵۵}: [مربع ABCD را میکشیم، و مستطیل ED را، مساوی عدد، پهلوی AD قرار میدهیم. پس مستطیل EC مثلا معادل ده [برابر] ضلع مربع AC [†] است. بالنتیجه EB مساوی ده خواهد بود. فرض کنیم در [شکل] اول AB نصف EB، و در

(۵) معادله‌ی مورد بحث بصورت $x^2 + a = bx$ است. خیام می‌گوید ازاء $(b/2)^2 > a$ مسئله ممتنع است. بازاء $a = (b/2)^2$ جواب $x = b/2$ و بازاء $a < (b/2)^2$ دو جواب $x = b/2 \pm \sqrt{(b/2)^2 - a}$ را می‌دهد.

(۵۵) $AB = AD = x$ و $ED = a$ پس $CE = x^2 + a = bx$ ، و چون

$x = AB = b/2$ خواهیم داشت $AB = AE$ اگر $BE = b$ ، $CE = BE$ ، $BC = BE \cdot x$

در دو حالت دیگر فرض کنیم Z وسط BE باشد. بموجب شکل ششم مقاله‌ی دوم اصول،

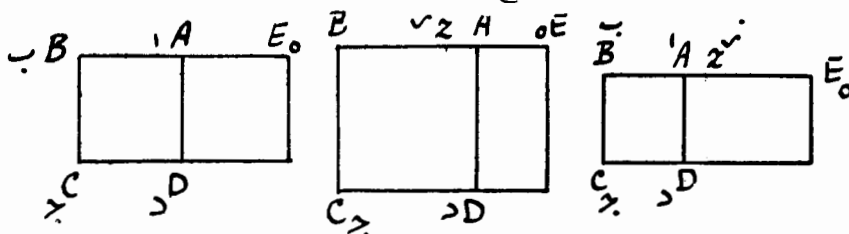
$EA \cdot AB + AZ^2 = \overline{BZ}^2$ پس $EA \cdot AB = (b/2)^2 - a$ و $AZ^2 = \overline{BZ}^2 - EA \cdot AB$

= AZ. چون AZ را از BZ (یعنی $b/2$) کم کنیم یا بر آن بیفزائیم جوابهای معادله بدست

می‌آید. خوارزمی فقط در مورد یکی از جوابها حکم را ثابت می‌کند (§۳۰۶۰۷).

(†) خیام بازاء $b = ۱۰$ استدلال می‌کند. با مثال خوارزمی مقایسه کنید (§۳۰۶۰۷).

دومی بزرگتر از نصف آن، و درسومی کمتر از نصف آن باشد. پس در اولی AB مساوی پنج است، و در دومی، و نیز در سومی، EB را در Z نصف می‌کنیم. چون EB در Z نصف و در A بدو قسمت غیر مساوی تقسیم شده، بنا بر آنچه در [شکل ششم] مقاله‌ی دوم اصول ثابت شده است، حاصل ضرب EA در AB بعلاوه‌ی مربع ZA مساوی مربع ZB است. اما حاصل ضرب EA در AB همان عدد است، و آن معلوم می‌باشد. و چون [این حاصل ضرب] از مربع ZB که خودش مساوی نصف [عده‌ی] جذرهاست



کاسته شود، مربع ZA که باقی می‌ماند معلوم خواهد بود، و اگر ZA را در شکل سوم از ZB کم کنیم و در دومی بر آن بیفزائیم، باقیمانده یا حاصل جمع مساوی AB خواهد بود، و منظور همین بود. و اگر کسی بخواهد میتواند [حل] مسئله را به راه‌های دیگر ثابت کند، ولی ما از ترس اینکه سخن دراز شود به همین طریق اقتصار می‌کنیم.

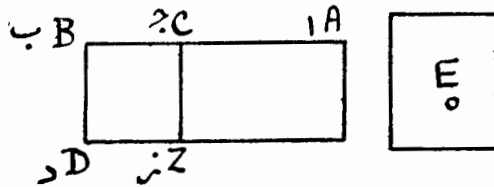
[§ ۵۰۴۰۳۰۱ تبصره ۵ -] اما اگر خط AB مثلاً فرض شود، و بخواهیم خطی از آن جدا کنیم که حاصل ضرب AB در این خط مساوی باشد با مربع این خط بعلاوه‌ی سطح دیگری که بزرگتر از مربع نصف AB نباشد^۵ - یعنی [بعلاوه‌ی] عدد مفروض که [با] مستطیل E نمایش داده شده است. پس می‌خواهیم از AB خطی جدا کنیم که مربع آن با سطح E مساوی حاصل ضرب AB در این خط باشد. پس بر خط AB ، که معلوم است، مستطیلی مساوی سطح E ، که معلوم است، اضافه می‌کنیم^۶ که نقصان آن نسبت به سطح مضاف بر تمام خط $[AB]$ مربع باشد،

(۵) مقصود اینست که بفرض $AB = b$ ($= 10$) و $E = a$ و $a < (b/2)^2$ ، می‌خواهیم BC را

چنان تعیین کنیم که $AB \cdot BC = \overline{BC}^2 + a$.

(۶) رجوع شود به § ۳۰۲۰۳۰۱، و نیز به ذیل صفحه‌ی ۱۷۷.

و چون سطح E بزرگتر از مربع نصف AB نیست، این امر، بنا بر آنچه اقلیدس در مقاله‌ی ششم اصول ثابت کرده* ممکن است. فرض کنیم سطح مذکور AZ باشد، و مربع ناقص CD باشد در این صورت، بنا بر آنچه در [شکل پنجاه و نهم] معطیات ثابت شده، ضلع CB معلوم است، و این همان است که میخواستیم ثابت کنیم.



[§ ۵۰۴۰۴۰۴ -] پس معلوم شد که این صنف را حالتی است**، و بعضی مسائل آن ممتنع است، و شرایط صحت آنرا در مسائل عددی از آنچه در صنف اول آوردیم توانی دانست†.

[§ ۵۰۴۰۴] و صنف سوم آنست که عددی و جذری معادل مال باشد. مربع نصف [عددی] جذرها را بر عدد افزوده جذر حاصل جمع را گرفته بر نصف عددی جذرها اضافه میکنند. آنچه حاصل شود جذری مال است ††.

(*) شکل ۲۸. رجوع شود به § ۳۰۲۰۳۰۱.

(**) مقعود سه حالت $a > (b/2)^2$ و $a = (b/2)^2$ و $a < (b/2)^2$ است. در حالت اول بقول خیام معادله ممتنع است.

(†) مقصود از «شرایط صحت» شرایط امکان است، و منظور خیام شرایط نجمیلی اوست برای صحیح بودن جوابها. در اینجا یکی از دو جواب ممکن است عدد صحیح باشد بدون اینکه هیچیک از دو شرط خیام (زوج بودن b و مجذور کامل بودن $(b/2)^2 - a$) برقرار باشد. و برای اینکه هر دو جواب هم صحیح باشند زوج بودن b لازم نیست، و در باب شرط دوم آنچه لازم است اینست که $(b/2)^2 - a$ بصورت $(p/2)^2$ (p صحیح است) باشد. مثال حالت اول معادله‌ی $x^2 + \sigma\alpha =$ $x(\sigma + \alpha)$ است که در آن α صحیح و σ اصم است؛ مثال حالت دوم معادله‌ی $x^2 + \alpha\beta = x(\alpha + \beta)$ است که در آن α زوج و β فرد می‌باشد.

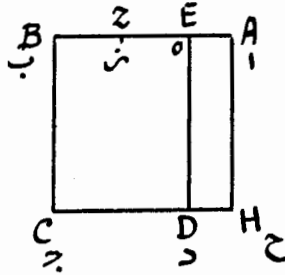
(††) $a + bx = x^2$ ، و

$$x = (b/2) + \sqrt{a + (b/2)^2}$$

خیام در مورد معادله‌ی $x^2 = \sigma x + \tau$ استدلال می‌کند. با استدلال خوارزمی در مورد معادله‌ی

$$x^2 = 3x + 4 \quad (\S 30607) \text{ مقایسه کنید.}$$

برهان آن . فرض میکنیم مربع $ABCH$ معادل پنج جذر آن و شش عدد باشد . چون عدد را که [با] سطح AD [نمایش داده شده] است از آن کم کنیم ، سطح EC



میمانند که مساوی [جمله‌ی] عددهی جذرها \star است ، و آن [عده] پنج است . پس خط EB پنج است . آنرا در Z نصف میکنیم . چون خط EB در Z نصف شده ، و EA در

(\star) در بقیه‌ی این مطلب در جبر خیام و نیز در فصل ۱۰۵ آن کتاب ، در استعمال مبهم لفظ عده (گاهی بمعنی ضرب و گاهی بمعنی جمله‌ی معادله) ، نمونه‌ای از درماندگی جبر لفظی (۳۰۱۰۲ § ، ص ۷۸) و جبریهائی که در این علم در مرحله‌ی لفظی وامانده‌اند دیده می‌شود . خیام در نامیدن m و mx و mx^2 ، خاصه در مواردی که پای هر سه درکار است ، بسختی می‌افتد . گاهی m و زمانی mx را **عددهی جذرها** (یا **عددهی اضلاع**) می‌خواند ، و در جایی که قبلاً از mx^2 صحبت کرده ، و سپس می‌خواهد بگوید که فلان چیز مساوی mx است که با همان ضرب و از همان مجهول ساخته شده ، می‌گوید « مساوی همان عده از جذرها است که برای مالها فرض شده بود » . اینک نمونه‌هایی از این استعمال مبهم :

(I) ص ۱۸ ، سطر آخر : **عدة الاجذار** بمعنی ضرب جمله‌ی درج‌ی اول معادله یعنی b

در bx ، ولی در **لعدة اضلاع** ، مراد از « عدة اضلاع » bx است .

(II) ص ۱۹

سطر دوم : **عدة الاضلاع** یعنی b (در bx) :

سطر هشتم : **عدة الاموال** یعنی c (در cx^2) :

سطر آخر : **عدة الاموال** یعنی cx^2 .

(III) ص ۲۰

سطور ۱ و ۲ : **عدة الاجذار و عدة الاضلاع** یعنی bx ؛

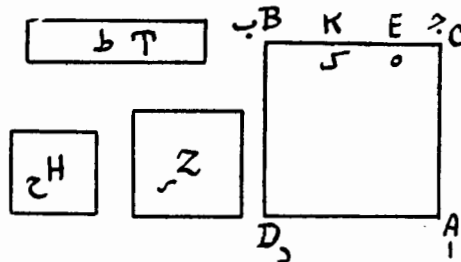
سطر ۳ : **عدة امواله** (المفروضة) یعنی cx^2 ؛

سطور ۶-۷ . عبارت « ... حالذی هو عدة اجذاره التي فرضت للاموال » یعنی « حا

بقیه‌ی در ذیل صفحه‌ی بعد

امتداد آن بر آن افزوده شده، [بنابر شکل ششم مقاله‌ی دوم اصول،] حاصل ضرب BA در AE ، که مساوی سطح معلوم AD است، بعلاوه‌ی مربع EZ ، که معلوم است، مساوی مربع ZA است. پس مربع ZA معلوم و ZA معلوم و ZB معلوم است. پس AB معلوم است. و [حل] این صنف را براهین دیگر نیز هست، و ثنی به آنکه گفته شد دل خوش دار.

[۵۰۴۰۴۰۱ § تبصره -] و اما اگر BE که عدی \square جذرها است مفروض باشد و مربعی و ضلع آن مطلوب باشد چنانکه آن مربع مساوی [جمله‌ی] عدی اضلاع خود بعلاوه‌ی عدد مفروضی باشد، فرض میکنیم عدد مفروض [با] مستطیل



[نمایش داده شده] باشد، و مربع مساوی آن H باشد، و مربعی میسازیم مساوی مجموع مربع H و مربع EK - که EK نصف عدی اضلاع است - و فرض میکنیم

بقیه‌ی ذیل صفحه‌ی قبل

مساوی EX است، که در آن c عدی (= ضرب) مفروض مالها است. و هکذا در سطور ۷ (از دوکلمه‌ی آخر) - ۸ .

مترجم در چنین موارد وظیفه‌ای بس دشوار دارد. اگر اصطلاحات امروزی را بکار برد کار خیام و دشواریها و نقائص آنرا معرفی نکرده، و اگر به ترجمه‌ی تحت‌اللفظی اکتفا کند، مطلب بر خواننده نا مفهوم و احیاناً موجب گمراهی خواهد بود. راهی که ما در این مورد برگزیده‌ایم همان روش عمومی است که در این ترجمه اتخاذ شده، یعنی منحرف نشدن از کتاب خیام و جان کلام وی. منتهی، در موردی که فعلاً مورد بحث است، هر جا «عدی...» بمعنی تمام جمله‌ی معادله بکار رفته لفظ جمله را در داخل علامت [] اضافه کرده‌ایم، و در جایی که «عنه» بمعنی ضرب استعمال شده آنرا بهمان حال گذاشته‌ایم، و بالاخره هر جا این تدابیر را برای فهمانیدن مطلب کافی ندیده‌ایم، در ذیل صفحه توضیحات اضافی آورده‌ایم.

(*) رجوع کنید به ذیل \square صفحه‌ی ۱۸۱.

Z این مربع باشد، و KC را مساوی ضلع Z جدا میکنیم، و مربع ABCD را تمام میکنیم. مربع ABCD همان مطلوب است. *

[§ ۵۰۴۰۵ -] پس معلوم شد که هیچیک از مسائل صنف سوم ممتنع نیست، و در صنف اول نیز حال همین است. و اما صنف دوم بعضی مسائل ممتنع دارد، و این صنف دارای حالات مختلف است، ولی دو صنف دیگر چنین نیست.

[§ ۵۰۵] مترنات سه تائی درجه‌ی سوم قابل تحویل بدرجه‌ی دوم **

[§ ۵۰۵۰۱] و اما برهان اینکه سه صنف دوم ** از این اصناف سه تائی دوازده گانه با سه صنف اول † متناسبند.

[§ ۵۰۵۰۲] صنف اول از آنها اینست که مکعبی و مالها، عادل جذر باشد ††

مکعب ABCDE را فرض میکنیم و AB را در امتداد آن تا Z میکشیم، و AZ را مساوی عده‌ی مالها قرار می‌دهیم، و مکعب مستطیل AZHTCD را در امتداد مکعب AE، چنانکه معمول است، تمام میکنیم. درین صورت، مکعب مستطیل AT

(*) در اینجا $BE = b$ ، $T = H = a$ ، $EK = KB = b/2$ ، و لهذا بترتیب

$$Z = H + EK^2 = a + (b/2)^2$$

$$KC = \sqrt{a + (b/2)^2}$$

$$BC = (b/2) + \sqrt{a + (b/2)^2}$$

$$\S 502301 (\dagger) \qquad \S 502302 (**)$$

(††) استدلال خیم برای معادل بودن معادله‌ی $x^3 + cx^2 = bx$ با معادله‌ی

$$x^2 + cx = b$$

فرض کنیم $ABCDE = x^2$ و $AZ = c$. چون مکعب مستطیل AT را تمام کنیم خواهیم

داشت $AT = cx^2$ ؛ پس، با توجه به معادله‌ی مفروض،

$$BT = x^3 + cx^2 = bx.$$

اینک اگر مستطیل K را با سطح b رسم کنیم، از طرفی $AD = bx$ و از طرف

دیگر $AD (= BT) = x^3 + cx^2 = bx$. پس مکعب مستطیل BT با مکعب

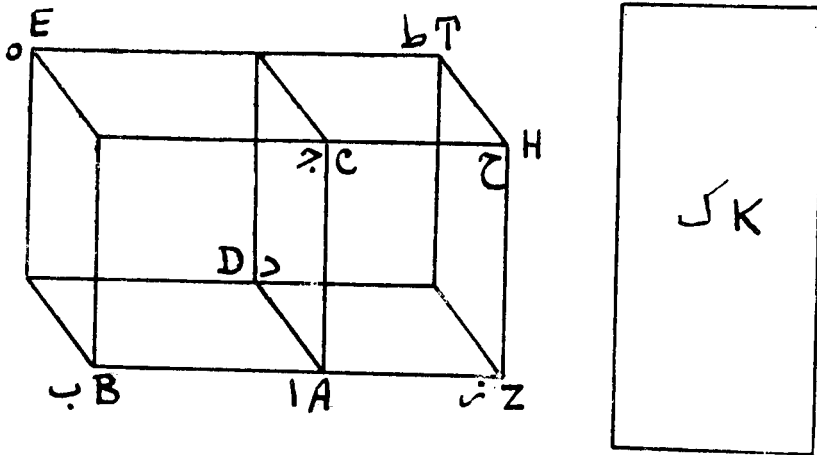
مستطیلی که قاعده‌اش K و ارتفاعش AD باشد معادل است، و لهذا، قواعد دو جسم به نسبت عکس

ارتفاعات آنهاست، و چون ارتفاعات آنها AD است. قواعدشان مساوی است، یعنی $K = HB$.

اما $K = b$ و $HB = CB + AH = x^2 + cx$ ؛ پس $b = x^2 + cx$. البته این

استدلال خالی از حشو و زواید نیست.

مساوی [جمله‌ی] عددهی \circ اموال خواهد بود ، و لهندا مکعب مستطیل BT ، که مجموع مکعب [AE] و [جمله‌ی] عددهی مفروض اموال است ، مساوی [جمله‌ی] عددهی مفروض جذرها میباشد . حال مستطیل K را مساوی عددهی مفروض جذرها



میسازیم - و [مقصود از] جذر همان ضلع مکعب است ، و آن AD است . پس حاصل ضرب سطح K در AD مساوی [جمله‌ی] عددهی مفروض اضلاع است ، و [از طرف دیگر] از ضرب سطح HB در AD مجموع مکعب با [جمله‌ی] عددهی مفروض اموال آن حاصل میشود . ولی این دو جسم - یعنی مکعب مستطیل BT و مکعب مستطیلی که بر [قاعده‌ی] K ساخته شده و ارتفاعش AD است - متساویند . پس قاعده های آنها با ارتفاعاتشان متکافی اند $\circ\circ$ ، و چون ارتفاعات آنها متساویند قواعدشان نیز متساوی می باشند . اما قاعده‌ی HB عبارتست از مجموع مربع CB و [مستطیل] AH که مساوی همان عددهی از جذرها [CB ی] است که برای مالها فرض شده بود \dagger . پس K ، که عددهی مفروض جذرها است ، مساوی است با مال و

(\circ) رجوع شود به ذیل صفحه‌ی ۱۸۱ .

($\circ\circ$) رجوع شود به \S ۴۰۰۰۱ ، (ص ۱۵۶) .

(\dagger) اگر عددهی مالها (یعنی ضریب درجه‌ی دوم) در معادله‌ی مفروض c باشد ، مستطیل

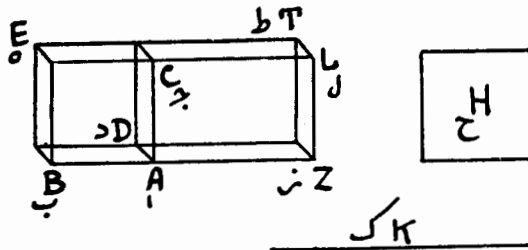
AH مساوی c برابر جذر (یعنی x) است . رجوع شود به ذیل صفحه‌ی ۱۸۱ .

همان عده از جذرها که برای مالها فرض شده بود، و این همان است که میخواستیم ثابت کنیم.

مثال آن اینکه معادله‌ی مکعب و سه مال با ده جذر در حکم معادله‌ی مال و سه جذر با ده عدد است.

[§۵۰۵۰۴-] و صنف دوم از آنها [مانند اینست که] مکعبی با دو جذر معادل سه مال باشد.

و آن در حکم اینست که مالی بعلاوه‌ی دو معادل سه جذرش باشد. و برهانش اینست \square . مکعب ABCDE را که با دو جذرش معادل سه مال است می‌گیریم، و شکل H را مربع و مساوی CB و خط K راسه قرار می‌دهیم، پس حاصل ضرب H در K سه مال مکعب AE است. و بر AC مستطیلی [مانند AL] مساوی دو می‌سازیم، و مکعب مستطیل AZCTD را تمام میکنیم. پس این مکعب مستطیل مساوی [جمله‌ی] عده‌ی جذرها است. ولی [از يك طرف،] خط ZB چون در مربع AC ضرب شود مکعب مستطیل BT حاصل گردد. و [از طرف دیگر] مکعب



مستطیل AT مساوی [جمله‌ی] عده‌ی اضلاع است، و بالنتیجه مکعب مستطیل

$$(*) \text{ معادله‌ی مفروض: } x^2 + bx = cx^2 \text{ (} b = 2, c = 3 \text{)}$$

فرض کنیم $ABCDE = x^3$ و $H = CB = x^2$ و $K = c$ ؛ پس $H \cdot K = cx^2$.

اگر $AL = b$ خواهیم داشت $AZCTD = bx$ یا $AT = bx$. اما، از طرفی

$$BT = AE + AT = x^2 + bx = \text{از طرف دیگر } BT = ZB \cdot \overline{AC} = ZB \cdot x^2$$

$$c x^2 \text{؛ پس } ZB = c \text{، ولی } BL = x^2 + b \text{، و چون از طرف دیگر } BL = ZB \cdot x = c x^2$$

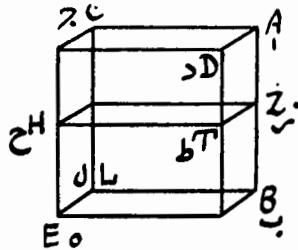
خواهیم داشت $x^2 + b = cx$ ؛ فهوالمطلوب.

BT مساوی است با مجموع مکعب [AE] و مقداری مساوی [جمله‌ی] عده‌ی اضلاع آن؛ پس مکعب مستطیل BT مساوی [جمله‌ی] عده‌ی مالها است. بنابراین، بقیاس آنچه در شکل قبل ثابت شد، خط ZB مساوی سه است. اما مستطیل BL مساوی مال و دو می‌باشد؛ پس مال و دو معادل سه جذراست، زیرا سطح BL از ضرب AB در سه حاصل می‌شود. و این همان است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

[§ ۵۰۵۰۴] و صنف سوم از آنها [مانند] اینست که مکعبی معادل مال

وسه جذر باشد.

در این صورت، مال معادل جذر و سه عدد خواهد بود. [برای اثبات *] مکعب ABCDE را میگیریم که معادل مال آن و سه ضلع آنست، و از خط AB، که ضلع آنست، خط AZ را مساوی عده‌ی مالها، که واحد است، جدا میکنیم، و مکعب مستطیل AZTHC را تمام میکنیم. پس مکعب مستطیل AZTHC مساوی [جمله‌ی] عده‌ی مفروض مالها است، و باقی میماند مکعب مستطیل ZE که مساوی [جمله‌ی]



عده‌ی مفروض اضلاع است. و چون ارتفاعات این دو مکعب مستطیل متساویند، بنا بر آنچه در [شکل سی و دوم] مقاله‌ی یازدهم اصول ثابت شده، نسبت آنها مثل

$$(c = 1, b = 3) x^3 = cx^2 + bx \quad (*)$$

فرض کنیم $ABCDE = x^3 = cx^2 + bx$ و $AZ = c$ ؛ پس $AH = cx^2$

و $ZE = x^3 - cx^2 = bx$. چون دو جسم AH و ZE دارای يك ارتفاع (ZT) هستند، $AH : ZE = ZC : ZL$ اما $ZC = cx$. بالنتیجه $bx : cx^2 = cx : ZL$ و از آنجا $ZL = b$ پس بالاخره $CB = ZC + ZL = cx + b$ ، یا $x^3 = cx^2 + bx + b^2$ فهو المطلوب.

نسبت قاعده‌ی ZC است به قاعده‌ی ZL . اما سطح ZC مساوی يك جذر مربع CB است، و [بالتیجه،] سطح ZL عدوی جذرها است، و آن سه است. پس مربع CB مساوی يك جذر و سه عدد است، و این همانست که می‌خواستیم ثابت کنیم.

[§۵۰۵.۰۵ تبصره -] و تا این براهین از این طریق [هندسی که ذکر شد] فهمیده نشود فن جبر جنبه‌ی علمی نخواهد داشت^۵، اگر چه فهم آنها از این طریق مستلزم تحمل دشواریهایی است.

[§۵۰۶.۰۱ مقدمات حل معادلات درجه‌ی سوم]

[§۵۰۶.۰۱] چون از ذکر این اصناف که برهان [حل] آنها بنحواص دایره-یعنی به کتاب [اصول] اقلیدس - ممکن است فارغ شدیم، اینک می‌پردازیم به اصنافی که برهان آنها جز به خواص قطوع ممکن نیست، و آن چهارده صنف است: یکی از آنها مفرد است، و آن معادله‌ی عددی با مکعبی است، و شش معادله‌ی سه‌تائی که مانده است، و هفت معادله‌ی چهارتائی.

و پیش از بحث از این اصناف، مقدماتی مبتنی بر کتاب مغروطات می‌آوریم^{۵۵} تا متعلم را تمهید گونه‌ای باشد، و درین رساله ما را به بیش از سه کتاب سابق‌الذکر - یعنی دو کتاب اصول و مضیبات اقلیدس و دو مقاله از کتاب مغروطات - حاجت نیفتد.

[§۵۰۶.۰۲ مسئله -] می‌خواهیم دو خط بین دو خط [مفروض] بیابیم که هر چهار متوالیاً بر يك نسبت باشند[†].

(۵) خیام بار دیگر اهمیت براهین هندسی را تأکید می‌کند.

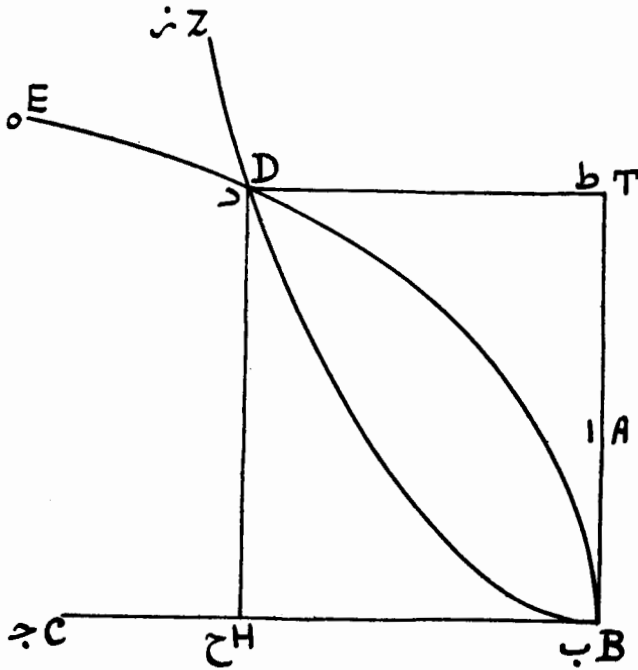
(۵۵) فقط اولین مقدمه (§۵۰۶.۰۲) مبتنی بر مغروطات است.

(†) رجوع شود به §۳۰۷.۰۱. مقصود مسئله تعیین دو طول x و y است چنانکه

$$AB : x = x : y = y : BC.$$

خیام برای حل مسئله دو سهمی به رأس B می‌سازد که محور وضع قائم اولی BC ، و محور وضع قائم دومی AB است. اگر D محل تلاقی دو قطع باشد، بموجب خاصیت سهمی،
 $\overline{HD}^2 (= \overline{BT}^2) = BH \cdot BC$ و $\overline{DT}^2 (= \overline{BH}^2) = BA \cdot BT$ پس
 $BC : BT = BT : HB$ ، $BT : HB = HB : BA$ ،
 و بالتیجه $AB : HB = HB : BT = BT : BC$. فوالمطلوب.

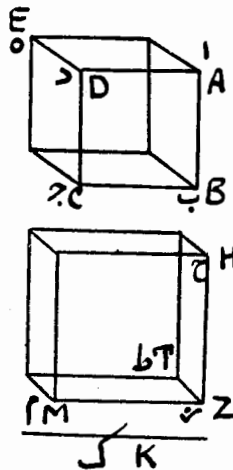
فرض کنیم AB و BC آن دو خط مستقیم [مفروض] باشند. این دو خط را چنان قرار می‌دهیم که اضلاع زاویه‌ی قائمه‌ی B باشند، و قطع مکافی به رأس B و سهم BC



و ضلع قائم BC می‌سازیم، و آن قطع BDE است. پس قطع BDE از حیث وضع معلوم است، زیرا رأس و سهم آن از حیث وضع و ضلع قائم آن از حیث مقدار معلوم است. این قطع بر خط BA مماس است، زیرا زاویه‌ی B قائمه است، و آن چنانکه در شکل سی و سوم مقاله‌ی اول مخروطات ثابت شده، مساوی زاویه‌ی ترتیب قطع است. همچنین چنانکه آپولونیوس در شکل پنجاه و ششم از مقاله‌ی اول ثابت کرده، قطع مکافی دیگری به رأس B و سهم AB و ضلع قائم AB می‌سازیم، و آن قطع BDZ است. قطع BDZ بر خط BC مماس است، و بالنتیجه، دو قطع یکدیگر را ناچار قطع می‌کنند. فرض کنیم D نقطه‌ی تقاطع آنها باشد. پس وضع نقطه‌ی D

معلوم است ، زیرا وضع هر دو قطع مکافی معلوم است . پس اگر ازین نقطه دو عمود DH و DT را [بترتیب] بر BC و AB بکشیم ، چنانکه در معطیات ثابت شده ^۵ ، مقادیر این دو عمود معلوم خواهد بود . اینک گوئیم چهار خط AB و BH و BT و BC متوالیاً بربك نسبت اند . برهان آن اینست که چون خط DH از خطوط ترتیب قطع BDE است ، مربع HD مساوی حاصل ضرب BH در BC است . پس نسبت BC به HD (که مساوی خط BT است) مثل نسبت BT به BH است . و [همچنین چون] خط DT در قطع BDZ از خطوط ترتیب است ، مربع DT (که مساوی BH است) مساوی حاصل ضرب BA در BT است ؛ بالنتیجه ، نسبت BT به BH مثل نسبت BH به BA می باشد . پس خطوط چهارگانه [یعنی AB و BH و BT و BC] متوالیاً متناسبند . اما مقدار DH معلوم است ، زیرا این خط از نقطه‌ی معلومی بزایه‌ی معلومی برخط معلومی کشیده شده ، و نیز مقدار DT معلوم است ؛ پس مقادیر دو خط BH و BT معلوم است ، و این دو خط وسطهای نسبت بین دو خط AB و BC هستند ، یعنی نسبت AB به BH مثل نسبت BH به BT و مثل نسبت BT به BC است ، و این همانست که می خواستیم ثابت کنیم .

[۵۰۶۰۳ مسئله] مربع ABCD مفروض و قاعده‌ی جسم متوازی السطوح و



قائم‌الزویای $ABCDE$ است ، و مربع MH [نیز] مفروض است ، و می‌خواهیم به قاعده‌ی MH جسم متوازی‌السطوح قائم‌الزویائی مساوی جسم مفروض $ABCDE$ بسازیم .
نسبت AB به MZ را مساوی نسبت MZ به K می‌سازیم ، و سپس نسبت AB به K را مثل نسبت ZT به ED می‌سازیم \star ، و ZT را در نقطه‌ی Z عمود بر سطح MH قرار می‌دهیم ، و مکعب مستطیل $MZTH$ را تمام می‌کنیم .

حال گوئیم که این مکعب مستطیل مساوی مکعب مستطیل مفروض است .
دلیل آن اینست که نسبت مربع AC به مربع MH مثل نسبت AB به K است . پس نسبت مربع AC به مربع MH مثل نسبت ZT است ، که ارتفاع مکعب مستطیل MTH است ، به ED ، که ارتفاع مکعب مستطیل BE است . پس ، بموجب آنچه در [شکل سی و چهارم] مقاله‌ی یازدهم اصول ثابت شده ، دو مکعب مستطیل [از حیث حجم] متساویند ، زیرا قاعده‌های آنها با ارتفاعاتشان متکافی‌اند .

[$\S 5060401$ تعریف \star] - و هر گاه لفظ جسم گوئیم مراد ما جسمی است متوازی‌السطوح و قائم‌الزویا ، و نیز هر گاه سطح گوئیم مقصود سطحی متوازی‌الاضلاع و قائم‌الزویا است .

[$\S 50604$ مسئله -] مکعب مستطیل $ABCD$ مفروض است ، و قاعده‌ی آن AC مربع است ، و می‌خواهیم مکعب مستطیلی بسازیم که قاعده‌اش مربع و ارتفاعش مساوی طول مفروض ET باشد ، و [از حیث حجم] مساوی مکعب مستطیل ACD باشد \dagger .

(\star) مقصود اینست که طولهای K و MZ را چنان تعیین می‌کنیم که

$$AB : MZ = MZ : K , \quad AB : K = ZT : ED .$$

ازین دو نتیجه می‌شود $ZT = \frac{AB \cdot ED}{MZ}$ ، و هوالمطلوب .

($\star\star$) رجوع شود به $\S 40501$ (ص ۱۵۶) .

(\dagger) K و EZ را بوسیله‌ی تناسبات

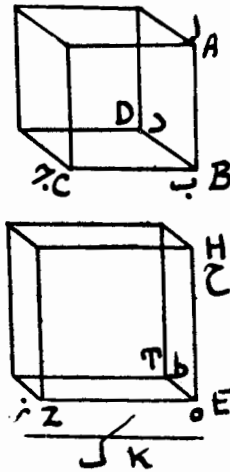
$$ET : BD = AB : K , \quad AB : EZ = EZ : K$$

تعیین می‌کنیم . خواهیم داشت

$$\overline{AB}^2 : \overline{EZ}^2 = (AB : EZ) (EZ : K) = AB : K = ET : BD .$$

پس $\overline{AB}^2 \cdot BD = \overline{EZ}^2 \cdot ET$ و هوالمطلوب .

پس نسبت ET را به BD مثل نسبت AB به K می‌سازیم، و بین AB و K واسطه‌ی هندسی می‌گیریم، و آن EZ است، و EZ را عمود بر ET قرار می‌دهیم، و TZ را تمام می‌کنیم، و EH را عمود بر سطح TZ و مساوی EZ قرار می‌دهیم، و مکعب مستطیل



HETZ را تمام می‌کنیم. حال گوئیم مکعب مستطیل T، که قاعده‌اش مربع HZ و ارتفاعش خط مفروض ET است، [از حیث حجم] مثل مکعب مستطیل مفروض D است. برهانش اینست که نسبت مربع AC به مربع HZ مثل نسبت AB به K است. پس نسبت مربع AC به مربع HZ مثل نسبت ET است به BD. بالنتیجه دو جسم متساوی‌اند، زیرا قواعدشان با ارتفاعاتشان متکافی است، و این همان است که می‌خواستیم ثابت کنیم. [۵۰۶۰۵ § حل معادله‌ی مفرد درجه‌ی سوم-] و بعد از ذکر این مطالب به صنف سوم ازه‌فردات می‌پردازیم، و آن اینست که کعبی معادل عددی باشد*.

(*) $x^3 = a$. مکعب مستطیل ABCD را با شرایط $AB = BC = 1$ و

$BD = a$ می‌سازیم، و طولهای E و Z را چنان تعیین می‌کنیم که

$$(1) \quad AB : E = E : Z = Z : BD.$$

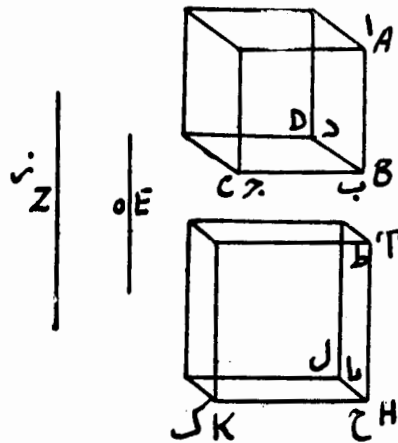
و مکعب KHTL را با ضلع E می‌سازیم ($KH = HT = HL = E$). بموجب (۱):

$$AC : TK = (AB : HK) (AB : HK) = (AB : E) (E : Z) =$$

$$AB : Z = E : BD = HK : AD.$$

پس $AC \cdot BD = TK \cdot HK$ ، یا $a = \overline{HK}^2$ پس $x = HK$ ، و هوالمطلوب.

عدد را، چنانکه [در ۵۰۳۰۵§] گفتیم، بامکعب مستطیل ABCD نمایش می‌دهیم که قاعده‌اش AC است، و آن مربع واحد است، و ارتفاعش مساوی عدد مفروض است. حال می‌خواهیم مکعبی مساوی این مکعب مستطیل بسازیم. برای این منظور بین دو خط AB و BD دو خط که واسطه در نسبت باشند می‌گیریم \odot . پس این دو خط بنابر آنچه [در ۵۰۶۰۲§] ثابت کردیم، از حیث مقدار معلومند، و این دو خط E و Z است. و HT را مساوی خط E قرار می‌دهیم، و بر آن مکعب THKL را می‌سازیم.



پس این مکعب از حیث مقدار معلوم است، و ضلعش از حیث مقدار معلوم می‌باشد. اینک گوئیم که این مکعب مساوی مکعب مستطیل D است.

برهان آن. نسبت مربع AC به مربع TK مثل نسبت AB به HK است که دو بار تکرار شود \dagger ؛ و نسبت AB به HK که دو بار تکرار شود مثل نسبت AB به Z است، که اولین و سومین از خطوط چهار گانه است، و بالنتیجه مثل نسبت HK است، که

(\odot) یعنی دو خط مانند E و Z بین AB و BD درج می‌کنیم که

$$AB : E = E : Z = Z : BD$$

(\dagger) مقصود از نسبت AB به HK که دو بار تکرار شود $(AB : HK) \times (AB : HK)$

یعنی مربع AB : HK است. و این تعبیر را ریاضیون اسلامی از یونانیان گرفته‌اند. رجوع

شود به: هیث، سیزده مقاله، جلد ۲، ص ۱۳۲ - ۱۳۳؛ تحریر اقلیدس، ص ۷۲.

دومین خط است، به BD که چهارمین خط است. پس قواعد مکعب L و مکعب مستطیل D با ارتفاعات آنها متکافی اند. پس دو جسم متساویند، و این همان است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

[§ ۵۰۷] مقترنات سه‌تائی درجه‌ی دوم.

[§ ۵۰۷۰۱] و بعد ازین، به شش صنف سه‌تائی که مانده است \dagger می‌پردازیم. [§ ۵۰۷۰۲] صنف اول اینست که مکعبی و اضلاع معادل عددی باشد \ddagger . AB را ضلع مربعی مساوی عده‌ی جذره‌های گیریم، و آن معلوم است. و مکعب مستطیلی می‌سازیم که قاعده‌اش مساوی مربع AB باشد، و ارتفاعش مساوی BC باشد، و [حجمش] مساوی عدد مفروض باشد. ساختن این مکعب مستطیل را در آنچه [در § ۵۰۶۰۳] گذشت بیان کردیم. و BC را عمود بر AB قرار می‌دهیم. و معنی عدد مجسم را در این رساله [در § ۵۰۳۰۵] آموختی، و آن مکعب مستطیلی است که قاعده‌اش مربع واحد باشد، و ارتفاعش مساوی عدد مفروض باشد، یعنی خطی باشد که نسبت آن به ضلع قاعده‌ی مکعب مستطیل مساوی نسبت عدد مفروض به واحد باشد. حال خط AB را مستقیماً تا Z امتداد می‌دهیم، و قطع مکافی به رأس B و سهم

$$\S 50703 (+)$$

$$x^3 + bx = a \quad (*)$$

فرض کنیم $\overline{AB}^2 = b$ ، $BC = a$ ، \overline{AB}^2 . سهمی HBD را به رأس B و محور BZ و ضلع قائم AB و نیم‌دایره‌ی CDB را بقطر BC می‌سازیم. فرض کنیم D نقطه‌ی تقاطع دو منحنی و E تصویر آن بر CB باشد، گوئیم $x = BE$.

برهان. در سهمی، $DZ^2 = BZ \times AB$ ، و چون $DZ = BE$ و $ED = ZB$ ، خواهیم داشت $AB : BE = BE : ED$ (۱). در دایره $BE : ED = ED : EC$ (۲). از (۱)

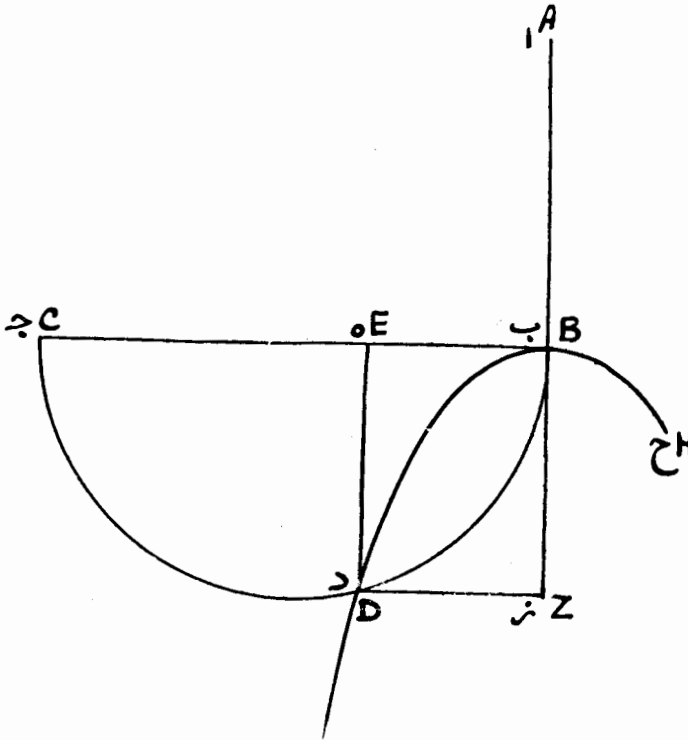
و (۲) نتیجه می‌شود $\overline{AB}^2 : \overline{BE}^2 = BE : EC$ ، و یا $\overline{AB}^2 \cdot EC = \overline{BE}^2 \cdot BC$. پس $\overline{BE}^2 + \overline{AB}^2 \cdot EB = \overline{AB}^2 \cdot EC + \overline{AB}^2 \cdot EB = \overline{AB}^2 \cdot BC$.

یا $\overline{BE}^2 + b \cdot BE = a \cdot BC$ ، وهو المطلوب.

قطوعی که خیام در حل این معادله بکار می‌برد سهمی $y = \sqrt{b}$ و دایره‌ی

$$y^2 = x \left(\frac{a}{b} - x \right) \text{ است}$$

BZ و ضلع قائم AB میکشیم، و آن قطع BDH است. پس، وضع قطع BDH،



چنانکه سابقاً [در § ۵۰۶۰۲] بیان کردیم، معلوم است. و این قطع بر خط BC مماس می‌باشد. و بر BC نیمدایره‌ای می‌کشیم. این نیمدایره ناچار قطع مکافی را قطع می‌کند. فرض کنیم آن را در D قطع کند. از D، که چنانکه دانستی وضعش معلوم است، دو عمود DZ و DE را [بترتیب] بر BZ و BC می‌کشیم. پس این دو عمود از حیث وضع و مقدار معلوم است. چون خط DZ از خطوط ترتیب قطع است، مربع آن مساوی حاصل ضرب DZ در AB می‌باشد. پس نسبت AB به DZ (که مساوی BE است) مثل نسبت BE است به ED (که مساوی ZB است). اما نسبت BE به ED مثل نسبت ED به EC می‌باشد. پس خطوط چهار گانه‌ی AB و BE و ED و EC متناسبند، و بالنتیجه، نسبت مربع AB، که اولی

است ، به مربع BE ، که دومی است ، مثل نسبت BE است ، که دومی است ، به EC ، که چهارمی است . پس مکعب مستطیلی که قاعده اش مربع AB و ارتفاعش EC است ، مساوی مکعب BE است ، زیرا ارتفاعات آن دو با قاعده های آنها متکافی اند . حال اگر مکعب مستطیلی را که قاعده اش مربع AB و ارتفاعش EB است بر هر دو بیفزاییم ، مجموع مکعب BE و این مکعب مستطیل [اضافی] مساوی مکعب مستطیلی خواهد بود که قاعده اش مربع AB است و ارتفاعش BC ، و این مکعب مستطیل را مساوی عدد مفروض گرفته بودیم . اما مکعب مستطیلی که قاعده اش مربع AB است (که مساوی عدهی جذرها است) و ارتفاعش EB است (که ضلع مکعب است) مساوی [جملهی] عدهی مفروض اضلاع EB است . پس مکعب EB با [جملهی] عدهی مفروض اضلاع آن مساوی عدد مفروض است ، و هوالمطلوب . و این صنف حالات مختلف ندارد ، و هیچیک از مسائل آن ممتنع نیست * ، و بوسیلهی خواص دایره با خواص قطع مکافی حل شد .

[۵۰۷۰۳-] صنف دوم از صنف های ششگانه آنست که مکعبی و عددی

معادل اضلاع باشد † .

(*) معادلهی $x^2 + bx - a = 0$ فقط يك ریشهی حقیقی دارد ، و آنها همیشه مثبت است .

$$x^2 + a = bx \quad (\dagger)$$

فرض کنیم $\overline{AB}^2 = b$ و $\overline{AB}^2 \cdot BC = a$. سهمی به رأس B و محور AB و ضلع قائم AB و هذلولی به رأس C که محور کانونی آن در استقامت BC و اضلاع قائم و مایل آن هر یک مساوی BC باشد می کشیم (این هذلولی متساوی القطرین است) . اگر دو قطع نقطه ی مشترک نداشته باشند مسئله ممتنع است ، و الا فرض کنیم E یکی از نقاط تقاطع آنها و T و H تصاویر E بر BC و AB باشد . گوئیم $x = BT$.

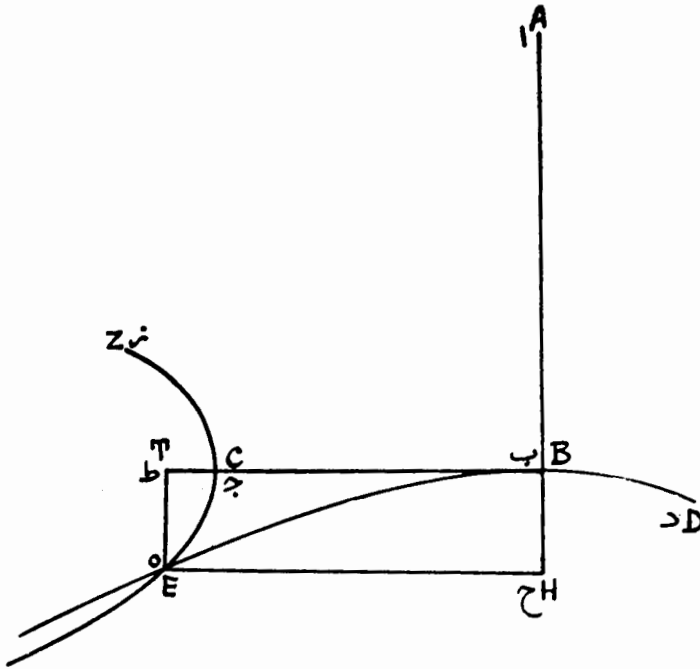
برهان . بموجب خاصیت کلی هذلولی :

$$\overline{ET}^2 : (BT \times TC) = \text{ضلع مایل} : \text{ضلع قائم}$$

پس $ET^2 = BT \times TC$ ، و بالنتیجه $BT : ET = ET : TC$ (۱) . بموجب خاصیت سهمی $\overline{EH}^2 = BH \cdot BA$ ، و چون $EH = BT$ و $BH = ET$ ، با توجه به (۱) خواهیم داشت $AB : BT = BT : BH = BT : ET = ET : TC = BH : TC$. خلاصه آنکه

بقیه در ذیل صفحه ی بعد

AB را ضلع مربعی مساوی عده‌ی جذرها می‌گیریم، و مکعب مستطیلی می‌سازیم که قاعده‌اش مربع AB باشد، و [حجمش] مساوی عدد مفروض باشد، و فرض می‌کنیم BC، که بر AB عمود است، ارتفاع آن باشد. حال قطع مکافی به رأس B که



سهمش در استقامت AB و ضلع قائم آن AB باشد می‌کشیم، و آن قطع DBE است، و وضع آن معلوم می‌باشد. سپس قطع دیگری، که زاویه باشد، به رأس C می‌کشیم که سهمش در استقامت BC و اضلاع قائم و مایل آن هر يك مساوی BC

بقیه‌ی ذیل صفحه‌ی بعد

$$AB : BT = BT : BH = BH : TC$$

بالتیجه $\overline{AB}^2 \cdot TC = \overline{BT}^2$ ، یا $\overline{AB}^2 : \overline{BT}^2 = BT : TC$ ، پس،

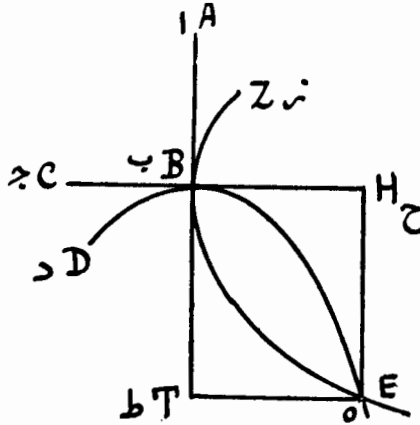
$$\overline{BT}^2 + \overline{AB}^2 \cdot BC = \overline{AB}^2 \cdot TC + \overline{AB}^2 \cdot BC = \overline{AB}^2 \cdot BT،$$

یا $\overline{BT}^2 + a = b \cdot BT$ ، وهوالمطلوب.

معادلات قطوعی که خیام بکارمیبرد $x^2 = \sqrt{b}y$ و $y^2 = x(x - \frac{a}{b})$ است.

باشد، و آن ECZ است. این قطع، چنانکه آپولونیوس در شکل پنجاه و هشتم مقاله‌ی اول ثابت کرده است، از حیث وضع معلوم است. این دو قطع یا متلاق‌اند و یا یکدیگر را قطع نمی‌کنند. پس اگر یکدیگر را قطع نکنند مسئله ممتنع است، و اگر در يك نقطه با یکدیگر مماس شوند یا یکدیگر را در دو نقطه قطع کنند وضع نقطه‌ی تقاطع معلوم خواهد بود. فرض کنیم دو قطع در نقطه‌ی E متلاق‌ی باشند. ازین نقطه عمودهای ET و EH را [بترتیب] بر دو خط BT و BH فرود می‌آوریم. پس این دو عمود ناچار وضعاً و مقدراً معلومند. و چون خط ET از خطوط ترتیب است، بنابر آنچه آپولونیوس در شکل بیستم مقاله‌ی اول ثابت کرده است، نسبت مربع ET به حاصل ضرب BT در TC مثل نسبت ضلع قائم است به ضلع مایل؛ و چون اضلاع قائم و مایل متساویند، مربع ET مساوی حاصل ضرب BT است در TC، و بالنتیجه، نسبت BT به TE مثل نسبت TE به TC می‌باشد. اما بنا بر آنچه در شکل دوازدهم مقاله‌ی اول کتاب مخروطات ثابت شده، مربع EH (که مساوی BT است) مساوی حاصل ضرب BH در BA می‌باشد. پس نسبت AB به BT مثل نسبت BT به BH و مثل نسبت BH (که مساوی ET است) به TC می‌باشد. پس خطوط چهارگانه متناسبند، و بالنتیجه، نسبت مربع AB، که اولی است، به مربع BT، که دومی است، مثل نسبت BT است، که دومی است، به TC، که چهارمی است. پس مکعب BT مساوی مکعب مستطیلی است که قاعده‌اش مربع AB و ارتفاعش CT است. و چون مکعب مستطیلی را که قاعده‌اش مربع AB و ارتفاعش BC است، و آنرا مساوی عدد مفروض ساختیم، بر هر دو بیفزائیم، مکعب BT با عدد مفروض مساوی خواهد بود با مکعب مستطیلی که قاعده‌اش مربع AB و ارتفاعش BT است، و این مکعب مستطیل [جمله‌ی] عده‌ی اضلاع مکعب می‌باشد. پس ثابت شد که این صنف حالات مختلف دارد، و بعضی مسائل آن ممتنع

است \star ، و بوسیله‌ی خواص قطع مکافی و قطع زاید حل شد.
 [۵۰۷۰۴ § -] صنف سوم آنست که مکعبی معادل اضلاع و عددی باشد \dagger .
 AB را ضلع مربعی مساوی عده‌ی اضلاع قرار می‌دهیم، و مکعب مستطیلی
 می‌سازیم که قاعده‌اش مربع AB باشد، و [حجمش] مساوی عدد مفروض باشد، و



(\star) معادله‌ی $x^3 - bx + a = 0$ همواره يك ریشه‌ی حقیقی و منفی دارد که مورد توجه خیام نیست. دو ریشه‌ی دیگرش یا موهومی اند - و در این صورت خیام مسئله را ممنوع می‌شمارد - و یا مثبت و مساوی ($x = \sqrt[3]{b/a}$) و یا مثبت و متفاوت؛ و مقصود از حالاتی که خیام به آنها اشاره می‌کند همینها است.

$$\cdot x^3 = bx + a \quad (\dagger)$$

ترسیمات: $\overline{AB}^2 = b$ و $\overline{AB}^2 \cdot BC = a$ ؛

سه‌می DBE برأس B و محور BT و ضلع قائم AB؛

هندولوی متساوی القطرین ZBE برأس B و محور کانونی BH و ضلع قائم BC.

$$\cdot x = BH \quad \text{حکم}$$

نُرهان. در هندولوی $\overline{EH}^2 = CH \cdot BH$ ، و یا بملاحظه‌ی $EH = BT$ ،

$$(۱) \quad BH : BT = BT : CH$$

در سه‌می $\overline{ET}^2 = AB \cdot BT$ ، و چون $ET = BH$ ،

$$(۲) \quad AB : BH = BH : BT$$

بموجب (۱) و (۲)، پس $\overline{AB}^2 : \overline{BH}^2 = BH : CH$ ،

$$\overline{BH}^2 = \overline{AB}^2 \cdot CH = \overline{AB}^2 \cdot BH + \overline{AB}^2 \cdot BC$$

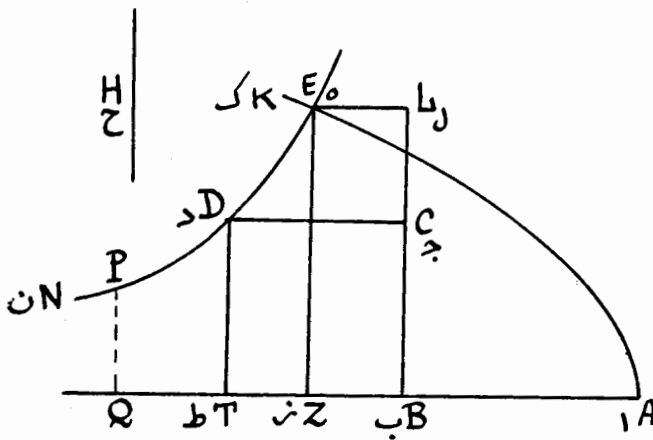
یا $\overline{BH}^2 = b \cdot BH + a$ پس $x = BH$

معادلات قطوعی که بکار رفته عبارتست از $x^2 = \sqrt{b} y$ و $y^2 = x(x + \frac{a}{b})$

فرض می‌کنیم ارتفاع آن BC بر AB عمود باشد. و AB و BC را مستقیماً امتداد می‌دهیم، و قطع مکافی به رأس B که سهمش بر استقامت AB و ضلع قائمش AB باشد می‌کشیم، و آن قطع DBE است، و وضع آن معلوم می‌باشد، و بر خط BH مماس است، چنانکه آپولونیوس در شکل سی و سوم مقاله‌ی اول ثابت کرده است. و قطع دیگری، که زاید باشد، می‌کشیم که رأسش B باشد، و سهمش بر استقامت BC باشد، و هر یک از اضلاع قائم و مایل آن مساوی BC باشد، و آن قطع ZBE است، و وضعش معلوم است، و بر خط AB مماس می‌باشد. پس دو قطع ناچار تلاقی می‌کنند. فرض کنیم در E متلاقی شوند. وضع این نقطه معلوم است، و اگر از نقطه‌ی E عمودهای ET و EH را بکشیم وضع و مقدار آنها معلوم خواهد بود. چون EH از خطوط ترتیب [قطع زاید] می‌باشد، بنا بر آنچه پیش از این گفتیم، مربع آن مساوی حاصل ضرب CH در BH است. پس نسبت EH به CH مانند نسبت EH به HB می‌باشد. اما نسبت EH ، که مساوی BT است، به HB ، که مساوی ET است و آن از خطوط ترتیب قطع دیگر است، مثل نسبت ET است به AB که ضلع قائم قطع [مکافی] است. پس خطوط چهار گانه متناسب اند، و نسبت AB به HB مثل نسبت HB به BT و مثل نسبت BT به CH می‌باشد. پس نسبت مربع AB ، که اولی است، به مربع HB ، که دومی است، مانند نسبت HB است، که دومی است، به CH ، که چهارمی است. پس مکعب HB مساوی مکعب مستطیلی است که قاعده‌اش مربع AB و ارتفاعش CH باشد، زیرا ارتفاعات آنها با قواعدشان متکافی است. اما این مکعب مستطیل مساوی مکعب مستطیلی است که قاعده‌اش مربع AB و ارتفاعش BC باشد و آنرا مساوی عدد مفروض ساختیم. بعلاوه‌ی مکعب مستطیلی که قاعده‌ای مساوی مربع AB بر آن محیط باشد و ارتفاعش BH باشد. و این مکعب مستطیل مساوی [جمله‌ی] عده‌ی مفروض اضلاع مکعب BH است. پس مکعب BH مساوی عدد مفروض بعلاوه‌ی [جمله‌ی]

عده‌ی مفروض اضلاع آن مکعب است، و مطلوب همین بود.
 پس ثابت شد که این صنف حالات مختلف ندارد، و در آن، یعنی در مسائل
 آن، چیزی ممتنع نیست*، و بخواص قطع مکافی و زاید با هم حل شد.
 [§۵۰۷۰۵-] صنف چهارم از اصناف ششگانه‌ی سه‌تائی آنست که مکعبی
 و مالها معادل عددی باشد†.

خط AB را مساوی عددی اموال می‌گیریم، و مکعبی مساوی عدد مفروض



(*) معادله‌ی $x^2 - bx - a = 0$ که موضوع بحث است همواره يك ریشه‌ی حقیقی و مثبت دارد. دو ریشه‌ی دیگرش هر دو منفی یا هر دو موهومی‌اند.

$$x^2 + cx^2 = a \quad (\dagger)$$

ترسیمات: $H = BC = BT$, $H^2 = a$, $AB = c$

هذلولی‌ی متساوی‌القطرین EDN با مجانبهای BC و BT و مار بر D؛ سهمی AEK

برأس A و محور AT و ضلع قائم BC.

حکم: $x = BZ$.

برهان. در سهمی $BC : EZ = EZ : AZ$ ؛ در هذلولی $BZ : BC = BC : EZ$.

پس $\overline{BZ}^2 : \overline{BC}^2 = BC : AZ$ ، و یا

$$\overline{BC}^2 = \overline{BZ}^2 \cdot AZ = \overline{BZ}^2 + \overline{BZ}^2 \cdot AB,$$

یا $a = \overline{BZ}^2 + c \cdot \overline{BZ}^2$ پس $x = BZ$.

معادلات قطوعی که بکار برده شده عبارتست از $xy = a^{1/2}(x+c)$ و $y^2 = a^{1/2}(x+c)$.

می‌سازیم، و فرض می‌کنیم H ضلع AN باشد، و AB را مستقیماً امتداد می‌دهیم، و BT را مساوی H می‌سازیم، و مربع $BTDC$ را تمام می‌کنیم، و - چنانکه از اشکال چهارم و پنجم مقاله‌ی دوم و شکل پنجاه و نهم مقاله‌ی اول [مخروطات] استنباط می‌شود - بر نقطه‌ی D قطع زایدی مرور می‌دهیم که خطوط BC و BT آنرا قطع نکنند، و آن قطع EDN است. پس قطع EDN از حیث وضع معلوم است، زیرا وضع نقطه‌ی D معلومست، و خطوط BC و BT از حیث وضع معلومند. و سپس قطع مکافی بر رأس A و سهم AT و ضلع قائم BC می‌سازیم، و آن قطع AK است. پس قطع AK از حیث وضع معلوم است. و دو قطع ناچار یکدیگر را تلاقی می‌کنند، و اگر E نقطه‌ی تلاقی آنها باشد، وضع این نقطه معلوم است. حال ازین نقطه عمودهای EZ و EL را [بترتیب] بر دو خط AT و BC فرود می‌آوریم؛ پس این دو عمود وضعاً و مقداراً معلومند. حال گویم ممکن نیست که قطع AEK قطع EDN را در نقطه‌ای قطع کند که عمود وارد از آن بر خط AT بر T یا خارج آن وارد آید*. زیرا اگر، در صورت امکان، این عمود بر T وارد شود، مربع آن مساوی حاصل ضرب AT در TB (که مساوی BC است) خواهد بود. اما این عمود مساوی عمود DT است. پس مربع TD مساوی حاصل ضرب AT در TB است، و نیز مساوی حاصل ضرب BT در خودش می‌باشد، و این ممتنع است. پس عمود بر T وارد نمی‌شود. و بهمین طریق خارج از آن نیز وارد نمی‌شود، زیرا درین صورت

(*) بعبارت دیگر، محل تلاقی دو قطع نه D و نه واقع بر قسمت DN از قطع زاید (هذلولی) تواند بود. چه اولاً اگر دو قطع در D متلاقی شوند، بموجب خاصیت سهمی $DT^2 = AT \cdot BC$ ، و چون $BC = DT = BT$ ، $DT^2 = AT \cdot BC$ ، و یا $BT = AT$ ، و این ممتنع است، زیرا $AT = AB + BT$. ثانیاً اگر دو قطع در نقطه‌ای مانند P از قطعه‌ی DN از سهمی متلاقی شوند، چون عمود PQ را بر AT فرود آوریم، بالبداهه $PQ < DT$. پس $PQ^2 < DT^2$ ؛ اما $PQ^2 = AQ \cdot BC$ ؛ بالنتیجه $DT^2 > AQ \cdot BC$ ، یا $BT^2 > AQ \cdot BC$ ، و این ممتنع است زیرا $AQ = AB + BT + TQ$.

این عمود کوتاهتر از TD خواهد بود ، و این بطریق اولی ممتنع است . پس ناچار عمود بر نقطه‌ای بین A و T وارد می‌شود ، مانند [عمود] EZ . و مربع EZ مساوی حاصل ضرب AZ در BC می‌باشد . پس نسبت AZ به EZ مثل نسبت EZ به BC است . و بنا بر آنچه در شکل هشتم مقاله‌ی دوم مخروطات ثابت شده ، سطح EB مساوی سطح DB است ، و بالتیجه ، نسبت EZ به BC مثل نسبت BC به BZ می‌باشد . پس خطوط چهارگانه‌ی AZ و EZ و BC و BZ [متوالیاً] متناسبند . بالتیجه ، نسبت مربع BZ ، که چهارمی است ، به مربع BC ، که سومی است ، مثل نسبت BC است ، که سومی است ، به AZ ، که اولی است . پس مکعب BC - که آنرا مساوی عدد مفروض ساختیم - مساوی مکعب مستطیلی است که قاعده‌اش مربع BZ و ارتفاعش AZ باشد . اما مکعب مستطیلی که قاعده‌اش مربع BZ و ارتفاعش AZ است مساوی است با مجموع مکعب BZ و مکعب مستطیلی که قاعده‌اش مربع BZ و ارتفاعش AB باشد ، و این مکعب مستطیلی که قاعده‌اش مربع BZ است و ارتفاعش AB است مساوی [جمله‌ی] عده‌ی مفروض مالها است . پس مکعب BZ با [جمله‌ی] عده‌ی مفروض مالهای آن مساوی عدد مفروض است ، و این همانست که می‌خواستیم ثابت کنیم .

و این صنف را حالات مختلف نیست ، و هیچیک از مسائل آن ممتنع نمیباشد [☆] ، و بوسیله‌ی خواص قطع مکافی و قطع زاید با هم حل شد .

[صنف پنجم از اصناف ششگانه‌ی سه‌تائی باقی مانده آنست که مکعب و عددی معادل مال باشد [†] .

(☆) معادله‌ی مورد بحث ، $x^3 + cx^2 - a = 0$ ، همیشه يك جواب حقیقی و مثبت

دارد ، و دو ریشه‌ی دیگرش منفی یا موهومی است .

(†) چون این یکی از موارد نادری است که خیام به بحث از معادله‌ی درجه سوم بر حسب

ضرایب می‌پردازد ، شرح روش او خالی از فایده بنظر نمی‌رسد .

معادله‌ی مورد بحث $x^3 + a = cx^2$ (۱) است که در آن a و c و x مثبت فرض

می‌شود . خیام ابتدا بوسیله‌ی $AC = c$ (۲) و $H^3 = a$ (۳) معادله را متجانس می‌کند ،

بقیه در ذیل صفحه‌ی بعد

AC را مساوی عده‌ی مالها می‌گیریم، و مکعبی مساوی عدد مفروض می‌سازیم،

بقیه از ذیل صفحه‌ی قبل

و بر حسب اینکه H مساوی AC یا بیشتر یا کمتر از آن باشد سه حالت تشخیص می‌دهد. سپس ثابت می‌کند که در دو حالت اول معادله ممتنع است. خلاصه‌ی استدلال وی اینست.

در حالت اول، یعنی اگر $H = AC$ (۴) یا $(a = c^2)$ ، بر حسب اینکه $x = H$ یا $x < H$ یا $x > H$ ، سه فرض ممکن است. اولاً $x = H$ (۵). بموجب (۴) و (۵)، $H^2 = x^2 = AC \cdot x^2$ ؛ یا بموجب (۲) و (۳)، $cx^2 = a$ ، و لهذا $cx^2 < x^2 + a$ ، و این با (۱) ناسازگار است. ثانیاً $x < H$. بهمان قیاس لازم می‌آید $cx^2 < a$ ، و بطریق اولی $cx^2 < x^2 + a$. ثالثاً $x > H$ (۶). بموجب (۶) و (۴)، $x > AC$ ، پس $x^2 > AC \cdot x^2$. پس بنا بر (۲)، $x^2 > cx^2$ ؛ و بطریق اولی $x^2 + a > cx^2$ ، و این نیز با (۱) متناقض است. در حالت دوم، یعنی اگر $H > AC$ (یا $a > c^2$)، بدلائل مشابه با حالت قبل معادله ممتنع می‌باشد.

پس فقط در حالت سوم، یعنی وقتی $H < AC$ (یا $a < c^2$)، ممکن است مسئله جواب داشته باشد. در این حالت چنین قرار می‌دهد: $BC = H$ (۸). بر حسب اینکه $AB = BC$ (یا $\sqrt{a} = c/2$) یا $BC > AB$ (یا $\sqrt{a} > c/2$) یا $BC < AB$ (یا $\sqrt{a} < c/2$) سه حالت ممکن است اتفاق افتد. سپس، خیام دو قطع رسم می‌کند:

قطع زایدی (هذلولی) با مجانبهای CA و CE و مار بر نقطه‌ی D (در شکل اول و DT در سایرین)

قطع مکافی (سهمی) بر رأس A و محور AC و ضلع قائم BC (AT در شکل اول، AL در دومی، و AK در سومی).

شکل اول: چون $BC = AB$ ، $\overline{DB}^2 = AB \cdot BC$ ، سهمی از D می‌گذرد، و دو منحنی نقطه‌ی تقاطع دیگری هم دارند.

خواننده می‌تواند تحقیق کند که اگر CA و CE را بترتیب محورهای x و y بگیریم، مختصات نقطه‌ی دیگر $x = \frac{1}{4}c(\sqrt{5} + 1)$ و $y = \frac{1}{4}c(\sqrt{5} - 1)$ است.

شکل دوم: $BC > AB$. چون $\overline{DB}^2 > AB \cdot BC$ ، در خارج سهمی است. در این صورت خیام می‌گوید که اگر دو قطع نقطه‌ای مشترک داشته باشند تصویر این نقطه بر AC بین A و B است، و بعبارت دیگر x بین c و \sqrt{a} است. کسی که با جبر مقدماتی امروزی آشنا باشد با آسانی می‌تواند این مطلب را ثابت کند.

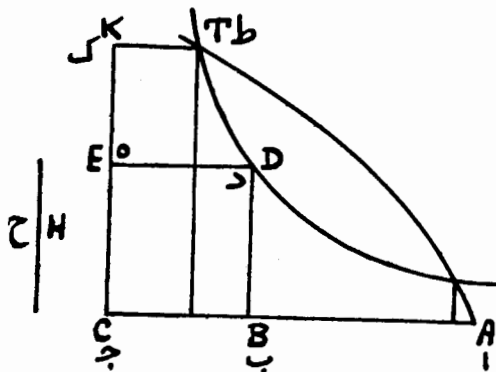
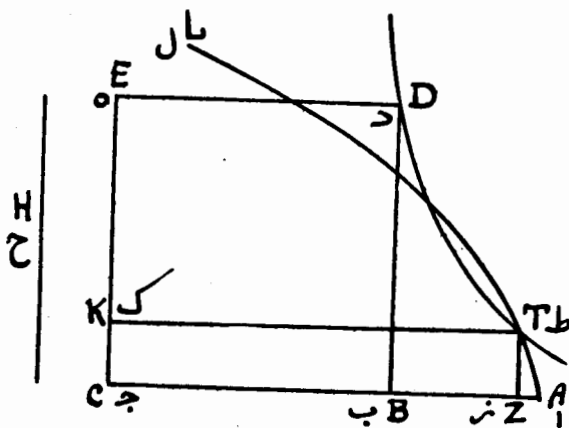
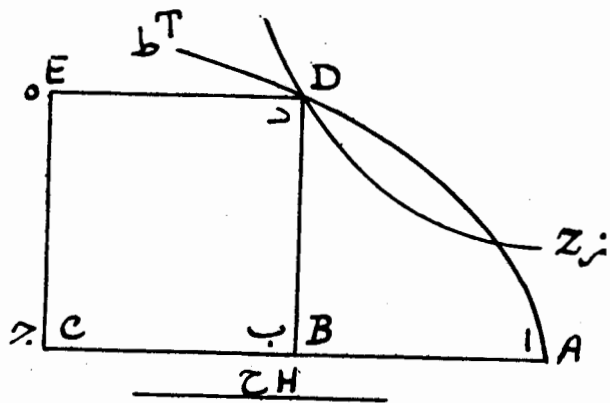
شکل سوم: $BC < AB$. نقطه‌ی D داخل سهمی است، و دو قطع یکدیگر را در دو نقطه قطع می‌کنند.

اما اثبات اینکه از نقطه‌ی تقاطع دو قطع جواب معادله بدست می‌آید شبیه همانست که در مسائل سابق آمده است.

و فرض می‌کنیم H ضلع آن باشد. خط H از سه حال خالی نیست؛ یا مساوی خط AC است، و یا بزرگتر، و یا کوچکتر از آن. پس اگر مساوی آن باشد مسئله ممتنع است، زیرا از سه حال خارج نیست: ضلع مکعب مطلوب مساوی H یا کوچکتر و یا بزرگتر از آنست. پس اگر مساوی آن باشد، حاصل ضرب AC در مربع آن [یعنی در مربع ضلع مکعب] مساوی مکعب H خواهد بود، و بالنتیجه، عدد مساوی [جمله‌ی] عددهی مالها می‌گردد، و احتیاج به افزودن مکعب [مطلوب] نیست. و اگر ضلع مطلوب کمتر از آن [یعنی از H] باشد، حاصل ضرب AC در مربع این ضلع کمتر از عدد مفروض خواهد بود، و بالنتیجه، [جمله‌ی] عددهی مالها کمتر از عدد مفروض می‌شود چه رسد باینکه چیزی [براین عدد] اضافه شود. و اگر ضلع بزرگتر H باشد. مکعب آن بزرگتر از حاصل ضرب AC در مربع آن خواهد بود، چه رسد باینکه عدد بر این مکعب افزوده شود.

سپس، اگر H بزرگتر از AC باشد، در هر سه حالت، امتناع بطریق اولی پیش می‌آید. پس لازمست که H کمتر از AC باشد، والا مسئله ممتنع است. اینک از AC [قطعه‌ی] BC را مساوی H جدا می‌کنیم. خط BC یا مساوی AB ، یا بزرگتر، و یا کوچکتر از آنست. فرض می‌کنیم در شکل اول مساوی آن و در شکل دوم بزرگتر از آن و در شکل سوم کمتر از آن باشد، و در اشکال سه گانه مربع DC را تمام می‌کنیم، و بر نقطه‌ی D قطع زایدی می‌سازیم که خطوط AC و CE آنرا قطع نکنند، و آن در شکل اول DZ و در اشکال دوم و سوم DT است. و قطع مکافی می‌سازیم که رأسش نقطه‌ی A و سهمش AC و ضلع قائمش BC باشد، و آن در شکل اول AT و در دومی AL و در سومی AK است. و هر دو قطع از جهت وضع معلومند. در شکل اول قطع مکافی از D می‌گذرد، زیرا مربع DB مساوی حاصل ضرب AB در BC است؛ پس D بر محیط قطع مکافی است. و با اندک تأملی توانی دریافت که قطع مکافی قطع زاید را در نقطه‌ی دیگری [نیز] قطع می‌کند. و در شکل دوم نقطه‌ی

D در خارج قطع مکافی است، زیرا مربع DB بزرگتر از حاصل ضرب AB در BC است.



درین صورت اگر دو قطع در نقطه‌ی دیگری به تماس یا تقاطع تلاقی کنند - و در این حال عمود وارد [از این نقطه بر AC] ناچار بین نقاط A و B [بر AB] وارد می‌شود - مسئله ممکن است و الامتنع می‌باشد . و هندسه‌دان فاضل ، ابوالجود ، فکرش به این تماس یا تقاطع نرسید ، و باین جهت حکم کرد باینکه اگر BC بزرگتر از AB باشد مسئله ممتنع است ، و درین حکم بنخطا رفت . و از اصناف ششگانه ، همین صنف است که ماهانی بدان دوچار شد . و در شکل سوم نقطه‌ی D داخل قطع مکافی است ، و بالنتیجه ، دو قطع یکدیگر را در دو نقطه تلاقی می‌کنند .

و در جمیع حالات از نقطه‌ی تلاقی عمودی بر AB فرود می‌آوریم . فرض کنیم این عمود در شکل دوم TZ باشد * . و همچنین ، عمود دیگری از آن بر CE فرود می‌آوریم ، و آن TK است . پس سطح TC مساوی سطح DC است ، و بالنتیجه نسبت BC به ZC مثل نسبت BC به TZ است . و چون TZ از خطوط ترتیب قطع ATL است مربع آن مساوی حاصل ضرب AZ در BC است . پس نسبت BC به TZ مساوی نسبت TZ به AZ است . پس خطوط چهارگانه متناسبند ، و نسبت ZC به CB مثل نسبت CB به TZ و مثل نسبت TZ به ZA است . پس نسبت مربع ZC ، که اولی است ، به مربع BC ، که دومی است ، مثل نسبت BC است ، که دومی است ، به ZA ، که چهارمی است . بالنتیجه ، مکعب BC - که مساوی عدد مفروض است - مساوی مکعب مستطیلی است که قاعده‌اش مربع ZC و ارتفاعش ZA باشد . و چون مکعب ZC را بر هر دو بیفزائیم ، مکعب ZC با عدد مفروض مساوی مکعب مستطیلی خواهد بود که قاعده‌اش مربع ZC و ارتفاعش AC است ، و این مکعب مستطیل مساوی

(*) در هذلولی $ZC : BC = BC : TZ$ ؛

در سهمی $BC : TZ = TZ : ZA$ ؛

پس $\overline{ZC}^2 : \overline{BC}^2 = BC : ZA$ ، یا $\overline{ZC}^2 \cdot ZA = \overline{BC}^2$. بالنتیجه

$$\overline{ZC}^3 + \overline{BC}^3 = \overline{ZC}^2 \cdot ZA + \overline{BC}^2 = \overline{ZC}^2 \cdot AC ,$$

با $\overline{ZC}^2 + a = c \cdot \overline{ZC}^2$ ؛ پس $x = ZC$.

معادلات قطوعی که درحل معادله بکار رفته $xy = a^{1/2} (c - x)$ و $y = a^{1/2} (c - x)$ است .

[جمله‌ی] عده‌ی مفروض اموال است ، و هوالمطلوب . و دو حالت دیگر بر همین قیاس است ، منتهی در شکل سوم ناچار دومکعب بدست می‌آید ، زیرا ، چنانکه ثابت شد ، هر [یک از دو] عمود [وارد از دو نقطه‌ی تقاطع دو قطع] ضلع مکعبی را از CA جدا می‌کند .

پس ثابت شد که این صنف حالات مختلفی دارد* ، و بعضی مسائل آن ممتنع است ، و بوسیله‌ی قطع مکافی با قطع زاید حل شد .

[۵۰۷.۷ -] صنف ششم از اصناف ششگانه‌ی سه‌تائی که مانده است آنست که مکعبی معادل اموال و عددی باشد † .

خط AB را مساوی عده‌ی اموال فرض می‌کنیم ، و مکعب مستطیلی با ارتفاع AB ، که قاعده‌اش مربع باشد ، و مساوی عدد مفروض باشد ، می‌سازیم ، و فرض میکنیم ضلع قاعده‌ی آن BC باشد که بر AB عمود است . و مستطیل DB را تمام میکنیم ، و بر نقطه‌ی C ، که وضعیت معلوم است ، قطع زایدی مرور می‌دهیم که خطوط AB و AD آنرا قطع نکنند ، و آن قطع CEZ است . و قطع دیگری ، مکافی ، بر رأس B میکشیم

(*) معادله‌ی $x^3 - cx^2 + a = 0$ همواره یک ریشه‌ی حقیقی و منفی دارد ، و دو ریشه‌ی دیگرش مثبت یا موهومی‌اند . برای بحث در حالات مختلفی که خیام به آنها اشاره کرده به ذیل ۵۰۷.۶ § ، ص ۲۵۲ - ۲۵۳ رجوع کنید .

$$x^3 = cx^2 + a \quad (\dagger)$$

ترسیمات : $AB = c$ و $AB \cdot BC^2 = a$ ؛

هندلولی متساوی‌القطرین CEZ با مجانبهای AB و AD و مار بر نقطه‌ی C ؛

سه‌می BEH بر رأس B و محور BK و ضلع قائم AB .

حکم : $x = AK$.

برهان . در هندلولی $BC : AK = EK : AB$ ؛ پس $\overline{BC}^2 : \overline{AK}^2 = \overline{EK}^2 : \overline{AB}^2$.

در سه‌می $AB : EK = EK : BK$ ؛ پس $\overline{AB}^2 : \overline{EK}^2 = \overline{BK}^2 : \overline{AB}^2$.

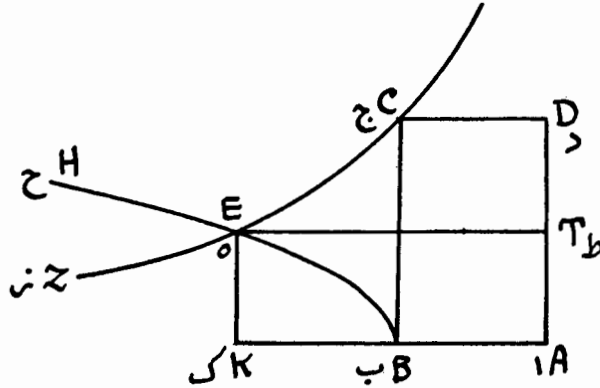
بالتبیین $\overline{BC}^2 : \overline{AK}^2 = \overline{BK}^2 : \overline{AB}^2$ ، یا $\overline{BC}^2 \cdot \overline{AB}^2 = \overline{AK}^2 \cdot \overline{BK}^2$. پس

$$\overline{AK}^2 \cdot \overline{AB} + \overline{AK}^2 \cdot \overline{BK} = \overline{AK}^2 \cdot \overline{AB} + \overline{AB} \cdot \overline{BC}^2$$

یا $\overline{AK}^3 = c \cdot \overline{AK}^2 + a$. پس $x = AK$ ، و هوالمطلوب .

معادلات قطوعی که بکار برده شده $xy = \sqrt{ac}$ و $y^2 = c(x - c)$ است .

که سهمش بر استقامت AB و ضلع قائمش AB باشد ، و آن BEH است . پس این دو قطع ناچار تلاقی میکنند . فرض کنیم در E تلاقی کنند . پس وضع E معلوم است .



و از E عمودهای ET و EK را بر AD و AB میکشیم . پس سطح EA مساوی سطح CA است ، و بالنتیجه ، نسبت AK به BC مثل نسبت AB به EK است ، و مربعات آنها نیز متناسبند ، اما مربع EK مساوی حاصل ضرب KB در AB است - زیرا EK در قطع BEH خط ترتیب است - پس نسبت مربع AB به مربع EK مثل نسبت AB به BK است . بنا براین ، نسبت مربع BC به مربع AK مساوی نسبت BK به AB است ، و بالنتیجه ، مکعب مستطیلی که قاعده‌اش مربع BC و ارتفاعش AB است مساوی مکعب مستطیلی است که قاعده‌اش مربع AK و ارتفاعش KB است ، زیرا ارتفاعات آنها با قواعدشان متکافی‌اند . حال چون مکعب مستطیلی را که قاعده‌ی آن مربع AK و ارتفاعش AB است بر هر دو بیفزائیم ، مکعب AK مساوی خواهد بود با مکعب مستطیلی که قاعده‌اش مربع BC و ارتفاعش AB است - و این مکعب مستطیل را مساوی عدد مفروض ساختیم - باضافه‌ی مکعب مستطیلی که قاعده‌اش مربع AK و ارتفاعش AB است - و این مکعب مستطیل مساوی [جمله‌ی] عددهی مفروض اموال است . پس مکعب AK مساوی است با [جمله‌ی] عددهی مفروض مالهای آن بعلاوه‌ی عدد مفروض .

و این صنف را حالات مختلف نیست ، و هیچیک از مسائل آن ممنوع نمیباشد ^{۵۴} ،
و بوسیلهی خواص دو قطع مکافی و زاید با هم حل شد .

[§ ۵۰۸] مقترنات چهارتائی سه با یک

[§ ۵۰۸۰۱] و چون اصناف سهتائی را آوردیم ، اینک می‌پردازیم به معادلات
چهارتائی چهار گانه که هر یک مرکب از معادلهی سه [مرتبه] با یک [مرتبهی دیگر]
است ^{۵۵} .

[§ ۵۰۸۰۲] و صنف اول از چهارتائی های چهار گانه آنست که مکعبی و
مالها و اضلاع ه عادل عددی باشد [†] .

BE را ضلع مربعی مساوی عدهی مفروض اضلاع قرار می‌دهیم ؛ و مکعب
مستطیلی می‌سازیم که قاعده‌اش مربع BE باشد ، و مساوی عدد مفروض باشد ، و
فرض میکنیم ارتفاع آن BC عمود بر BE باشد ؛ و BD را ، بر امتداد BC ، مساوی

(۵) معادلهی $x^3 - cx^2 - a = 0$ همیشه یک ریشهی حقیقی و مثبت دارد ، و دو ریشهی
دیگرش همواره موهومی‌اند .

§ ۵۰۲۰۴۰۱ (۵۵)

$$x^3 + cx^2 + bx = a \quad (\dagger)$$

ترسیمات : $\overline{EB}^2 \cdot BC = a$ و $BD = c$ ؛

دایرهی DZC بقطر DC ؛

هذلولی متساوی‌القطرین CZ با مجانبهای EA و EK و مار بر نقطهی C .

حکم : $x = BL$.

برهان . در هذلولی $ZE = BK - EL$ ، پس $ZE - EL = BK - EL$ ، یا $ZB = LK$ ،

ولهذا $ZL : LC = TL : BL = EB : BL$. بالنتیجه $\overline{ZL}^2 : \overline{LC}^2 = \overline{EB}^2 : \overline{BL}^2$.

از طرف دیگر ، در دایره $\overline{ZL}^2 : \overline{LC}^2 = DL : LC$. پس $\overline{EB}^2 : \overline{BL}^2 = DL : LC$ ، و از
آنجا به ترتیب :

$$\overline{EB}^2 \cdot LC = \overline{BL}^2 \cdot DL = \overline{BL}^2 + \overline{BL}^2 \cdot BD,$$

$$\overline{BL}^2 + BD \cdot \overline{BL}^2 + \overline{EB}^2 \cdot BL = \overline{EB}^2 \cdot LC + \overline{EB}^2 \cdot BL = \overline{EB}^2 \cdot BC,$$

$$\overline{BL}^2 + c \cdot \overline{BL}^2 + b \cdot BL = a .$$

پس $x = BL$ ، و هوالمطلوب .

معادلات قطوعی که بکار رفته $y^2 = (\frac{a}{b} - x)(x + c)$ و $xy = \sqrt{b}(\frac{a}{b} - x)$ است .

مساوی می‌شود با مکعب BL باضافه‌ی همچند [جمله‌ی] عده‌ی مفروض اضلاع آن، باضافه‌ی همچند [جمله‌ی] عده‌ی مفروض مالهای آن، و این همانست که می‌خواستیم ثابت کنیم.

پس این صنف حالات مختلف ندارد، و هیچیک از مسائل آن ممتنع نیست *، و بخواص قطع زاید و دایره با هم حل شد.

[§ ۵۰۸۰۳] صنف دوم از اصناف چهار گانه‌ی چهارتائی آنست که مکعبی و مالها و عدد معادل اضلاع باشد **.

AB را ضلع مربعی مساوی عده‌ی اضلاع و BC را مساوی عده‌ی مفروض مالها و عمود بر AB قرار می‌دهیم، و مکعب مستطیلی می‌سازیم که قاعده‌اش مربع AB باشد، و مساوی عدد مفروض باشد، و فرض می‌کنیم BD، که بر استقامت BC است، ارتفاع آن باشد. حال، پس از اتمام مستطیل BE، بر نقطه‌ی D قطع زایدی مرور

(*) معادله‌ی $x^3 + cx^2 + bx - a = 0$ همواره يك ریشه‌ی حقیقی و مثبت دارد، و دو ریشه‌ی دیگرش منفی یا موهومی‌اند.

$$x^3 + cx^2 + a = bx \quad (**)$$

ترسیمات: $\overline{AB}^2 = b$ و $BC = c$ و $\overline{AB}^2 \cdot BD = a$ ؛

هذلولی متساوی‌القطرین ZDH با مجانبهای AB و AE و مار بر نقطه‌ی D؛

هذلولی متساوی‌القطرین TDH بر رأس D و محور کانونی DL و ضلع قائم DC.

حکم: $x = BL$.

برهان. در هذلولی اول $AH = AD$ ، پس $AH - EM + DH = AD - EM + DH$ ،

و یا $EL = LM$. پس $\overline{AB}^2 : \overline{BL}^2 = \overline{HL}^2 : \overline{LD}^2$.

در هذلولی دوم $\overline{HL}^2 = LD \cdot CL$ ، و لهذا $\overline{HL}^2 : \overline{LD}^2 = CL : LD$. پس بترتیب:

$$\overline{AB}^2 : \overline{BL}^2 = CL : LD,$$

$$\overline{BL}^2 \cdot LC = \overline{AB}^2 \cdot LD,$$

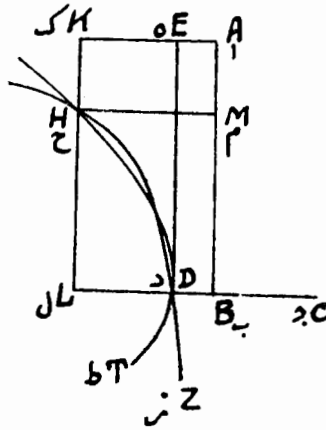
$$\overline{BL}^2 + \overline{BL}^2 \cdot BC + \overline{AB}^2 \cdot BD = \overline{AB}^2 \cdot LD + \overline{AB}^2 \cdot BD = \overline{AB}^2 \cdot BL,$$

$$\overline{BL}^2 + c \cdot \overline{BL}^2 + a = b \cdot BL.$$

پس $x = BL$.

معادلات قطوعی که بکار رفته $xy = \sqrt{b} \left(x - \frac{a}{b}\right)$ و $y^2 = \left(x - \frac{a}{b}\right)(x + c)$ است.

می‌دهیم که خطوط AB و AE آنرا قطع نکنند، و آن ZDH است. و قطع زاید دیگری برأس D می‌سازیم که سهمش در امتداد BD باشد، و هر يك از اضلاع قائم



و مایل آن مساوی DC باشد، و آن TDH است. و ناچار این قطع قطع اول را در D قطع می‌کند. پس اگر بشود که در نقطه‌ی دیگری متلاقی شوند مسئله ممکن است، و الا ممتنع است. و این تلافی، به صورت تماس یا تقاطع در دو نقطه، مبتنی بر مقاله‌ی چهارم کتاب مخروطات است، و حال آنکه [در § ۵۰۱۰۴] عهد کرده بودیم که جز بدو مقاله ازین کتاب توسل نجوئیم. اما این امر مخل عهد ما نیست، زیرا همینقدر که دو قطع متلاقی شوند تفاوتی نکند که این تلافی بصورت تماس یا تقاطع باشد؛ این مطلب را بدان. و تلافی ممکن است بصورت تماس باشد یا تقاطع؛ اما اگر یکی از دو قطع دیگری را در نقطه‌ای غیر از D قطع کند ناچار آنرا در دو نقطه [ی دیگر] قطع میکند.

و در هر حال، از نقطه‌ی تقاطع یا تلافی، هر چه باشد - فرض کنیم نقطه‌ی H باشد - دو عمود HM و KHL را میکشیم. این دو عمود از حیث وضع و مقدار معلومند، زیرا وضع نقطه‌ی H معلومست. پس سطح AH مساوی سطح AD است، و چون EM را که مشترك است اسقاط کنیم، MD و EH میماند که برابرند، و اگر DH را بآنها

بیفزائیم، ML مساوی EL خواهد بود، و بالنتیجه اضلاع این دو متکافی اند، و همچنین است مربعات اضلاع آنها. پس نسبت مربع AB به مربع BL مثل نسبت مربع HL است به مربع LD . و اما، چنانکه بکرات ثابت کردیم، نسبت مربع HL به مربع LD مثل نسبت CL است به LD . پس نسبت مربع AB به مربع BL مثل نسبت CL به LD می باشد. و بالنتیجه مکعب مستطیلی که ارتفاعش LD و قاعده اش مربع AB است مثل مکعب مستطیلی است که قاعده اش مربع BL و ارتفاعش LC است. لکن این مکعب مستطیل اخیر مساویست با مجموع مکعب BL و مکعب مستطیلی که قاعده اش مربع BL و ارتفاعش BC است و مساوی [جمله‌ی] عده‌ی مفروض مالهاست. و چون مکعب مستطیلی را که قاعده اش مربع AB و ارتفاعش BD است، و آنرا مساوی عدد مفروض ساختیم، بهر دو بیفزائیم، مکعب BL با [جمله‌ی] عده‌ی مالهای آن و با عدد مفروض مساوی خواهد بود با مکعب مستطیلی که قاعده اش مربع AB و ارتفاعش BL است و مساوی [جمله‌ی] عده‌ی مفروض اضلاع مکعب BL است، و مقصود همین بود.

پس ثابت شد که این صنف حالات مختلف دارد، و گاهی در مسائل آن دوزلع، متعلق به دو مکعب، پیدا میشود، و گاهی در آن، یعنی در مسائل آن، امتناع پیش می آید^۵، و این صنف بوسیله‌ی خواص دو قطع زاید حل شد، و همین بود که میخواستیم ثابت کنیم.

[§ ۵۰۸۰۴] صنف سوم از اصناف چهارگانه‌ی چهارتائی آنست که

مکعبی و اضلاع و عدد معادل مالها باشد[†].

(۵) معادله‌ی مورد بحث، $x^2 + cx^2 - bx + a = 0$ ، همواره یک ریشه‌ی حقیقی و منفی دارد، که مورد توجه خیام نیست. دورریشه‌ی دیگر آن حقیقی و مثبت یا موهومی میباشند.

$$x^2 + bx + a = cx^2 \quad (\dagger)$$

فرض کنیم $BE = c$ و $\overline{BC}^2 = b$ و $AB = a$ و \overline{BC}^2 . بقطر AE نیمدایره‌ای میکشیم، و عمود BC را امتداد میدهیم و CM را بموازات AE رسم می کنیم. طریقی که خیام سرانجام و پس از ذکر حالات خاص و جزئیاتی بیفایده می آورد اینست که مستطیلی که یک ضلعش CZ و سطحش مساوی سطح مستطیل CA باشد رسم می کند. فرض کنیم H رأس مقابل به C از این مستطیل باشد. بقیه در ذیل صفحه‌ی بعد

خط BE را مساوی عدهی مفروض مالها میگیریم، و BC را ضلع مربعی مساوی عدهی اضلاع، و BC را عمود بر BE قرار می‌دهیم، و مکعب مستطیلی میسازیم که قاعده‌اش مربع BC باشد، و مساوی عدد مفروض باشد، و فرض میکنیم ارتفاعش AB و در امتداد BE باشد، و بر AE نیمدایرهی AZE را میکشیم. پس نقطه‌ی C یا داخل دایره واقع میشود، یا بر محیط آن، و یا در خارج آن.

اولا فرض میکنیم C داخل دایره واقع باشد، و BC را امتداد می‌دهیم تا دایره

بقیه‌ی ذیل صفحه‌ی قبل

بر H هذلولی با مجانبهای CZ و CM می‌کشیم، و فرض می‌کنیم L یکی از نقاط تقاطع آن با دایره و K تصویر L بر AE باشد. گوئیم $x = BK$.

برهان. بنا بر خاصیت هذلولی $LC = CH = CA$ ؛ پس $LC + CK = CA + CK$ ،
یا $TK = DK$ ؛ بالنتیجه $LK \cdot BK = KA \cdot BC$ ، و لهذا $\overline{LK}^2 : \overline{KA}^2 = \overline{BC}^2 : \overline{BK}^2$ ،
اما چون L بر دایره است $LK : KA = KE : LK$ ؛ پس $\overline{LK}^2 : \overline{KA}^2 = (LK : KA) \cdot (KE : LK)$ ،
 $\overline{BC}^2 : \overline{BK}^2 = KE : KA$ ، و بالنتیجه $\overline{BC}^2 \cdot KA = \overline{BK}^2 \cdot KE$ ، پس
 $\overline{BK}^2 + \overline{BC}^2 \cdot BK + \overline{BC}^2 \cdot AB = \overline{BK}^2 \cdot KE + \overline{BK}^2 = \overline{BK}^2 \cdot BE$ ،
و یا $\overline{BK}^2 + b \cdot BK + a = c \cdot \overline{BK}^2$ ، و هوالمطلوب.

اما حالات بیفایده‌ای که خیام قبل از این طریقه می‌آورد از این قرار است که ابتداء سه حالت

تشخیص می‌دهد:

(I) C داخل نیمدایره $(b^2 < ac)$ ؛

(II) C بر نیمدایره $(b^2 = ac)$ ؛

(III) C خارج نیمدایره $(b^2 > ac)$.

در حالت (I) فرض کنیم Z نقطه‌ی تلاقی BC با نیمدایره باشد. مستطیل CH را که یک

ضلعش CZ و همسطح CA است می‌سازد، و سپس حالت مذکور را به سه حالت تقسیم می‌کند:

$$H (I_1) \text{ داخل نیمدایره } (a^{2/2} + b^2 \sqrt{c} < \sqrt{a} bc)$$

$$H (I_2) \text{ بر محیط نیمدایره } (a^{2/2} + b^2 \sqrt{c} = \sqrt{a} bc)$$

$$H (I_3) \text{ در خارج نیمدایره } (a^{2/2} + b^2 \sqrt{c} > \sqrt{a} bc)$$

در حالت I_1 قطع زاویه‌ی H و با مجانبهای CZ و CM دایره را در دو نقطه قطع می‌کند،

و اگر K و F تصاویر این دو نقطه بر AE باشند، بر طبق برهانی که گذشت معلوم می‌شود

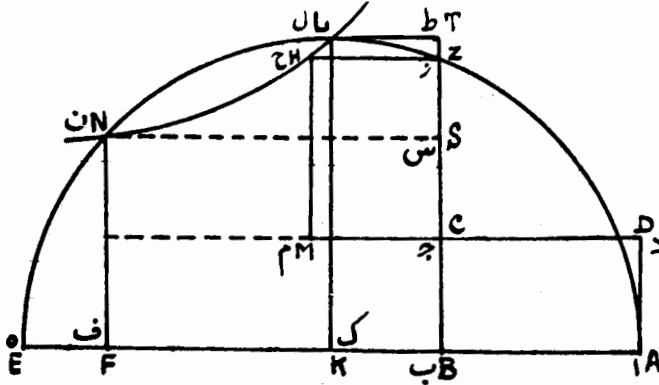
که BK و BF جوابهای معادله‌اند. سایر مطالب خیام را در متن ملاحظه می‌فرمایند.

معادلات قطوع سابق الذکر که در حل معادله بکار برده شده عبارتست از

$$xy = \sqrt{b} \left(x + \frac{a}{b} \right),$$

$$y^2 = \left(x + \frac{a}{b} \right) (c - x).$$

را در Z قطع کند، و مستطیل AC را تمام می‌کنیم، و بر ZC مستطیلی همسطح



مستطیل AC می‌سازیم، و آن مستطیل CH است. وضع نقطه‌ی H معلومست، زیرا سطح CH از حیث مقدار معلومست، و مقدار زوایای آن نیز معلوم می‌باشد، و خط ZC از حیث وضع و مقدار معلومست.

و این نقطه‌ی H یا داخل دایره، یا بر محیط آن، و یا در خارج آنست. اولاً فرض می‌کنیم H داخل دایره باشد، و بر نقطه‌ی H قطع زایدی مرور می‌دهیم که خطوط ZC و CM آنرا قطع نکنند. درین وضع، قطع زاید دایره را ناچاردرد و نقطه قطع می‌کند. فرض کنیم آنرا در دو نقطه‌ی L و N قطع کند. پس این دو نقطه از حیث وضع معلومند. و از آنها عمودهای LK و NF را بر AE و از نقطه‌ی L عمود LT را بر BZ فرود می‌آوریم. سطح LC مساوی CH خواهد بود، و CH مثل CA است. و چون CK را بهر دو بیضائیم DK مساوی TK خواهد بود، و لهذا اضلاع آنها متکافی‌اند، و مربعات اضلاع آنها نیز چنین است. اما، بعلت [خواص] دایره، نسبت مربع LK به مربع KA مثل نسبت EK به KA است. پس لازم آید که نسبت مربع BC به مربع BK مساوی نسبت EK به KA باشد. بالنتیجه، مکعب مستطیلی که قاعده‌اش مربع BC و ارتفاعش KA است مساوی مکعب مستطیلی است که قاعده‌اش مربع BK و ارتفاعش KE باشد. لکن مکعب مستطیل اول مساوی است با [جمله‌ی]

عده‌ی مفروض اضلاع مکعب BK بعلاوه‌ی همچند عدد مفروض . و چون مکعب BK را بهر دو بیفزائیم ، مکعب مستطیلی که قاعده‌اش مربع BK و ارتفاعش BE است - و مساوی [جمله‌ی] عده‌ی مفروض مالهای مکعب BK است - مساوی خواهد بود با مجموع مکعب BK با [جمله‌ی] عده‌ی مفروض اضلاع آن و با عدد مفروض ، و بهمین برهان ، مکعب BF نیز چنین است . و این در صورتی بود که نقاط C و H در داخل دایره قرار گیرند .

اما اگر H در خارج دایره واقع شود ، و قطع را بسازیم ، گاهی دایره را به تماس یا تقاطع تلافی میکند (همین حالت ازین صنف است که ابوالجود در مسئله‌ای که بزودی آنرا خواهیم گفت ذکر کرده است) ، و مطلب به همان [حالت] که گفتیم برمی گردد . و اگر قطع دایره را تلافی نکند ، باز هم مستطیل را برخطی کوتاه‌تر از ZC ، و یا ، در حالت دیگر ، بلندتر از آن میکشیم* . درین صورت ، اگر قطع دایره را تلافی نکند مسئله ممتنع است ، و برهان امتناع آن معکوس آنست که گفتیم .

[ثانیاً] اگر C بر محیط دایره یا خارج آن قرار گیرد ، CZ را امتداد میدهیم ، و مستطیلی رسم می کنیم که یک گوشه‌ی آن بر C واقع شود ، و چنان باشد که چون بر گوشه‌ی مقابل زاویه‌ی C قطعی [زاید] بهمان صفت که مذکور شد مرور دهیم ، این قطع دایره را به تماس یا تقاطع تلافی کند ، و این امر با عده‌ی کمی امتحانات متوالی و حالتی از یک قاعده‌ی ساده دانسته شود ، ولی از ذکر این قاعده چشم پوشیدم تاخوانندگان این رساله را تمرینی باشد ، چو کسی که این اندازه استنباط تواند هیچ ازین رساله نخواهد فهمید ، زیرا این رساله مبتنی است بر کتابهای سه گانه که از آنها یاد کردیم .

و امتناع حالات ممتنع را با معکوس کردن برهانی که برای حالات ممکن گفتیم ثابت میکنیم ، و آن اینکه ضلع مکعب باید از EB ، که عده‌ی مفروض مالها

(*) عملی است لغو .

است: کوتاهتر باشد \square ، چو اگر مساوی عدهی مفروض مالها باشد، این مکعب مساوی [جملهی] عدهی مفروض مالهای خود خواهد بود، بدون اینکه چیز دیگری از قبیل عدد یا اضلاع آن بر آن افزوده شود. و اگر ضلع مکعب بزرگتر از عدهی مفروض مالها باشد، مکعب خود بزرگتر از [جملهی] عدهی مفروض مالها، آن خواهد بود، چه رسد باینکه چیز دیگری بآن اضافه شود. پس ثابت شد که ضلع مکعب باید کوچکتر از عدهی مفروض مالها باشد. حال از BE [جزئی] مساوی ضلع مکعب جدا می‌کنیم، و فرض میکنیم [این جزء] BF باشد، و از F عمودی [بر BE] تا محیط دایره می‌کشیم. سپس برهانی را که ذکر شد معکوس می‌کنیم. نتیجه میشود که رأس عمود بر محیط قطع زایدی قرار دارد که گفته شد ممکن نیست دایره را قطع کند، و این محال است \dagger .

(۵) اگر $x \geq c$ ، نتیجه می‌شود $x^2 \geq cx$ ، و بطریق اولی $x^2 + bx + a > cx^2$.
 (+) مقصود اثبات اینست که اگر قطوع مذکور متلاقی نباشند مسئله ممتنع است. توضیح استدلال خیام باین شرح است. ثابت شد که اگر معادله جوابی داشته باشد آن جواب از c (یعنی BE) کمتر است. پس BF را مساوی این جواب جدا کرده از F عمودی بر AE می‌کشیم تا دایره را در N قطع کند. چون BF جواب معادله است خواهیم داشت:

$$(۱) \quad \overline{BF}^2 + \overline{BC}^2 \cdot BF + \overline{BC}^2 \cdot AB = BE \cdot \overline{BF}^2$$

(رجوع شود به ذیل صفحهی ۲۱۴). اما طرف دوم مساوی $\overline{BF}^2 + \overline{BF}^2 \cdot EF$ است.

پس بموجب (۱)، $\overline{BC}^2 \cdot BF + \overline{BC}^2 \cdot AB = \overline{BF}^2 \cdot EF$ ، و یا

$$(۲) \quad \overline{BC}^2 \cdot AF = \overline{BF}^2 \cdot EF.$$

اما چون N بر دایره است، $\overline{NF}^2 \cdot AF = \overline{AF}^2 \cdot EF$ ، پس بموجب (۲)،

$NF \cdot FB = FA \cdot AD$. بنابراین، مستطیلهای SF و DF متساوی اند، و پس از اسقاط CF

نتیجه می‌شود $NC = AC = CH$. بالنتیجه، نقطه‌ی N بر هذلولی مار بر H و با مجانبهای

ZC و CM قرار دارد، و این خلاف فرض است. فهوالمطلوب.

در سایر حالات «امتناع»، خیام، هر گاه دو قطعی که در حل مسئله بکار می‌برد متلاقی

نکنند، بدون استدلال حکم به امتناع می‌کند. استدلال فوق‌الذکر، که مانند بسیاری از حواشی

این قسمت، از جبر عمر خیام و پیکه گرفته شده (ص ۵۳)، با تغییر مناسب در سایر اصناف نیز

قابل اجراست.

و چون گمان می‌کنم که این امتحانات ممکن است بر بعضی از خوانندگان این رساله دشوار باشد، این طریقه را کنار می‌گذاریم، و قاعده‌ای می‌آوریم که ازین امتحانات بی‌نیاز باشد، و آن اینست که برخطی دلخواه بر استقامت $BC - C$ هر جا باشد، در داخل [دایره] یا در خارج [آن] - مستطیلی می‌سازیم که يك گوشه‌ی آن بر C باشد، و مساوی سطح AC باشد. پس وضع و مقدار اضلاع آن ناچار معلوم خواهد بود. سپس بر گوشه‌ی مقابل گوشه‌ی C قطع زایدی می‌کشیم که خطوط ZC و CM آنرا قطع نکنند - و CM خطی است عمود بر $[ZC]$ نقطه‌ی C . پس اگر قطع دایره را به تماس یا تقاطع تلاقی کند مسئله ممکن و الا ممتنع است، و برهان بر امتناع آنست که ذکر کردیم.

[§۵۰۸۰۴۰۱-] و [پیش از ما] یکی از هندسه دانان دوچار این صنف شد، و آنرا حل کرد، ولی حالات مختلف آنرا ثابت نکرد، و بفکرش نرسید که گاهی مسائل این صنف، چنانکه ثابت کردیم، ممتنع است. پس این مطلب را بدان، و نیز قانون دیگر حل این صنف و تمیز مسائل ممکن آنرا از حالات ممتنع دریاب. و این صنف بوسیله‌ی خواص دایره با خواص قطع زاید حل شد، و این همانست که می‌خواستیم ثابت کنیم.

و اما مسئله‌ای که یکی از متأخرین را دوچار این صنف کرد اینست: «ده را بدو قسمت چنان تقسیم کنید که مجموع مربعات دو قسمت بعلاوه‌ی خارج قسمت جزء بزرگتر بر جزء کوچکتر هفتاد و دو باشد»^۵. پس، بر طبق عادت علمای جبر در امثال این تقسیمات، یکی از دو قسمت را شیء گرفت و دیگری را ده منهای شیء. سپس مسئله منجر شد به معادله‌ی مکعبی و پنج عدد و سیزده و نیم ضلع آن

(۵) اگر یکی از اجزاء را به x نمایش دهیم معادله‌ی مسئله اینست:

$$(10 - x)^2 + x^2 + (10 - x)/x = 72$$

یا $10x^2 + 13.5x + 5 = x^3$. جوابهای این معادله عبارتند از $x = 2$ و

$x = 4 \pm \sqrt{74}/2$. درین مسئله نقاط C و H هر دو در خارج دایره قرار دارند، و حکم بخلاف آن، که در متن آمده، ناشی از اشتباه نساخ یا خیام است.

با ده مال . و درین مسئله دو نقطه‌ی C و H درست در داخل دایره قرار می‌گیرند . و این مرد فاضل مسئله‌ی مذکور را - که جماعتی از فضلاء عراق ، از جمله ابوسهل کوهی ، خدا همه‌ی آنرا رحمت کند ، پس از کوشش بسیار از حلش عاجز شدند - حل کرد؛ منتهی این حل کننده - که خداوند از او خوشنود باد - با مراتب فضل و مقام بلندی که در ریاضیات داشت ، متوجه حالات مختلف سابق الذکر نشد ، و حال آنکه در مسائل این صنف بعضی ممتنع است . و این فاضل همان ابوالجود یا شنی* است . و خدا داناست .

[§۵۰۸۰۵ -] صنف چهارم از اصناف چهارگانه آنست که اعداد و اضلاع و مالها معادل مکعب باشد †

فرض می‌کنیم BE ضلع مربعی مساوی عده‌ی اضلاع باشد؛ و مکعب مستطیلی

(*) ابوعبدالله محمد ابن احمد الشنی ، از ریاضیون معاصر ابوالجود یا کمی بیش از زمان

وی بوده است . رجوع شود به سوتر ، ریاضیون و منجمین عرب ، ص ۹۷ - ۹۸ .

$$x^2 = cx^2 + bx + a \quad (\dagger)$$

ترسیمات : $BC = c$ ، $\overline{BE}^2 \cdot AB = a$ ، $\overline{BE}^2 = b$:

هذلولی متساوی القطرین HTK با مجانبهای EM و ES و مار بر H :

هذلولی متساوی القطرین LCT با رأس C و محور کانونی CN و ضلع قائم AC ،

حکم : $x = NB$

برهان . در هذلولی اول $TE = HE = EA$ ؛ پس $TB = AS$ ، و لهذا

$$\overline{AN}^2 : \overline{TN}^2 = \overline{NB}^2 : \overline{SN}^2 = \overline{NB}^2 : \overline{BE}^2 .$$

در هذلولی دوم $\overline{TN}^2 = NC \cdot AN$ ، یا $\overline{AN}^2 : \overline{TN}^2 = AN : NC$. پس بترتیب

$$\overline{NB}^2 : \overline{BE}^2 = AN : NC ,$$

$$\overline{BE}^2 \cdot AN = \overline{NB}^2 \cdot NC ,$$

$$\overline{BE}^2 \cdot AB + \overline{BE}^2 \cdot NB + \overline{NB}^2 \cdot BC = \overline{NB}^2 \cdot NC + \overline{NB}^2 \cdot BC = \overline{NB}^2 \cdot ,$$

$$a + b \cdot NB + c \cdot \overline{NB}^2 = \overline{NB}^2 ,$$

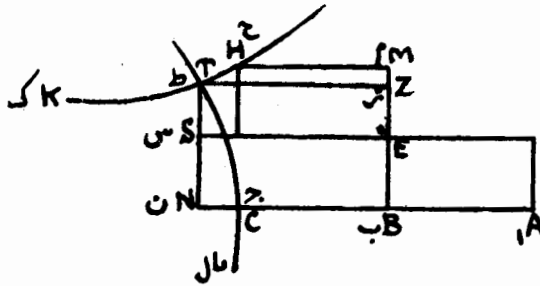
پس $x = NB$.

معادلات قطوعی که بکار رفته عبارتست از :

$$xy = \sqrt{b} \left(x + \frac{a}{b} \right) ,$$

$$y^2 = \left(x + \frac{a}{b} \right) (x - c) .$$

می‌سازیم که قاعده‌اش مربع BE باشد، و مساوی عدد مفروض باشد، و ارتفاع آن AB را عمود بر BE می‌گیریم؛ و BC را بر امتداد AB مساوی عددی مفروض مالها فرض میکنیم. سپس مستطیل AE را تمام می‌کنیم، و BE را بطول دلخواه EM امتداد می‌دهیم، و بر EM که مفروض گرفتیم مستطیلی مساوی AE می‌سازیم، و آن EH است. پس وضع نقطه‌ی H معلومست. حال بر H قطع زایدی می‌سازیم که خطوط



EM و ES آنرا قطع نکنند، و آن HTK است. پس وضع این قطع معلومست. و طع زاید دیگری می‌سازیم که رأس آن نقطه‌ی C و سهمش در امتداد BC باشد، و هریک از اضلاع قائم و مایل آن مساوی AC باشد، و آن قطع LCT است، و وضع معلوم می‌باشد، و ناچار قطع HTK را تلاقی می‌کند. فرض کنیم آنرا در نقطه‌ی T تلاقی کند. پس وضع T معلومست، و چون از آن دو عمود TZ و TN را بر BC و BM بکشیم، این دو عمود از حیث وضع و مقدار معلوم خواهند بود، و TE مساوی EH می‌شود که خود مساوی EA است، و چون EN را بر هر دو بیفزائیم، AS مساوی TB می‌شود، و بالنتیجه، اضلاع این دو متکافی‌اند، و همچنین است مربعات اضلاع آنها. اما، چنانکه بکرات ثابت کردیم، باقتضای قطع زاید LCT ، نسبت مربع TN به مربع AN مساوی نسبت NC است به AN . پس نسبت مربع BE به مربع BN مثل نسبت NC است به NA . پس مکعب مستطیلی که قاعده‌اش مربع BE و ارتفاعش AN است مساوی مکعب مستطیلی است که قاعده‌اش مربع BN و ارتفاع آن CN است. اما اولی مساوی مکعب مستطیلی است که مربع BE بر آن محیط است و ارتفاعش AB

است، و آنرا مساوی عدد ساختیم، با مکعب مستطیلی که قاعده‌اش مربع BE و ارتفاعش BN است، و مساوی [جمله‌ی] عدوی مفروض اضلاع مکعب BN می‌باشد. حاز مکعب مستطیلی را که قاعده‌اش مربع BN و ارتفاعش BC است، و مساوی [جمله‌ی] عدوی مفروض مالهای مکعب BN می‌باشد، به هر دو اضافه می‌کنیم. لازم می‌آید که مکعب BN مساوی باشد با [جمله‌ی] عدوی مفروض مالهای آن با [جمله‌ی] عدوی مفروض اضلاع آن و با عدد مفروض، و این همانست که می‌خواهیم ثابت کنیم. و این صنف حالات مختلف ندارد، و هیچیک از مسائل آن ممتنع نیست \ast .

§ ۵۰۹ مقررناث چهارتائی دو با دو

[§ ۵۰۹۰۱ -] و چون اصناف چهارگانه‌ی چهارتائی [سه با یک] را آوردیم، اینک می‌پردازیم به اصناف سه گانه $\ast\ast$ که هر یک عبارتست از معادله‌ی دو [مرتبه] با دو [مرتبه‌ی دیگر].

[§ ۵۰۹۰۲ -] صنف اول از اصناف سه گانه‌ی چهارتائی که مانده بود اینست که مکعب و مالها معادل اضلاع و عدد باشد \dagger .

(\ast) معادله‌ی $x^3 - cx^2 - bx - a = 0$ همواره یک ریشه‌ی حقیقی و مثبت دارد، و دو ریشه‌ی دیگرش منفی یا موهومی است.

§ ۵۰۲۰۴۰۲ ($\ast\ast$)

$$x^3 + cx^2 = bx + a \quad (\dagger)$$

فرض کنیم $b = \overline{BD}^2$ ، $c = BC$ ، و $a = S = \overline{BD}^3$. بر حسب اینکه $S < BC$ یا $S = BC$ یا $S > BC$ سه حالت تشخیص میدهیم. بحث فعلی راجع به حالت اول است.

حالت اول $S < BC$.

ترسیمات. AB را مساوی S جدا کرده مستطیل ED را مساوی مستطیل AD می‌سازیم. هذلولی‌متساوی‌القطرین EH را با مجانبهای DZ و DO بر نقطه‌ی F ، و هذلولی‌متساوی‌القطرین AHT را بر رأس A و محورکانونی AB و ضلع قائم AC می‌کشیم.

حکم: $x = KB$.

بقیه در ذیل صفحه‌ی بعد

BD را ضلع مربعی مساوی عده‌ی اضلاع می‌گیریم و CB را عده‌ی مفروض اموال، و CB عمود بر AB است. سپس مکعب مستطیلی می‌سازیم که قاعده‌اش مربع BD باشد، و مسأوی عدد مفروض باشد، و فرض می‌کنیم ارتفاع آن S باشد. خط S یا بزرگتر از BC است، و یا کوتاهتر از آن، و یا مساوی آن.

اولا فرض می‌کنیم S کوتاهتر از BC باشد. و از BC [جزء] AB را مساوی S جدا می‌کنیم، و مستطیل AD را تمام می‌کنیم، و بر امتداد BD طول دلخواه DZ را می‌گیریم، و بر DZ مستطیلی مساوی AD می‌سازیم، و آن ED است. پس وضع E معلوم است، و اضلاع مستطیل ED جملگی از حیث وضع و مقدار معلومست. سپس بر E قطع زایدی مرور می‌دهیم که خطوط ZD و DO آنرا تلافی نکنند، و آن قطع EH است. پس وضع EH معلومست. و قطع زاید دیگری می‌کشیم که رأسش نقطه‌ی A و سهمش AB و هر یک از اضلاع قائم و مایل آن مساوی AC باشد. و آن قطع AHT است، و ناچار قطع دیگر را تلافی میکند. فرض کنیم آنرا در H تلافی کند. پس وضع H معلومست، و چون از آن دو عمود HK و HL را بکشیم وضع و مقدار آنها معلوم خواهد بود، و مستطیل HD مساوی ED می‌شود، که خود مساوی AD

بقیه‌ی ذیل صفحه‌ی قبل

برهان. در هذلولی اول، $HD = ED = AD$ ؛ پس $HB = AM$ ، و لهذا

$$\overline{HK}^2 : \overline{KA}^2 = \overline{MK}^2 : \overline{KB}^2 = \overline{BD}^2 : \overline{KB}^2 .$$

$$\overline{HK}^2 : \overline{KA}^2 = \overline{CK} : \overline{AK} ,$$

پس بترتیب:

$$\overline{BD}^2 : \overline{KB}^2 = \overline{CK} : \overline{AK} ,$$

$$\overline{KB}^2 \cdot \overline{CK} = \overline{BD}^2 \cdot \overline{AK} ,$$

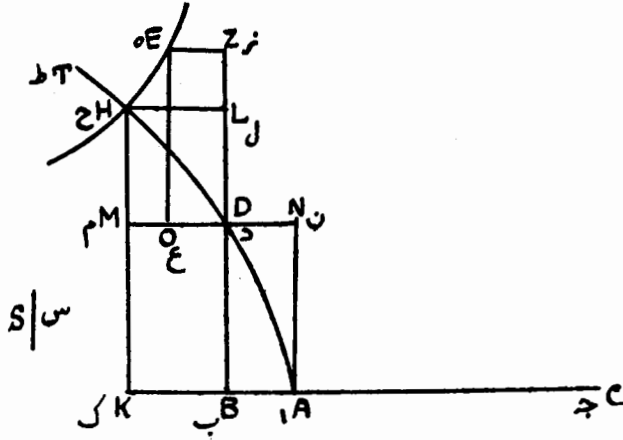
$$\overline{KB}^2 + \overline{KB}^2 \cdot \overline{BC} = \overline{BD}^2 \cdot \overline{KB} + \overline{BD}^2 \cdot \overline{AB} ,$$

$$\overline{KB}^2 + c \cdot \overline{KB}^2 = b \cdot \overline{KB} + a .$$

پس $x = \overline{KB}$

معادلات قطوع مذکور عبارتست از $y^2 = (x + \frac{a}{b})(x + c)$ و $xy = \sqrt{b}(x + \frac{a}{b})$.

است، و چون DK را بر هر دو بیفزائیم، سطح HB مساوی AM در می‌آید، و بالنتیجه



اضلاع آنها متكافی‌اند، و همچنین است مربعات اضلاع آنها. اما چنانکه بکرات ثابت کردیم، باقی‌نای قطع AHT، نسبت مربع HK به مربع KA مثل نسبت CK به AK است. پس نسبت مربع BD به مربع KB مثل نسبت CK به AK است. پس مکعب مستطیلی که قاعده‌اش مربع BD و ارتفاعش AK است مساوی مکعب مستطیلی است که قاعده‌اش مربع BK و ارتفاعش CK است. اما این مکعب مستطیل اخیر مساوی است با مجموع مکعب BK و مکعب مستطیلی که قاعده‌اش مربع BK و ارتفاعش BC است، و مساوی [جمله‌ی] عده‌ی مفروض اموال می‌باشد. و مکعب مستطیل اول مساویست با مجموع مکعب مستطیلی که قاعده‌اش مربع BD و ارتفاعش AB است - و آنرا مساوی عدد مفروض ساختیم - و مکعب مستطیلی که قاعده‌اش مربع BD و ارتفاعش BK است، و مساوی [جمله‌ی] عده‌ی مفروض اضلاع مکعب BK است. پس مکعب BK با [جمله‌ی] عده‌ی مفروض مالهای آن مساویست با عدد مفروض و [جمله‌ی] عده‌ی مفروض اضلاع آن مکعب، و هوالمطلوب.

و [ثانیاً] اگر S مساوی BC باشد، BD خود ضلع مکعب مطلوبست \star ، و برهان آن اینکه [از يك طرف] مکعب مستطیلی که قاعده‌اش مربع BD و ارتفاعش نیز BD است - و برابر [جمله‌ی] عده‌ی اضلاع مکعب BD میباشد - مساویست با مکعب BD . و [از طرف دیگر،] مکعب مستطیلی که قاعده‌اش مربع BD و ارتفاعش BC است - و برابر [جمله‌ی] عده‌ی مفروض مالهای مکعب BD است - مساویست با مکعب مستطیلی که قاعده‌اش مربع BD و ارتفاعش S است، و مساوی عدد مفروض میباشد. پس مکعب BD با [جمله‌ی] عده‌ی مفروض مالهای آن مساویست با عدد مفروض بعلاوه‌ی [جمله‌ی] عده‌ی مفروض اضلاع آن مکعب، و هوالمطلوب. و معلومست که درین حالت مکعب BD بعلاوه‌ی عدد مفروض مساویست با مجموع [جمله‌ی] عده‌ی مفروض مالهای آن و [جمله‌ی] عده‌ی مفروض اضلاع آن. پس [این حالت از] این صنف داخل در صنف سوم است که معادله‌ی مکعب و عدد با مالها و اضلاع باشد.

و [ثالثاً] اگر S بزرگتر از BC باشد، AB را مساوی S قرار می‌دهیم، و قطع دوم را بر نقطه‌ی C می‌گذرانیم چنانکه هر يك از اضلاع [قائم و مایل] آن مساوی AC باشد، و آن ناچار قطع دیگر را تلاقی می‌کند، و باز هم ضلع مکعب [مطلوب] BK است، و باقی عمل و برهان شبیه آنست که گذشت، الا اینکه نسبت مربع HK به مربع KA مثل نسبت AK به KC میباشد \star .

پس ثابت شد که این صنف حالات مختلف دارد، و یکی از حالات آن داخل

(۶) حالت دوم $S = BC$ (رجوع شود به ذیل † صفحه‌ی ۲۲۱).

حکم: $x = BD$.

برهان. از يك طرف $BD = b$. $BD^2 = \overline{BD}^2$ ، و از طرف دیگر

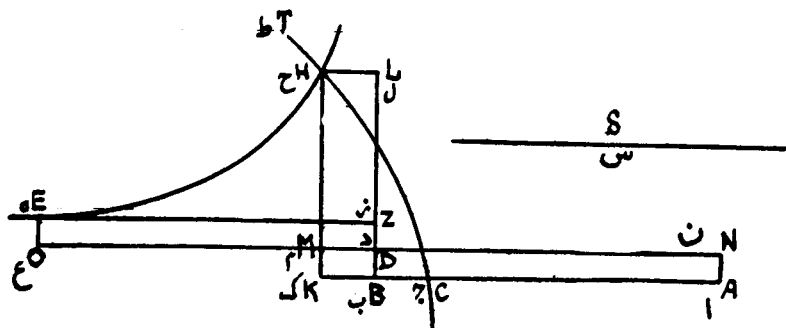
$$S = a \cdot \overline{BD}^2 \cdot BC = \overline{BD}^2 \cdot S = a$$

$$\overline{BD}^2 + \overline{BD}^2 \cdot BC = b \cdot BD + a.$$

فهوالمطلوب.

(۶) بعبارت دیگر، نقش نقاط A و C تعویض میشود.

صنف سوم است ، و هیچیک از مسائل آن ممنوع نیست * ، و به خواص دو قطع زاید حل شد .



[۵۰۹۰۴ -] صنف دوم از اصناف سه گانه‌ی چهارتائی که مانده بود اینست که مکعبی و اضلاع معادل مالها و عدد باشد † .

(۵) معادله‌ی $x^2 + cx^2 - bx - a = 0$ همیشه يك ریشه‌ی حقیقی و مثبت دارد ، و دو ریشه‌ی دیگرش منفی یا موهومی اند . حالائی که خیام تشخیص می دهد مطابقت با $a < bc$ و $a > bc$ و $a = bc$

$$x^2 + bx = cx^2 + a \quad (\dagger)$$

فرض کنیم $\overline{BD}^2 = b$ ، $\overline{BC} = c$ ، $\overline{BD}^2 \cdot S = a$. بر حسب اینکه $S < BC$ یا $S = BC$ یا $S > BC$ ، خیام سه حالت تشخیص میدهد .

حالت اول : $S < BC$. قطعه‌ی AB را مساوی S جدا میکنیم ، و نیمدایره‌ای بقطر AC و هذلولی متساوی القطرینی با مجانبهای DB و DZ و مار بر A میکشیم .

بموجب خاصیت هذلولی $AD = KD$ ؛ پس $AD - MZ + AK = KD - MZ + AK$ ، یا $BK = AL$. بالنتیجه

$$\overline{KE}^2 : \overline{EA}^2 = \overline{LE}^2 : \overline{BE}^2 = \overline{BD}^2 : \overline{BE}^2 ,$$

و بموجب خواص دایره $\overline{KE}^2 : \overline{EA}^2 = \overline{EC} : \overline{EA}$ ؛ پس بترتیب :

$$\overline{BD}^2 \cdot \overline{EA} = \overline{BE}^2 \cdot \overline{EC} ,$$

$$\overline{BE}^2 + \overline{BD}^2 \cdot \overline{EA} = \overline{BE}^2 + \overline{BE}^2 \cdot \overline{EC} = \overline{BE}^2 \cdot \overline{BC} ,$$

$$\overline{BE}^2 + \overline{BD}^2 \cdot \overline{BE} = \overline{BC} \cdot \overline{BE}^2 + \overline{BD}^2 \cdot \overline{AB} ,$$

$$\overline{BE}^2 + b \cdot \overline{BE} = c \cdot \overline{BE}^2 + a .$$

پس $X = \overline{BE}$. اثبات دو حالت دیگر در ذیل صفحات ۲۲۷ و ۲۲۸ آمده است .

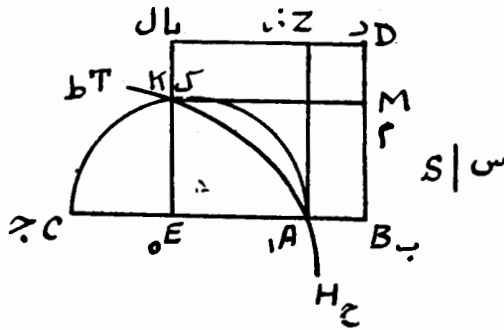
معادلات قطوعی که در حل معادله بکار رفته عبارتست از

$$xy = \sqrt{b} \left(x - \frac{a}{q}\right) ,$$

$$y^2 = \left(x - \frac{a}{b}\right)(c - x) .$$

BC را مساوی عده‌ی مفروض اموال و BD را ضلع مربعی مساوی عده‌ی اضلاع و عمود بر BC قرار می‌دهیم، و مکعب مستطیلی مساوی عدد مفروض می‌سازیم که قاعده‌اش مربع BD باشد، و فرض می‌کنیم ارتفاعش S باشد. پس S یا کوتاهتر از BC است، یا مساوی آن، و یا بلندتر از آن.

اولا فرض می‌کنیم کوتاهتر از آن باشد، و از BC [طول] BA را مساوی S جدا می‌کنیم، و AD را تمام می‌کنیم، و بر قطر AC دایره‌ی AKC را می‌کشیم.



پس وضع این دایره معلومست. سپس بر نقطه‌ی A قطع زایدی مرور می‌دهیم که خطوط BD و DZ آنرا قطع نکنند، و آن قطع HAT و وضعش معلومست. و چون خط HAT از A مماس است قطع می‌کند، دایره را نیز قطع می‌کند، چو اگر بین آنها [، یعنی بین دایره و مماس AZ]، واقع شود، چنانکه آپولونیوس در شکل ششم مقاله‌ی دوم [کتاب مخروطات] ثابت کرده است، خواهیم توانست که از نقطه‌ی A خطی مماس بر قطع بکشیم. درین صورت، این خط [مماس] یا بین AZ و دایره واقع میشود، و این ممتنع است، و یا خارج AZ قرار می‌گیرد، و درین حال AZ خط مستقیمی خواهد بود واقع بین قطع و این خط مماس، و این نیز ممتنع است. پس قطع TAH بین دایره و AZ واقع نتواند بود، و بالنتیجه آنرا قطع می‌کند. و ناچار آنرا در نقطه‌ی دیگری [نیز] قطع میکند. فرض کنیم آنرا در K قطع کند. پس وضع K معلومست، و چون از آن عمودهای KM و KE را بر BC و BD بکشیم،

چنانکه دانستی، وضع و مقدار این دو عمود معلوم خواهد بود. و چون مستطیل KD را تمام کنیم، سطح AD مساوی سطح KD خواهد بود، و اگر MZ را از هر دو اسقاط کنیم، و AK را بیفزائیم، BK مساوی AL در می آید، و بالنتیجه، اضلاع آنها متکافی اند، و همچنین است مربعات اضلاع آنها. لکن نسبت مربع KE به مربع EA مثل نسبت EC به EA است. پس نسبت مربع BD به مربع BE مثل نسبت EC است. بنا برین، مکعب مستطیلی که قاعده اش مربع HD و ارتفاعش EA است مساوی مکعب مستطیلی است که قاعده اش مربع BE و ارتفاعش EC است. و چون مکعب BE را به هر دو بیفزائیم، مکعب مستطیلی که قاعده اش مربع BE و ارتفاعش BC است مساوی میشود با مکعب BE و مکعب مستطیلی که قاعده اش مربع BD و ارتفاعش EA است. اما مکعب مستطیل اول مساوی است با [جمله‌ی] عدوی مفروض مالهای مکعب BE. حال مکعب مستطیلی را که قاعده اش مربع BD و ارتفاعش BA است، و آنرا مساوی عدد مفروض ساختیم، به هر دو می افزائیم. پس مکعب BE بعلاوه‌ی مکعب مستطیلی که قاعده اش مربع BD و ارتفاعش BE است، و مساوی [جمله‌ی] عدوی مفروض اضلاع مکعب میباشد، برابر [جمله‌ی] عدوی مفروض اموال مکعب بعلاوه‌ی عدد مفروض خواهد بود، و هوالمطلوب.

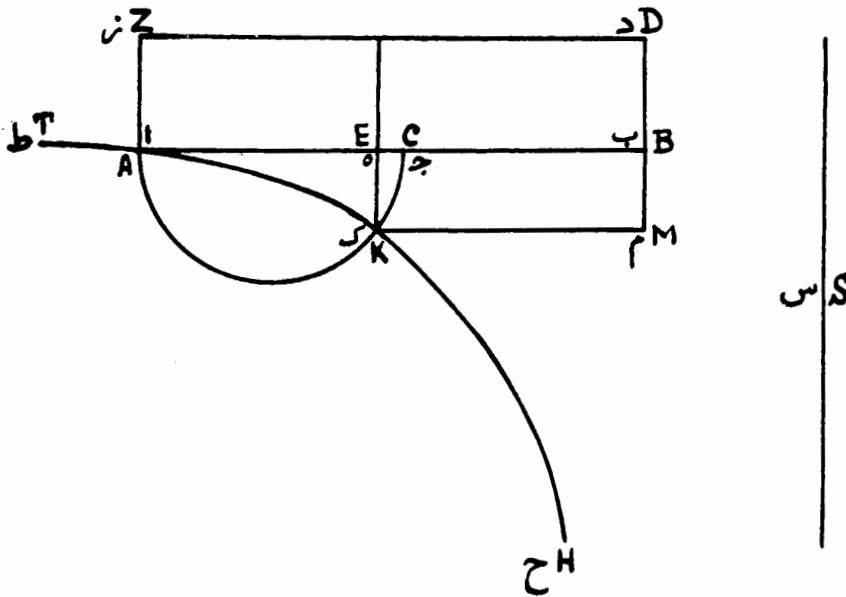
و ثانیاً اگر S مساوی BC باشد ^{*}، BC خود ضلع مکعب مطلوب است. برهانش اینکه مکعب BC مساوی [جمله‌ی] عدوی مفروض مالها است. و مکعب مستطیلی که ارتفاعش BC و قاعده اش مربع BD است مساوی عدد مفروض است، و همین مکعب مستطیل مساوی [جمله‌ی] عدوی مفروض اضلاع مکعب BC نیز هست. پس مکعب BC بعلاوه‌ی [جمله‌ی] عدوی مفروض اضلاع آن مساویست با [جمله‌ی]

(۵) حالت دوم: (رجوع شود به ذیل صفحه‌ی ۲۲۵). گوئیم اگر $X = BC$ ، $S = BC$

زیرا از يك طرف $\overline{BC}^2 = BC \cdot BC^2 = c \cdot \overline{BC}^2$ ، و از طرف دیگر $\overline{BC}^2 = BC \cdot \overline{BD}^2 = \overline{BD}^2 \cdot BC$ و یا $b \cdot BC = a$ پس $c \cdot \overline{BC}^2 + a \cdot BC = \overline{BC}^3 + b \cdot BC$. ضمناً بموجب تساویهای مذکور $c \cdot \overline{BC}^2 + a = \overline{BC}^3 + b$ ، و این معادله تعلق به صنف سوم (§ ۵۰۹۰۴) دارد.

عده‌ی مفروض مالهای آن با عدد مفروض [فهوالمطلوب] . و این حالت نیز داخل، صنف سوم است، زیرا [جمله‌ی] عده‌ی مفروض اضلاع مکعب BC مساوی عدد مفروض است. پس مکعب BC بعلاوه‌ی عدد مفروض مساوی است با [جمله‌ی] عده‌ی مفروض مالهای آن با [جمله‌ی] عده‌ی مفروض اضلاع آن.

و [ثالثاً^{۱۰۲}] اگر S بلندتر از BC باشد، BA را مساوی S قرار می‌دهیم، و دایره‌ای



(۱۰) حالت سوم (جوع شود به ذیل صفحه ۲۲۵). فرض کنیم $S > BC$. طول AB را مساوی S جدا کرده قطع را می‌سازیم. در هذلولی $AD = KD$ ، و لهذا $EZ = EM$. پس

$$\overline{KE}^2 : \overline{EA}^2 = \overline{BD}^2 : \overline{BE}^2 .$$

در دایره

$$\overline{KE}^2 : \overline{EA}^2 = EC : EA .$$

پس بترتیب :

$$\begin{aligned} \overline{BE}^2 \cdot EC &= \overline{BD}^2 \cdot EA , \\ \overline{BE}^2 &= \overline{BD}^2 \cdot EA + \overline{BE}^2 \cdot BC , \\ \overline{BE}^2 + \overline{BD}^2 \cdot BE &= \overline{BD}^2 \cdot AB + BC \cdot \overline{BE}^2 , \\ \overline{BE}^2 + b \cdot BE &= a + c \cdot \overline{BE}^2 . \end{aligned}$$

فهوالمطلوب .

بقطر AC می کشیم. قطع [زاید] مار بر A، چنانکه ثابت کردیم، دایره را در K قطع میکند. سپس، چنانکه در شکل سابق عمل کردیم، از نقطه‌ی K عمودهای KE و KM را اخراج می کنیم. درین صورت، EB ضلع مکعب [مطلوب] است، و برهان این مطلب مانند آنست که گذشت: چون مستطیل مشترك ED را اسقاط کنیم، اضلاع EM و EZ متکافی خواهند بود، و مربعات آنها نیز چنین است. پس برهان این حالت، بعینه و بدون هیچ تفاوتی، مانند آنست که گذشت.

پس معلوم شد که این صنف حالات و انواع مختلف دارد، و یکی از انواع آن داخل در صنف سوم است، و هیچیک از مسائل آن غیر ممکن نیست^۵، و بوسیله‌ی خواص دایره و قطع زاید حل شد.

[§ ۵۰۹۰۴-] صنف سوم از اصناف سه گانه‌ی چهارتائی که مانده بود اینست که مکعبی و عددی مساوی اضلاع و مالها باشد^۶.

(۵) معادله‌ی $x^3 - cx^2 + bx - a = 0$ همیشه يك ریشه‌ی حقیقی و مثبت دارد. در حالات دوم و سوم ($a/b > c$)، دو ریشه‌ی دیگر موهومی‌اند. ولی در حالت اول ($a/b < c$) ممکن است هر سه ریشه حقیقی و مثبت باشند، و متأسفانه این مطلب مهم از نظر خیام پنهان مانده است (رجوع شود به § ۴۰۳۰۴۰۵).

$$x^3 + a = cx^2 + bx \quad (\dagger)$$

فرض کنیم $BC = c$ ، $\overline{BD}^2 = b$ ، $S = a$ ، $\overline{BD}^2 = b$ ، $BC = c$ ، بر حسب اینکه $S < BC$ یا $S = BC$ یا $S > BC$ سه حالت تشخیص می‌دهیم.

حالت اول: $S < BC$. طول AB را مساوی S جدا می‌کنیم، و دو هذلولی متساوی القطرین می‌سازیم، یکی (HAT) با مجانبهای BD و DZ و مار بر A، و دیگری (KCL) با رأس C و محور کانونی CE و ضلع قائم AC.

حکم: $x = BE$

برهان. در هذلولی اول $DA = DM$ ، پس $DA - ZN + AM = DM - ZN + AM$ ، یا $NE = ZE$ بنا بر این،

$$\overline{ME}^2 : \overline{EA}^2 = \overline{DB}^2 : \overline{BE}^2 .$$

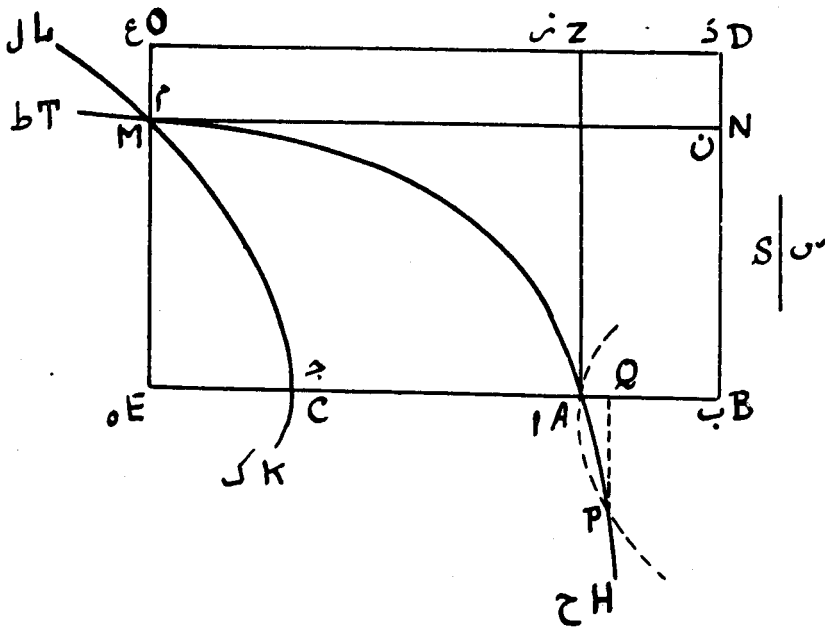
در هذلولی دوم $\overline{ME}^2 : \overline{EA}^2 = CE : EA$ ، پس بترتیب

$$\overline{BE}^2 : CE = \overline{BD}^2 : EA ,$$

بقیه در ذیل صفحه‌ی بعد

BC را عدوی اموال و BD را ، که بر آن عمود است ، ضلع مربعی مساوی عدوی جذرها میگیریم ؛ و مکعب مستطیلی می‌سازیم که قاعده‌اش مربع BD باشد ، و با عدد مفروض مساوی باشد ، و فرض می‌کنیم ارتفاع آن S باشد . پس خط S یا کوتاهتر از BC است ، یا مساوی آن ، و یا بزرگتر از آن .

اولا فرض می‌کنیم کوتاهتر از آن باشد ، و از BC [قطعه‌ی] BA را مساوی S جدا می‌کنیم و BZ را تمام می‌کنیم ، و بر نقطه‌ی A قطع زایدی می‌کشیم که BD



و DZ آنرا تلافی نکنند ، و آن قطع HAT است . و قطع زاید دیگری می‌کشیم که

بقیه‌ی ذیل صفحه‌ی قبل

$$\overline{BE}^y \cdot BC + \overline{BE}^y \cdot CE (= \overline{BE}^r) = \overline{BE}^y \cdot BC + \overline{BD}^y \cdot EA ,$$

$$\overline{BE}^r + \overline{BD}^y \cdot AB = \overline{BE}^y \cdot BC + \overline{BD}^y \cdot BE ,$$

$$\overline{BE}^r + a = c \cdot \overline{BE}^y + b \cdot BE .$$

فهوالمطلوب .

معادلات قطوع مذکور $xy = \sqrt{b} \left(x - \frac{a}{b}\right)$ و $y^2 = \left(x - \frac{a}{b}\right) (x - c)$ است .

برای سایر حالات به ذیل صفحات ۲۳۱ و ۲۳۲ رجوع شود .

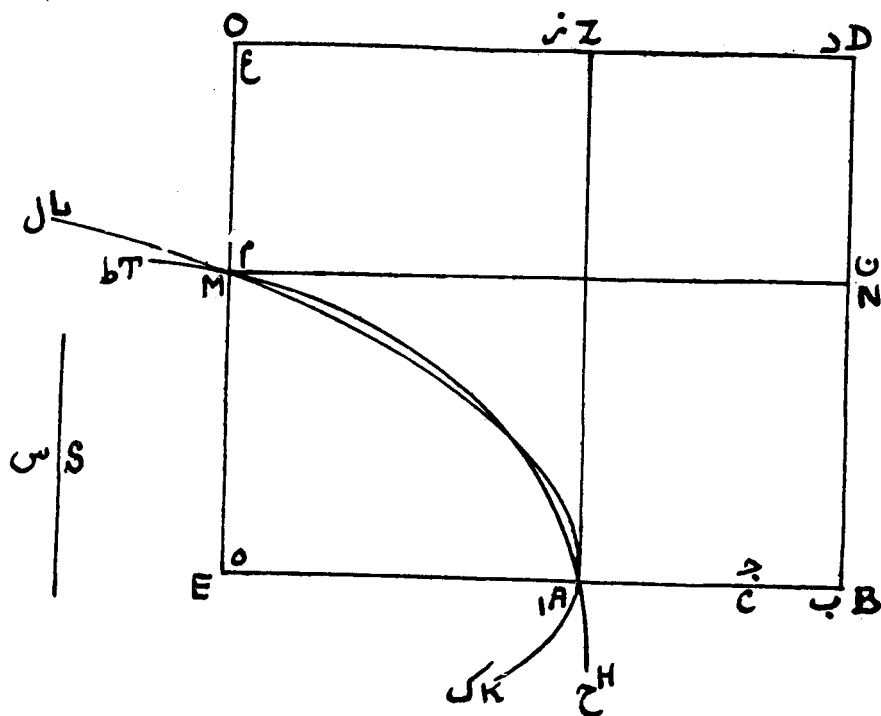
رأسش نقطه‌ی C و سهمش بر استقامت BC باشد، و هر يك از اضلاع قائم و مایل آن مساوی AC باشد، و آن KCL است، و ناچار قطع دیگر را تلافی می‌کند. فرض کنیم قطع KCL و قطع HAT در نقطه‌ی M تقاطع کنند. پس وضع نقطه‌ی M معلومست - زیرا وضع قطع‌ها معلوم می‌باشد - و چون ازین نقطه عمودهای MN و EMO را بکشیم، وضع و مقدار این دو معلوم خواهد بود. پس سطح DA مساوی سطح DM است، و چنانکه چندین بار ثابت کردیم، NE مساوی ZE می‌باشد، و بالنتیجه اضلاع آنها متکافی‌اند، و همچنین است مربعات اضلاع آنها. اما، باقتضای قطع KCL، نسبت مربع ME به مربع EA مثل نسبت CE به EA است. پس نسبت مربع BD به مربع BE مثل نسبت CE به EA می‌باشد. بنابراین، مکعب مستطیلی که قاعده‌اش مربع BD و ارتفاعش EA است مساویست با مکعب مستطیلی که قاعده‌اش مربع BE و ارتفاعش CE است. و چون مکعب مستطیلی را که قاعده‌اش مربع BE و ارتفاعش BC است، و مساوی [جمله‌ی] عده‌ی مالهای مکعب BE است، به آنها بیفزائیم، مکعب BE مساوی [جمله‌ی] عده‌ی مفروض مالهای آن بعلاوه‌ی مکعب مستطیلی که قاعده‌اش مربع BD و ارتفاعش EA است خواهد بود. اینک مکعب مستطیلی را که ارتفاعش BA و قاعده‌اش مربع BD است، و آنرا مساوی عدد مفروض ساختیم، بهر دو اضافه می‌کنیم. نتیجه می‌شود که مکعب مستطیلی که قاعده‌اش مربع BD و ارتفاعش BE است - و مساوی [جمله‌ی] عده‌ی مفروض اضلاع مکعب BE می‌باشد - بعلاوه‌ی [جمله‌ی] عده‌ی مفروض مالهای مکعب BE مساویست با مکعب BE بعلاوه‌ی عدد مفروض [، فهوالمطلوب].

و [ثانیاً] اگر S مساوی BC باشد ^۵، BC خود ضلع مکعب [مطلوب] است.

(۵) حالت دوم: $S = BC$ (رجوع شود به ذیل صفحه‌ی ۲۲۹). گوئیم $x = BC$. زیرا از يك طرف $\overline{BC}^2 = c \cdot \overline{BC}^2 = BC \cdot \overline{BC}^2$ ، و از طرف دیگر $BC \cdot \overline{BD}^2 = S \cdot \overline{BD}^2$ ، یا $a = b \cdot BC$ پس $BC^2 + a = c \cdot BC^2 + b \cdot BC$ ، و هوالمطلوب. ضمناً $a + \overline{BC}^2 = c \cdot \overline{BC}^2 + b \cdot BC$ ، و این معادله تعلق به صنف دوم (§۵۰۹۰۳) دارد. باید دانست که در این حالت $\overline{BD}^2 + b = a + c \cdot \overline{BD}^2$ ، و لهذا BD نیز جواب معادله است، ولی این جواب از نظر خیام پنهان مانده است.

برهانش آنکه مکعب BC مساوی [جمله‌ی] عدوی مفروض اموال آن است، و عدد مفروض مساوی [جمله‌ی] عدوی مفروض اضلاع مکعب BC می‌باشد. پس مکعب BC با عدد مفروض مساویست با [جمله‌ی] عدوی مفروض مالهای آن با [جمله‌ی] عدوی مفروض اضلاع آن، و مقصود همین بود. و [درین حالت] مکعب BC بعلاوه‌ی [جمله‌ی] عدوی مفروض اضلاع آن با [جمله‌ی] عدوی مفروض مالهای آن بعلاوه‌ی عدد مفروض نیز مساویست. پس این حالت داخل صنف دوم است.

و [ثالثاً] اگر S بلندتر از BC باشد \circledast ، BA را مساوی S قرار می‌دهیم و مستطیل را تمام می‌کنیم، و قطع اول را بر A و دومی را نیز بر A مرور می‌دهیم، و



\circledast حالت سوم: $S > BC$ (رجوع شود به ذیل صفحه‌ی ۲۲۹). AB را مساوی S

جدا رده هذلولی HAT را مانند حالت اول وهذلولی KML را برآس A و محورکانونی AE و ضلع قائم AC میسازیم، و مانند همان حالت استدلال می‌کنیم.

این دو قطع تقاطع می‌کنند. پس اگر دگر باز تلاقی کنند - خواه در يك نقطه مماس شوند و یا در دو نقطه تقاطع کنند، چنانکه از مقاله‌ی چهارم کتاب مخروطات معلوم است - مسئله ممکن است، و الا ممتنع می‌باشد. و اگر تقاطع کنند، چون از نقاط تقاطع دو عمود بکشیم، این دو عمود دو ضلع برای دو مکعب [که هر يك جواب معادله‌ی مورد بحث است] جدا می‌سازند. و برهان آن، بدون هیچ تفاوتی، مانند آنست که گذشت.

پس معلوم شد که این صنف حالات مختلف دارد، و بعضی از آنها ممتنع است [☆]، و بوسیله‌ی خواص دو قطع زاید حل شد.

[§ ۵۰۹۰۵ تبصره -] و معلوم شد که این سه صنف چهارتائی متداخل اند، یعنی اولی را حالتی است که عیناً از حالات صنف دوم است، و حالتی از دومی هست که حالتی از صنف سوم می‌باشد، و حالتی از سومی هست که بعینه حالتی از دومی است - چنانکه توضیح دادیم.

[§ ۵۰۱۰ § معادلات کسری]

[§ ۵۰۱۰۰۱ مقدمه -] چون اصناف نیست و پنجگانه از مقدمات جبر و مقابله را به انجام رسانیدیم، و آنچه را گفتنی بود بتمامی گفتیم، و حالات هر صنف از آنها را بدست آوردیم، و درمسائل اصنافی که امتناع در آنها پیش می‌آید، قانونی برای باز شناختن آنچه ممکن است از آنچه ممتنع است بدست دادیم، و معلوم

(☆) معادله‌ی مفروض بصورت $x^2 - cx^2 - bx + a = 0$ است. درحالت اول ($a < bc$)

معادله همواره دو ریشه‌ی مثبت دارد. بازاء $a < bc$ ، خیام فقط یکی از ریشه‌ها را بدست می‌آورد (ریشه‌ی دیگر از تقاطع هذلولی HAT با شاخه‌ی دیگر هذلولی KCL بدست می‌آید). بازاء $a = bc$ ریشه‌ی مثبت دیگر معادله $x = \sqrt{b}$ یا $x = BD$ است. در حالت سوم ($a > bc$)، خیام گوید دو قطع مماس‌اند (ریشه‌ی مضاعف $x = \frac{1}{3}c + \frac{1}{3}\sqrt{3b + c^2}$)، یا متقاطعند (دو ریشه‌ی مثبت متفاوت)، و یا یکدیگر را قطع نمی‌کنند (« امتناع »). باید دانست که در هر حال معادله يك ریشه‌ی منفی دارد.

کردیم که اکثر آنها خالی از مسائل ممتنع است* ، اینک به اجزای این اصناف می پردازیم .

[جزء - § ۵۰۱۵۰۴] جزء † شیء عددی است که نسبت آن به واحد مثل نسبت واحد باین شیء باشد . پس اگر آن چیز سه باشد جزئش يك سوم است ، و اگر آن چیز يك سوم باشد جزئش سه است ، و نیز اگر چهار باشد جزئش يك چهارم است ، و اگر يك چهارم باشد جزئش چهار است . و بطور کلی ، جزء هر عدد جزئی است که از آن نام می گیرد †† ، مانند يك سوم از سه (اگر عدد صحیح باشد) و سه از يك سوم (اگر عدد کسری باشد) . و نیز جزء مال جزئی است که از عدد مساوی این مال نام می گیرد ، خواه این عدد صحیح باشد یا کسری ، و همچنین است در مورد کعب . و برای اینکه این مطلب محسوس تر باشد این اجزاء را در جدولی قرار می دهیم :

جزء کعب	جزء مال	جزء جذر
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
واحد	جذر	کعب
۱	۲	۸

(۵) از ۲۵ صنف مذکور ، که در § ۴۰۳۰۴۰۲ (ص ۱۴۵ - ۱۴۶) طبقه بندی شده ، فقط معادلات ۸ ، ۱۱ ، ۱۴ ، ۱۷ ، ۲۰ ، ۲۱ ، و ۲۵ ممکن است جواب حقیقی و مثبت نداشته باشند ، و در این صورت ، بزعم خیام ، این معادلات ممتنع خواهند بود .
(†) آنچه خیام « جزء a » میخواند همان $1/a$ است که امروز « عکس a » نامیده میشود .
‡ جزء a ، یعنی n/a .

گرخی در کتاب فخری (§ ۳۰۴۰۵۰۷) در تعریف « جزء » باین معنی گوید : « جزء هر عدد چیزی است که چون در آن عدد ضرب شود واحد حاصل گردد » .

نیز باید دانست که در اصطلاح ریاضیون قدیم ، هر گاه مقداری بدفعات صحیح در مقداری دیگر بگنجد ، یا عدد صحیحی عدد صحیح دیگر را عاد کند ، مقداریا عدد کوچکتر جزء دیگری خوانده میشود . (مثلا رجوع شود به تحریر اقلیدس ، ص ۷۱ و ۹۹ . نیز به هیث ، سیزده مقاله ، جلد ۲ ، ص ۱۱۵ و ۲۸۰) .

(††) این تعبیر از یونانیان گرفته شده است . مثلا رجوع شود به صفحه‌ی ۳ از کتاب پول ور اک ، مذکور در ذیل صفحه‌ی ۸۲ از کتاب حاضر .

[§ ۵۰۱۰۰۳ مراتب هفتگانه-] پس نسبت جزء کعب به جزء مال مثل نسبت جزء مال به جزء جذر و مثل نسبت جزء جذر به واحد و مثل نسبت واحد به جذر و مثل نسبت جذر به مال و مثل نسبت مال به کعب است. پس این مراتب هفت مرتبه‌اند متوالیاً بريك نسبت \ast . و ما فقط در معادلات بين این مراتب صحبت خواهیم داشت. و اما جزء مال مال و جزء مال کعب و جزء کعب کعب و مراتب بعد، تا هر جا پیش رود، نیر متوالیاً متناسب اند، ولی ما را حاجت بذکر آنها نیست، زیرا راهی به استنباط [جواب معادلات مشتمل بر] آنها نداریم.

[§ ۵۰۱۰۰۴ معادلات بین اجزاء-] و بدانکه اگر يك هشتم را که جزء کعب است کعب انگاری، جزء آن هشت خواهد بود که آن، بالعکس، همان کعب است \dagger ، و سایر جزء‌ها را باید بر همین قیاس کنی. پس این چهار مرتبه - جزء کعب و جزء مال و جزء جذر و واحد - در حکم کعب و مال و جذر و واحد است. مثلاً اگر گفته شود که جزء مال معادل نصف جزء جذر است $\dagger\dagger$ چنان باشد که گفته شود مالی معادل نصف جذر است؛ پس مال يك چهارم است، و آن جزء مال [مطلوب] است، و بالنتیجه، مال مطلوب چهار می‌باشد، و جزء آن يك چهارم و جزء جذرش يك دوم است. و در مفردات باید به همین قیاس عمل کرد.

و اما در معادلات مرکب. اگر گفته شود جزء مال و دو جزء جذر معادل يك و

(\ast) مراتب هفتگانه‌ی مذکور عبارتند از

$$۱) x^3 \quad ۲) x^2 \quad ۳) x \quad ۴) ۱ \quad ۵) 1/x \quad ۶) 1/x^2 \quad ۷) 1/x^3,$$

و این مراتب متناسبند:

$$\frac{1}{x^3} : \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2} : \frac{1}{x} = \frac{1}{x} : ۱ = ۱ : x = x : x^2 = x^2 : x^3.$$

(\dagger) مقصود اینست که اگر $1/x^3$ را مثلاً z^3 بگیریم، جزء z^3 (یعنی $1/z^3$) همان

x^3 خواهد بود.

($\dagger\dagger$) یعنی $1/x^2 = \frac{1}{2} (1/x)$. این معادله، بازاء $z = 1/x$ ، بصورت $z^2 = \frac{1}{2} z$ در

می‌آید، و از این نتیجه می‌شود $z^2 = 1/4$ پس $x^2 = 4$ و $1/x = 1/2$ و $1/x^2 = 1/4$.

يك چهارم است [☆] ، چنان باشد که گفته شود مالی و دو جذر معادل يك و يك چهارم است . پس بطریقی که ثابت کردیم ، جذر را يك دوم و مال را يك چهارم بدست می آوریم ، منتهی در مسئله جزء مال و جزء جذر گفته شده . پس يك چهارم که مال اول است جزء مال مطلوب می باشد . پس مال مطلوب چهار است .

و در معادلات چهارتائی نیز طریق عمل همین است . [مثلاً] اگر گفته شود جزء كعب و سه جزء مال و پنج جزء جذر معادل سه و سه هشتم است [☆] ، چنان باشد که گویند كعبی و سه مال و پنج جذر معادل سه و سه هشتم است . پس بطریقی که بوسیله‌ی قطوع مخروطی بیان کردیم ضلع مكعب را تعیین می کنیم ، و آن جزء جذر مطلوب است . پس نسبت آنرا به واحد مفروض مساوی نسبت این واحد مفروض به خطی دیگر قرار می دهیم ، و این خط همان ضلع مكعب مطلوب است .

پس معلوم شد که بیست و پنج صنف دیگر از اینگونه معادلات بین این چهار مرتبه هست که [هر يك] با [یکی از] بیست و پنج صنف سابق الذکر متناسب است [†] .

[§۵۰۱۰۰۵ تبصره -] اما ضرب بعضی از این مراتب [هفتگانه] در برخی معلوم و از کتابهای علمای جبر آشکار است ، و خواننده می تواند در آن بیندیشد ، و ما سخن را به ذکر آن دراز نمی کنیم ^{††} .

[§۵۰۱۰۰۶ حل معادلات مراتب هفتگانه -] و اما معادلات بین این چهار

$$z = 1/2 \text{ را حل می کنیم: } 1/x^2 + 2/x = 1/4 \text{ معادله‌ی } z^2 + 2z = 1/4 \text{ (۵)}$$

$$\text{و } z^2 = 1/4 \text{ پس } x^2 = 4$$

$$z^2 + 3z^2 + 5z = 3 \frac{7}{8} \text{ معادله‌ی } 1/x^2 + 3/x^2 + 5/x = 3 \frac{7}{8} \text{ (۵۵)}$$

را حل می کنیم . اگر $\frac{7}{8}$ ریشه‌ای ازین معادله باشد ، طول l که از $1 : 1 = 1 : 1$ استخراج شود جواب معادله‌ی اولیه است .

([†]) یعنی ۲۵ صنف حاصل از تبدیل x به $1/x$ در ۲۵ صنف سابق الذکر (۴۰۳۰۴۰۲) .

(^{††}) این یادآوری مقدمه‌ایست برای حل معادلات هفتگانه ، که در آنها حاجت به ضرب قوای

مجهول در یکدیگر پیش می آید .

[مرتبه] و چهار [مرتبه‌ی] سابق الذکر چنانست که اینک به شرح آن می‌پردازیم .
 [۵۰۱۵۰۶۰۱ § مفردات - مثال اول -] اگر گفته شود کعبی معادل ده جزء کعب است - یعنی معادل ده جزء خودش است - گوئیم کعب اولین مرتبه از مراتب هفتگانه [⊙] است ، و اجزای کعب هفتمین آنها است . پس آنها را در یکدیگر ضرب کن ، و جذر حاصل ضرب را بگیر . آنچه بدست آید مرتبه‌ی وسطی (یعنی چهارم) است ^{⊙⊙} ، و همان کعب مطلوب می‌باشد [†] . و تفصیل مطلب اینکه هر عددی چون در جزء خود که از آن نام گرفته ضرب شود واحد حاصل شود ، و اگر در دو جزء خود ضرب شود دو حاصل گردد ، و اگر در ده جزء خود ضرب شود ده عدد بدست آید ^{††} . پس در مسئله‌ی مورد بحث چنانست که گفته شده باشد کدام کعب است که چون در مثل خودش ضرب شود ده حاصل گردد . پس جذر ده همان کعب مطلوب است ، و سپس ، استخراج ضلع این مکعب بطریقی که بوسیله‌ی قطوع مخروطی بیان کردیم بعمل می‌آید .

[مثال دوم -] و نیز اگر گفته شود کدام مال است که معادل شانزده جزء از اجزای خود که از آن نام گرفته است باشد ^x ، واحد را در شانزده ضرب کن و جذر حاصل را بگیر ، و آن چهار است ، و همین چهار مال مطلوب می‌باشد . زیرا ، بقیاس آنچه گذشت ، [این مسئله] در حکم اینست که گفته شود کدام مال است که چون در مثل خودش ضرب شود شانزده حاصل گردد .

[مثال سوم -] و نیز اگر گفته شود کدام جذر است که معادل چهار جزئش باشد ^{xx} ، چنانست که گفته شود کدام عدد است که چون در مثل خود ضرب شود چهار

(۵) رجوع شود به ذیل § ۵۰۱۵۰۳

(۵۵) مرتبه‌ی وسطی ، یا مرتبه‌ی چهارم ، عدد است .

(†) معادله‌ی مورد بحث $x^3 = 10/x^3$ است . استدلال خیام ، که بلافاصله بعد توضیح

میدهد اینست که $10 = (10/x^3) \cdot x^3 = x^3 \cdot x^3$ ، و بالنتیجه $x^3 = \sqrt[3]{10}$.

(††) یعنی بطور کلی $a \cdot x^n = (a/x^n) \cdot x^n$.

(x) $x^2 = 16/x^2$ (x) $x = 4/x$ (xx)

حاصل گردد، و آن دو است.

[مثال چهارم - حالات لاینحل -] اما اگر گفته شود کدام مال است که معادل عددهای از اجزای مکعب ضلعش باشد \square ، حل آن به طرقتی که بیان کردیم ممکن نشود، چو حل این مسئله محتاج به درج چهار خط است بین دو خط که هر شش خط متوالیاً بر يك نسبت باشند $\square\square$ ، چنانکه ابوعلی ابن هیثم \dagger رحمه الله تعالی ثابت کرده است، منتهی این مطلب سخت دشوار است، و نمیشود آنرا به این کتابمان ملحق کنیم.

و همچنین است اگر گفته شود کدام مکعب است که معادل عددهای از جزءهای مال ضلعش باشد $\dagger\dagger$ ، این نیز محتاج مقدمه‌ی مذکور است، و لهذا حل آن بوسیله‌ی راههای ما ممکن نیست.

و بطور کلی، هر گاه مراتب اول و ششم از این هفت مرتبه در یکدیگر ضرب شود \times ، چنانکه ابوعلی ابن هیثم رحمه الله تعالی ثابت کرده است، احتیاج پیدا می‌شود به درج چهار خط بین دو خط بطوری که هر شش متوالیاً بر يك نسبت باشند. [مثال پنجم -] اما اگر گفته شود کدام مکعب معادل شانزده جزء ضلع آنست $\times\times$ ، مرتبه‌ی اول را در [مخرج] مرتبه‌ی پنجم ضرب می‌کنیم. جذر جذر

حل این معادله به معادله‌ی درجه‌ی پنجم $x^5 = a$ برمی‌گردد.

($\square\square$) اگر x و y و v و w چنان تعیین شود که

$$1 : x = x : y = y : v = v : w = w : a,$$

بآسانی معلوم توان کرد که $x^2 = a/x^3$.

$$x^2 = a/x^3 \quad (\dagger\dagger) \quad \S 3.4506 \quad (\dagger)$$

(\times) یعنی هر گاه عمل به ضرب «مراتب اول و ششم» (رجوع شود به ذیل § ۵۰۱۵۰۳)

منجر شود؛ و این درست نیست، زیرا مرتبه‌ی اول x^3 و مرتبه‌ی ششم $1/x^2$ است. ظاهراً مقصود خیام از عبارت مذکور اینست که عمل منجر شود به ضرب مرتبه‌ای در مخرج مرتبه‌ای که در مراتب هفتگانه (ذیل § ۵۰۱۵۰۳) نسبت به اولی ششمین است، و این شامل ضرب x^3 در مخرج $1/x^2$ (در معادله‌ی $x^2 = a/x^3$) و ضرب x^2 در مخرج $1/x^3$ (در معادله‌ی $x^2 = a/x^3$) می‌شود. مثال پنجم مذکور در متن شاهد صحت این توجیه است.

$$\times\times \quad x^2 = 16/x \quad \text{حل} \quad x^2 = (16/x) \cdot x = \sqrt[3]{16} \quad \text{با} \quad x^4 = 16 \quad \text{با} \quad x = \sqrt[3]{16}$$

حاصل همان ضلع مکعب مطلوب است. و در معادله‌ی هر يك از این مراتب هفتگانه با مرتبه‌ای که از آن، در تناسب متوالی، پنجمین است به همین قیاس عمل می‌شود. [۵۰۱۵۰۶۰۲ § معادلات مرکب - مثال اول] اما در مرکبات، مثلاً جنری معادل واحد و دو جزء جنر است ^۵. و آن در حکم اینست که مالی معادل جنر و دو باشد، زیرا این سه [مرتبه‌ی اخیر] با سه مرتبه‌ی مذکور متناسبند. پس آنرا [یعنی معادله‌ی اخیر را] بطریق مذکور حل می‌کنیم. مال مساوی چهار درمی‌آید، و آن معادل جنر خود با دو عدد است. پس جنر این [مال] همان مطلوب است، و جنر این مال دو است، و معادل واحد و دو جزء جنر این مال می‌باشد.

[مثال دوم -] و نیز اگر گفته شود مالی و دو جنر آن معادل واحد و دو جزء جنر است، در حکم اینست که کعب و دو مال معادل جنر و دو باشد. پس ضلع مکعب را چنانکه بیان کردیم بوسیله‌ی قطوع مخروطی استخراج می‌کنیم. و مربع این ضلع همان مال مطلوب است.

[مثال سوم -] و نیز اگر گفته شود که جنر و دو عدد و ده جزء جنر معادل بیست جزء مال است، در حکم اینست که کعب و دو مال و ده جزء معادل بیست عدد باشد. پس ضلع مکعب را از راه مخروطات استخراج می‌کنیم؛ و آن همان جنر مطلوب است.

[۵۰۱۵۰۶۰۳ § ملاحظات کلی در حل معادلات بین مراتب هفتگانه -] و بطور کلی [معادلات بین] چهار مرتبه‌ی متوالی از این مراتب هفتگانه در حکم اصناف بیست و پنجگانه‌ی مذکور است.

و اما اگر معادله‌ای پنج یا شش یا هفت مرتبه را فرا گیرد [†]، حل آن بهیچوجه

(۵) معادله‌ی $x = 1 + 2/x$ معادل $x^2 = x + 2$ است، زیرا:

$$x : x^2 = 1 : x = (2/x) : 2.$$

(†) لازم نیست که هر ۵ یا ۶ یا ۷ مرتبه در معادله موجود باشد. مثلاً، در مثال مذکور در متن، معادله‌ی مسئله $x^2 + 2x = 2 + 2/x^2$ است، که پنج مرتبه (از x^2 تا $2/x^2$) را فرا گرفته‌است، و به معادله‌ی درجه‌ی چهارم $x^4 + 2x^2 = 2x^2 + 2$ بر میگردد، که بقول خیام نمی‌توان آنرا حل کرد. در این باب به § ۳۰۷۰۳ رجوع کنید.

ممكن نیست. مثال آن اینست که گفته شود مالی و دو جذر معادل دو عدد و دو جزء مال است؛ و این مسئله را نمی‌توان حل کرد، زیرا مال از مرتبه‌ی دوم و جزء مال از مرتبه‌ی ششم است، و معادله پنج مرتبه را فرا می‌گیرد. و سایر حالات را بر همین قیاس کن.

[§ ۵۰۱۰۰۷ طبقه بندی معادلات کسری قابل حل -] پس جمیع اصناف معادلات مفرد بین این هفت مرتبه بیست و یک است، که دو صنف از آنها را نمی‌توان به راه ما حل کرد، بلکه در حل آنها حاجت به مقدمه‌ی ابن هیثم می‌افتد. پس نوزده صنف باقی می‌ماند که بطریق ما - بعضی به خواص دایره و برخی به خواص قطوع مخروطی - قابل حل است.

جملگی معادلات مرکب از سه مرتبه‌ی متوالی پانزده است، و به خواص دایره حل می‌شود.

کلیه‌ی معادلات مرکب از سه مرتبه که چهار مرتبه‌ی متوالی را فرا گیرد بیست و چهار است، و بخواص قطوع حل می‌شود.

جملگی معادلات مرکب از چهار مرتبه از مراتب متوالی بیست و هشت است، و به خواص قطوع حل می‌شود.

پس کلیه‌ی اصناف معادلات واقع بین این هفت مرتبه که حل آنها به راههایی که بیان کردیم ممکن است هشتاد و شش می‌باشد، که از آنها فقط شش صنف[†] در کتابهای پیشینیان ذکر شده است. و هر کس در مقدمات مذکور در این رساله بدقت

(*) مقصود معادلات بین هفت مرتبه است. « قابل حل » بمعنی اصطلاحی خیام استعمال شده، یعنی بمعنی قابل حل بوسیله‌ی دایره یا سایر قطوع مخروطی. ولی تشخیص خیام در این باره خطا است زیرا پیش از او بعضی معادلات درجه‌ی چهارم بوسیله‌ی قطوع مخروطی حل شده است. رجوع شود به § ۳۰۷۰۳ و § ۵۰۱۰۰۶.

(**) یعنی بوسیله‌ی دایره و با سایر قطوع مخروطی.

(†) $a = x^2$ و $a = x^2 + bx$ و سه معادله‌ی صحیح درجه‌ی دوم.

اندیشیده باشد، و بعلاوه از استعداد طبیعی برخوردار و نیز در مسائل [ریاضی] کار آزموده باشد، هیچ چیز در مسائلی که بریشینیان سخت دشوار بود بروی پوشیده نماند.

و اینک وقت آنست که خدای تعالی را حمد گوئیم و جمیع پیغمبران وی را درود فرستیم و این رساله را ختم کنیم.

[۵۰۱۱ § نقد کارهای ابوالجود]

[۵۰۱۱۰۱ § ملاحظات کلی در باب کارهای ابوالجود در حل معادلات درجه‌ی سوم و مقایسه‌ی آنها با کارهای مؤلف این رساله -] در حدود پنج سال پس از تألیف این رساله، شخصی که اطلاعی بس اندک از هندسه داشت برای من نقل کرد که ابوالجود محمد ابن لیث عالم هندسه را، رحمه الله علیه، رساله‌ایست که در آن این اصناف را برشمرده و اکثر آنها را بوسیله‌ی قطوع مخروطی حل کرده، بی اینکه حالات این اصناف و تمیزحالات ممکن از ممتنع را بتامی آورده باشد، بلکه برطبق نتایجی که از مطالعه در مسائل خاص مربوط باین اصناف بآنها رسیده است. و این دور نیست، زیرا آن دو صنفی که گفتم از یکی از پیشینیان ماست منسوب بدوست؛ و شخص مذکور آنها را در مجموعه‌ی تصنیفات ابوالجود به خط حارزمی خوارزمی دیده بود.

و یکی از این دو صنف از معادلات سه‌تائی است، و آن اینست که مکعب و عدد معادل اموال باشد، و این معادله را حالاتی و حالات آنرا شرایطی است، چنانکه در این رساله مذکور شد. و اما ابوالجود شرایط آنرا بتامی نیاورده، و بعلاوه حکمی که در این صنف کرده نیز باطل است، و آن حکم اینست که اگر ضلع مکعبی که مساوی عدد است بزرگتر از نصف عده‌ی مالها باشد مسئله ممتنع است - و چنانکه توضیح دادیم چنین نیست - و این سخن باطل ناشی از این است که وی امکان تماس دو قطع یا تقاطع آنها را در این حالت آخر در نیافته است.

و دومی از معادلات چهارتایی است، و آن اینست که مکعب و عدد و اضلاع معادل مالها باشد، و شك نیست که وی این مسئله را، که جماعتی از علمای هندسه پس از کوشش بسیار از حلش عاجز شده بودند، نیکو حل کرد. اما مسئله‌ای که او حل کرد مسئله‌ی خاصی بود، و این صنف را حالات و شرایطی است، و بعضی از مسائل آن ممتنع می‌باشد، و وی حق این مطالب را بتمامی ادا نکرده است.

و من این سخن را فقط برای این گفتم که کسی که هر دو رساله بدستش می‌رسد - اگر آنچه در باب این مرد فاضل بمن گفته شده راست باشد - بتواند رساله‌ی حاضر را بارساله‌ی منسوب باین فاضل مقایسه کند. چو گمان می‌کنم که من از هیچ کوششی برای اینکه مطالب مورد بحث را بتمامی بیاورم فروگذار نکرده‌ام، و در عین حال کوشیده‌ام که به عهد خود وفا کنم، ولی از اطناب ملال انگیز احتراز جویم. و اگر می‌خواستم، برای هر يك از این اصناف و حالات آنها مثالی می‌آوردم. لکن ترسیدم که مطلب به درازا کشد، و باین جهت، سخن را به همین قوانین کلی کوتاه نمودم، و در این امر به فهم متعلم اعتماد کردم، زیرا هر کس قوه‌ی دراکتاش چنان باشد که مطالب این رساله در آن نقش بندد، در حل مسائل مخصوصی که بخواهد، و از برگردانیدن مسئله به صنفی که این مسئله حالت خاص آنست، در نمی‌ماند. و خداست که اسباب کامیابی را راست و درست گرداند، و در هر حال اعتماد بر اوست.

[§ ۵۰۱۱۰۲ توضیح خطای ابوالجود -] و بعد، یکی از دوستان ما

از ما خواست که خطای ابوالجود محمد ابن لیث را در صنف پنجم از اصناف ششگانه‌ی سه تایی که بوسیله‌ی قطوع حل می‌شود ثابت کنیم، و آن صنف اینست که مکعبی و عدد معادل مالها باشد. *

(۶) مقصود معادله‌ی $x^2 + a = cx^2$ است. فرض کنیم $AB = c$ و $\overline{BC}^2 = a$. چنانکه در § ۵۰۷۰۶ ثابت شد، شرط «امکان» معادله اینست که $BC < AB$ ($\sqrt{a} < c$)، و در این صورت بر حسب عظمت نسبی BC و $AB/2$ سه حالت اتفاق می‌افتد:

بقیه در ذیل صفحه‌ی بعد

ابوالجود گفته است که عده‌ی مالها را [مساوی] خط AB می‌گیریم ، و از آن ضلع مکعبی را که مساوی عدد است جدا می‌کنیم ، و آن BC است . پس خط BC

بقیه‌ی ذیل صفحه‌ی قبل

$$(I) BC = CA, \quad (II) BC > CA, \quad (III) BC < CA ;$$

یا بصورت جبری :

$$\sqrt[3]{a} = c/2, \quad \sqrt[3]{a} > c/2, \quad \sqrt[3]{a} < c/2 .$$

ابوالجود مربع $BCDE$ را تمام کرده ، هذلولی متساوی القطرینی با مجانبهای AB و BE و ماز بر D ، و سهمی برآس A و محور AB و ضلع قائم BC رسم میکند (اشکال صفحات ۲۴۴ و ۲۴۶ متن) [معادلات دو منحنی $xy = a^{2/3} (c-x)$ و $y^2 = a^{1/3} (c-x)$ است] . آنگاه ، بقول خیام ، ابوالجود گوید :

(الف) در حالت (I) دو قطع در D بریکدیگر مماس‌اند؛

(ب) در حالت (II) دو قطع نامتلاقی‌اند .

و مقصود از « خطای ابوالجود » ، که خیام در آغاز § ۵۰۱۱۰۲ از آن نام میبرد ، همین

دو حکم است .

توضیح مطلب از این قرار است :

حالت (I) : $BC = CA$ (شکل صفحه‌ی ۲۴۴ متن) . سهمی از D میگذرد (رجوع شود

به § ۵۰۷۰۶) ، ولی ، بشرحی که خیام توضیح میدهد ، دو منحنی در این نقطه برهم مماس نیستند .

حالت (II) : $BC > CA$ (شکل صفحه‌ی ۲۴۶ متن) . در این حالت ، خیام ، برای اثبات

خطای ابوالجود ، مثالی می‌آورد ، از این قرار :

فرض کنیم $AB = c = ۱۵$ و $ZB = x = ۶$. بموجب معادله ،

$$(۱) \quad a = cx^2 - x^3 = x^2 (c-x) = \overline{ZB}^2 \cdot ZA = ۱۴۴ = \overline{BC}^3 ,$$

و لهذا $BC > ۵$ (زیرا $۱۴۴ < ۱۲۵ = ۵^3$) ، و بالنتیجه $BC > CA$. پس مثال مذکور

داخل در حالت (II) است .

سپس خیام باثبات متقاطع بودن دو قطع می‌پردازد :

از (۱) نتیجه میشود :

$$(۲) \quad \overline{ZB}^2 : \overline{BC}^2 = BC : ZA .$$

از طرف دیگر ، اگر H محل تلاقی عمود ZH با هذلولی باشد ، بموجب خاصیت عمومی

هذلولی ، سطوح دو مستطیل HB و CE متساوی است ؛ پس

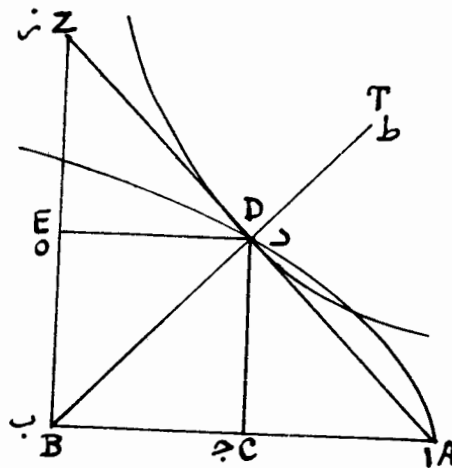
$$(۳) \quad \overline{ZB} : \overline{BC} = BC : \overline{ZH} ,$$

$$(۴) \quad \overline{ZB}^2 : \overline{BC}^2 = \overline{ZB} : \overline{ZH} .$$

از (۲) و (۴) نتیجه میشود ، $ZB : ZH = BC : ZA$ ، و به تبدیل ، $BZ : BC =$

بقیه در ذیل صفحه‌ی بعد

یا مساوی CA است، یا از آن بزرگتر است، و یا از آن کوچکتر است. سپس گوید که اگر CA مساوی BC باشد، مستطیل CE را تمام می‌کنیم و بر D قطع زایدی مرور می‌دهیم که AB و BE آنرا قطع نکنند، و قطع مکافی می‌کشیم که رأسش



نقطه‌ی A و سهمش AB وضع قائمش BC باشد. پس چنانکه ثابت کردیم، این قطع ناچار از نقطه‌ی D می‌گذرد. سپس گفته است که دو قطع در نقطه‌ی D بر یکدیگر مماس‌اند، و این خطا است، زیرا دو منحنی ناچارمقاطع‌اند.

برهان آن اینست. BZ را مساوی BA می‌گیریم، و AZ را وصل می‌کنیم. پس AZ ناچار از D می‌گذرد، و در داخل قطع مکافی است \odot ، و زاویه‌ی ADB قائمه

بقیه‌ی ذیل صفحه‌ی قبل

$ZH : ZA$. پس با توجه به (۳)،

$$(۵) \quad ZB : BC = BC : ZH = ZH : ZA,$$

و از آنجا

$$(۶) \quad ZH^2 = \overline{BC} \cdot \overline{ZA}.$$

بموجب (۶)، نقطه‌ی H بر سهمی واقعت، و لهذا، برخلاف حکم ابوالجود، دو قطع متلاقی‌اند.

نیز رجوع کنید به ذیل ص ۲۴۶-۲۴۸.

(۵) مقصود قسمت AD از آنست.

است، و زاویه ABD مساوی زاویه ZBD می‌باشد. و معلوم است که سهم قطع زاید زاویه محیطی قطع^(۶) را نصف می‌کند. پس لازمست که خط BDT سهم قطع زاید ما^۷ بر D باشد. اما خط AD موازی خطوط ترتیب [قطع زاید] است، و لهذا بر قطع زاید مماس است. پس لازم است که [قطع] [مکافی] قطع [قطع] را زاید را قطع کند، چون بین قطع زاید و خط مماس آن نتواند بود. زیرا اگر [قطع مکافی] بر این خط مماس باشد، خطوط مرسوم از D به هر نقطه‌ی دلخواهی که بر محیط [قطع مکافی] AD فرض شود بین قطع [مکافی] و خط مماس آن واقع می‌شود، و این ممتنع است. پس ناچار قطع مکافی قطع زاید را در نقطه‌ی دیگری بین A و D قطع می‌کند، و این همانست که می‌خواستیم ثابت کنیم. چنین است و جه خطای این دانشمند در آنجا که گفت دو قطع لازمست در D بر یکدیگر مماس باشند.

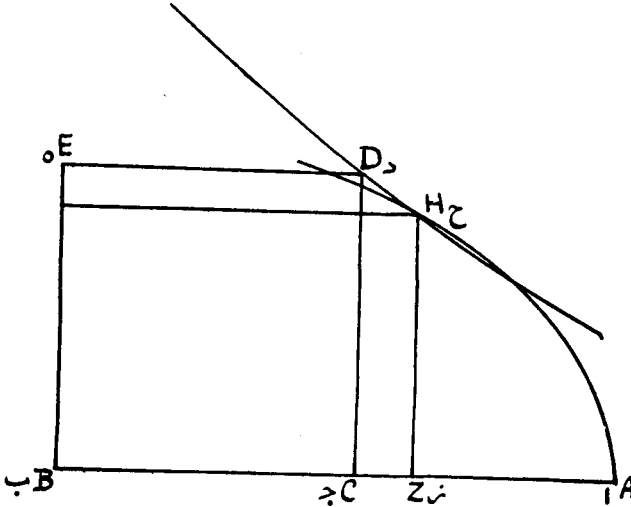
اما این گفته‌ی او: «اگر BC بلندتر از CA باشد مسئله ممتنع است، و این از آنست که دو قطع یکدیگر را تلاقی نمی‌کنند» سخنی است باطل، زیرا ممکن است دو قطع به حال تقاطع یا تماس، در یک نقطه یا دو نقطه‌ی بین A و D ، تلاقی کنند، چنانکه در آنجا ثابت کردیم. و این مطلب را برهانی است کلی تر از آنچه ذکر کردیم^(۷):

فرض کنیم عده‌ی مالها AB و ضلع مکعب BC و بزرگتر از نصف AB باشد؛ و CE را تمام می‌کنیم، و دو قطع را چنانکه دانستی میکشیم. و فرض میکنیم AB ده و ZB شش باشد. پس حاصل ضرب مربع ZB در ZA صد و چهل و چهار است، و آن عدد است، و ضلع آن [یعنی ضلع مکعب مساوی آن] BC است، و BC ناچار بزرگتر از پنج است، زیرا مکعب پنج صد و بیست و پنج می‌باشد. اما مکعب مستطیلی که قاعده‌اش مربع ZB و ارتفاعش ZA است مساوی مکعب BC است. پس قاعده‌های آنها با ارتفاعاتشان متکافی‌اند، یعنی نسبت مربع ZB به مربع BC مثل نسبت

(۶) مقصود زاویه‌ی دو مجانب است.

(۷) رجوع شود به ذیل صفحه‌ی ۲۴۳.

BC به ZA است. حال از Z عمودی می کشیم تا قطع زاویه را در نقطه‌ی H قطع کند، و مستطیل HB را تمام می‌کنیم. پس مستطیل HB مساوی CE است، و لهذا، اضلاع



آنها متکافی اند، یعنی نسبت ZB به BC مثل نسبت BC به ZH است. بالنتیجه، نسبت مربع ZB به مربع BC مثل نسبت ZB به ZH است. ولی این نسبت مثل نسبت BC به ZA بود. پس نسبت ZB به ZH مساوی نسبت BC به ZA است، و به تبدیل نیز چنین است [یعنی نسبت ZB به BC مثل نسبت ZH به ZA است]. پس، خطوط ZB و BC و ZH و متوالیاً بزرگ نسبت اند. و لهذا، مربع ZH مثل حاصل ضرب BC در ZA است. اما ضلع قائم قطع مکافی است که سهمش AB و رأسش A است. پس ZH از خطوط ترتیب [این قطع] می‌باشد. بنابراین این، نقطه‌ی H ناچار بر محیط قطع مکافی است، و چون بر محیط قطع زاویه نیز بود، دو قطع متلاقی اند. پس خطای ابوالجود درین گفته که دو قطع تلافی نمی‌کنند آشکار شد، و هوالمطلوب. و برای اینکه مطلب آشکارتر شود ^(*) AB را مساوی هشتاد می‌گیریم و BC را

(*) مقصود خیام از بقیه‌ی ۵۰۱۱۰۲ § (و در واقع ۱۰۱۱۰۲ §)، که بقول خودش آنرا

برای مزید توضیح آورده، معلوم نیست. ظاهراً پس از فارغ شدن از اثبات خطای ابوالجود و توضیح بقیه در ذیل صفحه‌ی بعد

که ضلع مکعب مساوی عدد است چهل و یک، و آن بلندتر از AC است. پس نقطه‌ی D خارج قطع مکافی واقع می‌شود. فرض کنیم مکافی از L بگذرد. درین صورت خط

بقیه‌ی ذیل صفحه‌ی قبل

اینکه در حالت (II) (رجوع شود به ذیل صفحه‌ی ۶۴۳) ممکن است معادله دارای جواب باشد، یعنی قطوع حلال معادله متقاطع باشند، می‌خواهد توضیح دهد که ممکن هم هست که درحالت (II) قطوع حلال تلاقی نکنند. برای این منظور معادله‌ی

$$x^2 + 41^2 = 80x^2$$

را اختیار کرده، ولی این معادله دو جواب مثبت دارد (تقریباً $x_1 = 43,4$ و $x_2 = 62,2$ ، که نظایر طولهای نقاط تقاطع دو قطع شکل صفحه‌ی ۲۴۸ متن است ابتدا از B)؛ و استنتاج خیام نا درست است. شاید منظور وی توضیح این مطلب بوده که شکل و استدلال درمواضع خاص ممکن است همراه کننده باشد، و قطعها را غیرمتلاقی بنماید، و شخص را به خطا بیندازد. ولی این توجیه بسیار مستبعد است، زیرا در کلام خیام هیچگونه اشاره‌ای باین منظور و به اینکه معادله جواب دارد نیست (در این باب به ذیل صفحه‌ی ۲۴۹ نیز رجوع شود).

اینک توضیح استدلال وی.

فرض کنیم:

$$AB = c = 80,$$

$$BC = a^{1/2} = 41.$$

چون $CA = AB - BC = 39$ ، شرط $BC > CA$ برقرار است. حال مربع CE را تمام کرده قطعها را میکشیم (شکل صفحه‌ی ۲۴۸ متن). از

$$\overline{CD}^2 = CB \cdot CB > CB \cdot CA$$

معلوم میشود که D در خارج سهمی است. اگر I محل تلاقی سهمی و CD باشد، $\overline{LC}^2 =$

$$1599, \text{ و لهذا } BC \cdot CA =$$

$$LC = \sqrt{1599} = 40 - \epsilon \quad (\epsilon < 1/80).$$

اینک فرض کنیم $TC = BC = 41$ و $HB = BT$ و $AK = \frac{CA}{4} = 9\frac{3}{4}$. عمود KM را

میکشیم تا TH و سهمی و هذلولی را بترتیب در Z و M و N قطع کند. خط TH بر هذلولی مماس است، و اولاً $\overline{LC}^2 : \overline{MK}^2 = CA : AK = 4$ ؛ پس

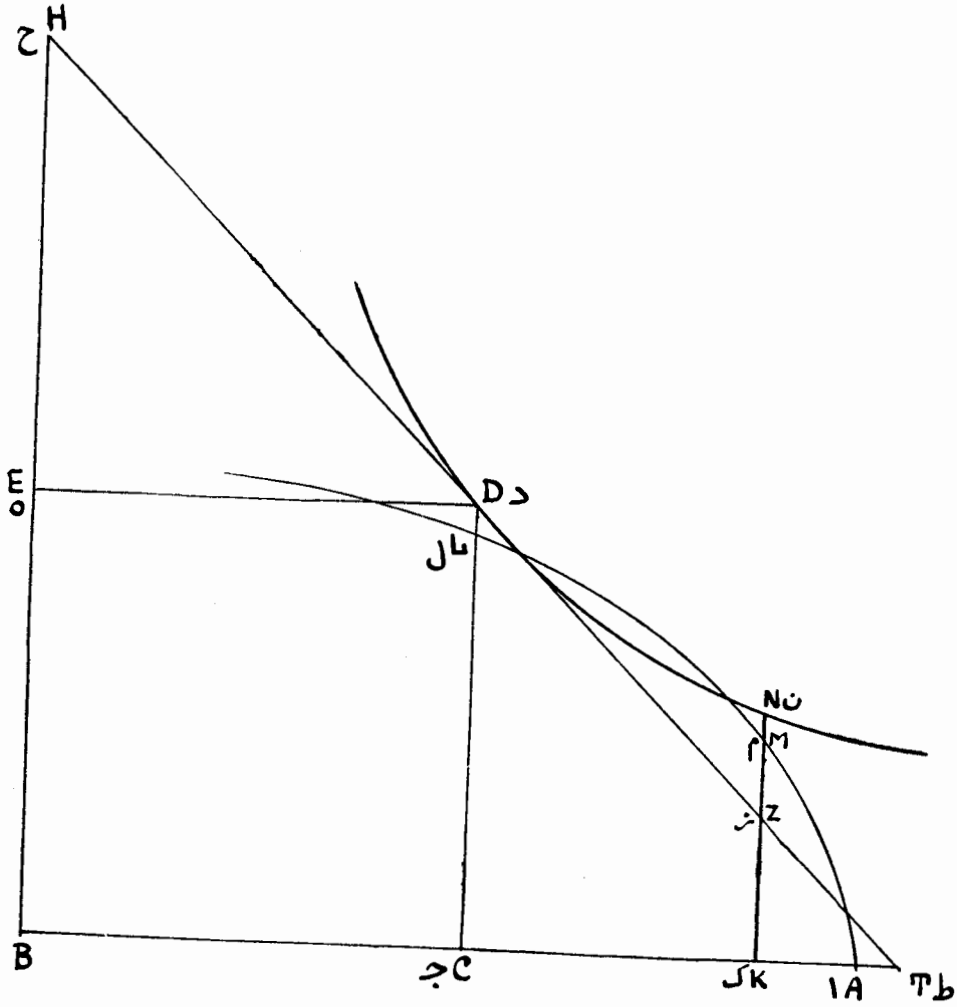
$$MK = \frac{1}{2} LC = 20 - \frac{\epsilon}{2}.$$

ثانیاً $KZ : KT = HB : BT$ ؛ پس

$$KZ = KT = KA + AT = 11\frac{3}{4},$$

بقیه در ذیل صفحه‌ی بعد

LC مساوی جذر هزار و پانصد و نود و نه می‌شود، و آن اندکی از چهل کمتر است.



بقیه‌ی ذیل صفحه‌ی قبل . $ZM = MK - KZ = ۸ \frac{۱}{۴} - \frac{۴}{۲} > ۸$.

ثالثاً $KN = \overline{BC}^2 : BK = \overline{BC}^2 : (AB - AK) = ۲۳,۹۳$ ،

خیام از $KN > KM$ صحبتی نمی‌کند . پس $KN > KM$ ، و لهذا در این موضع دو قطع خارج یکدیگرند .

علت انتخاب مقدار $۹ \frac{۳}{۴}$ برای AK معلوم نیست ، و اگر خیام مقداری بین $۸۰ - x_۱$ و $۸۰ - x_۲$

برای AK اختیار کرده بود ، هر یک از دو قطع را داخل دیگری مییافت .

حال TC را مساوی CB و BH را مساوی BT جدا می‌کنیم ، و TH را وصل میکنیم . چنانکه ثابت کردیم ، TH بر قطع زاید مماس است . و AK را مساوی ربع AC جدا میکنیم ، و از آن عمودی می‌کشیم تا قطع [مکافی] را در نقطه‌ی M قطع کند . نسبت مربع LC به مربع KM مثل نسبت AC به AK خواهد بود ، زیرا دوخط اول از خطوط ترتیب مکافی است . و این مطلب را آپولونیوس در شکل نوزدهم مقاله‌ی اول ثابت کرده است . پس KM نصف LC خواهد بود ، و آن اندکی از بیست کمتر است . اما CT چهل و یک است ، و AK نه و سه چهارم ، و AT دو ؛ پس خط KZ یازده و سه ربع است ، زیرا نسبت KZ به KT مثل نسبت HB به BT است ، و دوخط اخیر متساوی‌اند . بالنتیجه ، خط ZM بزرگتر از هشت است ، ^۵ و در داخل خط مماس قطع زاید است ، و در این وضع ناچار در داخل قطع زاید است . آری گاهی درحالی که BC بزرگتر از CA است دو قطع غیر متلاقی‌اند ، ولی این امر در جمیع انواع [معادلاتی که تحت این حالت است] ضرورت ندارد .

(۵) رجوع شود به ذیل صص ۲۴۶-۲۴۷ .

عبارت داخل { } را ما بعنوان ترجمه‌ی عبارت ذیل از متن آورده‌ایم (رجوع شود به سطور ۵ - ۸ صفحه‌ی ۵۶) :

« و هو فی داخل الخط المماس للزائد فهو فی هذا الوضع یکون فی داخل القطع الزائد ، لامحاله نعم قد یکون القطعان غیر متلاقین اذا کان ب ح اعظم من جا لکن ذلك غیر واجب ، فی جمیع الانواع فقد ابطل ابوالجود فی هذا الحكم . »

ویکه در جبر عمر خیام (صص ۸۷ - ۸۸) این عبارت را چنین ترجمه و نقطه‌گذاری کرده است :

« ... و آن ابتدا از خط مماس هذلولی محسوب شده است ؛ و آن در این وضع ناچار در آنطرف هذلولی است ؛ بطوری که انسان ناچار است تصدیق کنند که وقتی BC بزرگتر از CA است دو قطع تلافی نمیکنند . ولی این امر در جمیع حالات ضرورت ندارد ، و ابوالجود در این حکم به خطا رفته است . »

بنظر ما این ترجمه (و سخن دیگران که از ویکه تقلید کرده‌اند) با عبارت خیام (یا عبارت اصح ، منسوب به خیام) موافق نیست ، و ترجمه‌ی عبارت وی احتمالاً همان است که ما در متن آورده‌ایم . استدلال خیام اینست که چون اولاً $ZM > ۸$ و ثانیاً ZM در داخل (= بالای) خط مماس است ، ناچار در داخل (= زیر) هذلولی است ، و بنابراین ، نقطه‌ی M در زیر هذلولی است .

پس حکم مذکور ابوالجود باطل است. این مطلب را بدان. و اگر بخواهی،
مثالهای عددی توانی آورد.

[۵۰۱۱۰۴۰۱ § تبصره ۵ -] و این مسئله [از جنبه‌ی هندسی] همان [مسئله‌ی]
اضافه کردن مکعب مستطیلی است بر خط مفروض که از مکعب مستطیلی مضاف
بر تمام خط بقدر مکعبی ناقص باشد، و مساوی مکعب مستطیل [مفروض] دیگر
باشد. پس اگر ضلع مکعب مساوی مکعب مستطیل مفروض مساوی نصف خط یا کمتر
از آن باشد مسئله لزوماً ممکن است، اما اگر ضلع مذکور بزرگتر از نصف این
خط باشد، برطبق آنچه ثابت کردیم، ممکن است مسئله حالات ممتنع داشته باشد.
و خداست که می‌تواند حل این مشکلات را به لطف و کرم خود آسان سازد.

رساله در ظهر روز یکشنبه‌ی بیست و سوم

ماه ربیع‌الاول سنه ۷۷۱[†] تمام شد، و حمد...

(۵) اگر c خط مفروض و a حجم مکعب مستطیل مفروض باشد، مکعب مستطیل
 $x^2(c-x)$ ، که مضاف بر c است، از مکعب مستطیل cx^2 (مضاف بر تمام c) بقدر مکعب
 x^3 ناقص است. حال باید x را چنان تعیین کرد که

$$(1) \quad (c-x)x^2 = a.$$

نظیر این مسئله در هندسه‌ی مسطحه مسئله‌ی اضافه کردن مستطیلی است بر خط مفروض
که همسطح مستطیل مفروض باشد، و نقصانش نسبت به مستطیل مضاف بر تمام خط مربع باشد
(رجوع شود به ۳۰۲۰۳۰۱ §، ص ۸۵ - ۸۷).

معادله‌ی مسئله‌ی اخیر بصورت $a = cx - x^2$ است، که بازنه $a > (c/2)^2$
یا $\sqrt{a} > c/2$ ممتنع است. شاید ابوالجود، به خطا، این شرط را بصورت $a^{1/3} > c/2$
در مورد معادله‌ی (۱) تعمیم داده است (رجوع کنید به ذیل صفحه‌ی ۲۴۳).
(†) در باب این تاریخ به ملاحقات کتاب حاضر رجوع کنید.

قسمت نهم

رساله در تحلیل يك مسئله

به معادله‌ی درجه‌ی سوم و حل آن بوسیله‌ی قطوع مخروطی

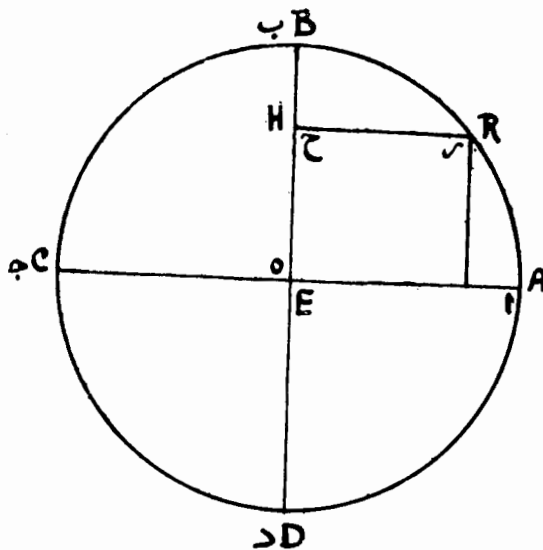
از

عمر خیام

قسمت ششم*

این رساله ای است از ابو الفتح عمر
ابن ابراهیم خیامی

[§ ۶۰۱ طرح مسئله-] می‌خواهیم ربع دایره‌ی AB از دایره‌ی $ABCD$ را در نقطه‌ای مانند R به دو قسمت تقسیم کنیم که اگر عمود RH را بر قطر BD فرود آوریم، نسبت AE به RH مثل نسبت EH به HB باشد. و E مرکز دایره و AE نصف قطر آنست.

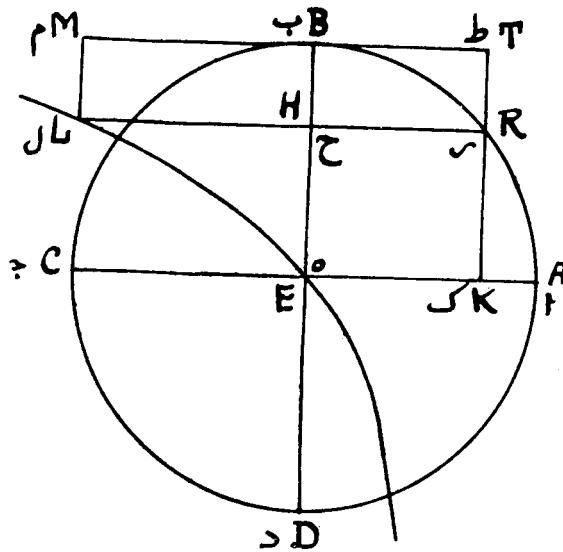


فرض می‌کنیم تقسیم مطلوب را بعمل آورده‌یم [، و مسئله را بتدریج تحلیل میکنیم،] تا تحلیل به امر معلومی منجر شود. سپس ترکیب مینمائیم تا بمطلوب برسیم†.

(*) رجوع شود به § ۴۰۴ (ص ۱۵۱ - ۱۵۵).

(†) رجوع شود به § ۴۰۴۰۲ (ص ۱۵۳ - ۱۵۴).

پس دایره‌ی $ABCD$ را دگر باره میکشیم †، و مرکز آن E است، و AC و BD را چنان اخراج می‌کنیم که یکدیگر را بزاویه‌ی قائمه قطع کنند، و عمود RH را چنان اخراج می‌کنیم که نسبت AE به آن مثل نسبت EH به HB باشد، و دو عمود KRT و TBM را اخراج می‌کنیم، و خط BM را مساوی AE جدا کرده مستطیل TL را تمام می‌کنیم. پس، چون نسبت AE به RH مثل نسبت EH به HB است، و BM مساوی AE است، چنانکه اقلیدس در شکل شانزدهم مقاله‌ی ششم اصول ثابت



کرده، حاصل ضرب BM در HB مساوی حاصل ضرب RH در EH است. ولی حاصل ضرب BM در HB مساوی سطح مستطیل BL است، و حاصل ضرب RH در EH مساوی سطح مستطیل HK است. پس سطح BL مساوی سطح HK می‌باشد، و چون سطح

(†) فرض کنیم مسئله حل شده باشد، و $AE : RH = EH : HB$ (۱)، و

$BM = AE$. بالنتیجه $BM \times HB = RH \times EH$ ، یا $BL = HK$ ؛ و پس از افزودن

HT به طرفین، $TE = TL$. پس نقاط E و L بر هذلولی (متساوی القطرینی) با مجانبهای

TK و TM واقفند. و خلاصه‌ی بحث دراز و بیفایده‌ی خیام اینست که معلومات کافی برای رسم

این هذلولی در دست نیست.

HT را به هر دو بیفزائیم سطح TE مساوی سطح TL خواهد بود. پس اگر، چنانکه آپولونیوس در شکل پنجاه و نهم مقاله‌ی اول کتاب مخروطات و شکل‌های ششم و پنجم از مقاله‌ی دوم این کتاب ثابت کرده است، قطع زایدی بسازیم که خطوط KT و TM آنرا قطع نکنند و بر E بگذرد. - چو این عمل بوسیله‌ی آن سه شکل انجام پذیر است - بنا بر عکس شکل هشتم از مقاله‌ی دوم کتاب مخروطات، این قطع زاید ناچار بر نقطه‌ی L می‌گذرد. اما وضع نقطه‌ی E معلوم است، و خط BM از حیث وضع و مقدار معلوم می‌باشد، ولی وضع نقطه‌ی L در مرحله‌ی ترکیب غیر معلوم است، زیرا اگر وضع این نقطه معلوم بودی وضع نقطه‌ی H نیز معلوم بودی - چو مقدار خط HL معلوم است - پس BH معلوم بودی، و شکل معلوم بودی، و همچنین وضع خط TK غیر معلوم است، چو اگر وضع آن معلوم بودی وضع نقطه‌ی T معلوم بودی، و اگر وضع نقطه‌ی T معلوم بودی مقدار خط TB معلوم بودی، و اگر مقدار خط TB معلوم بودی شکل معلوم بودی، و نه چنین است، زیرا مقصود معلوم کردن شکل است. پس [- خلاصه‌ی کلام اینک -] اگر وضع نقطه‌ی L معلوم بودی یا وضع خط TK معلوم بودی، اتمام شکل و رسیدن به مطلوب بوسیله‌ی ترکیب به آسانی ممکن شدی، و دانستن هیچیک ازین دو آسان نیست، و حسب ^۵ | هذه الطريقة للباحث المستبصر بکتاب المخروطات لایوصل الی المطلوب بطریقه اخری امکنه التفطن لهذه الطريقة | ^۶ و من این طریقه را، باینکه دشوار است، بعنوان تمهید گونه‌ای جهت متعلم و برای آماده ساختن وی آوردم، و چون بیابان رسانیدن آن دشوار و سخت محتاج مقدمات چندی از قطوع مخروطی است، به اتمام آن و ترکیبش به طریق هندسی نمی‌پردازم، تا کسانی از داندگان قطوع مخروطی که بخواهند، پس از فرا گرفتن طریقی که ذکر خواهیم کرد، به اتمام آن بپردازند، زیرا اگر چه طریقی که گفته خواهد شد نیز محتاج مقدماتی از قطوع مخروطی است، از بسیاری

(۵) در اصل چنین بنظر می‌آید، و خواننده نشد.

(۶) ترکیب قطعی این عبارت بر مترجم و بر دوستانی که با آنان مشورت کردم معلوم نشد.

جهات از طریق اول آسانتر است، و مقدمات آن فواید بیشتری دارد.

[۶۰۴ § تحلیل مسئله به مثلث معین^۵]

پس بیاری خدا گویم. شکل را دگر باره می کشیم، و در طریق تحلیل، فرض می کنیم تقسیم مطلوب انجام یافته و نسبت AE به RH مثل نسبت EH به HB باشد، و بنا بر آنچه اقلیدس در شکل شانزدهم مقاله‌ی سوم [اصول] ثابت کرده است^۶، از

(۵) خیام مسئله‌ی مورد بحث را به رسم مثلث قائم الزاویه‌ای که ما آنرا مثلث معین خوانده‌ایم باز میگرداند، بدین طریق:
فرض کنیم مسئله حل شده باشد، و

$$(۱) \quad AE : RH = EH : HB .$$

مماس RT را میکشیم. از طرفی EH : HR = HR : HT ، و لهذا $\overline{HR}^2 = EH \cdot HT$ ، و از طرف دیگر $\overline{HR}^2 = DH \cdot HB$. پس $HD : EH = HT : HB$ ، و به تفضیل نسبت ،

$$ED : EH = BT : HB ,$$

پس بموجب (۱) و با رعایت $ED = AE$ ،

$$RH : HB = BT : HB ,$$

و لهذا $RH = BT$. اما $RE = EB$. پس $RH + ER = BT + EB$ ، و یا

$$(۲) \quad RH + ER = ET .$$

پس حل مسئله بر میگردد به رسم مثلث قائم الزاویه‌ی ERT (مثلث معین) که در (۲) صدق کند.

ضمناً رابطه‌ی (۱) را میتوان بصورت

$$(۳) \quad ER : RH = EH : (ER - EH)$$

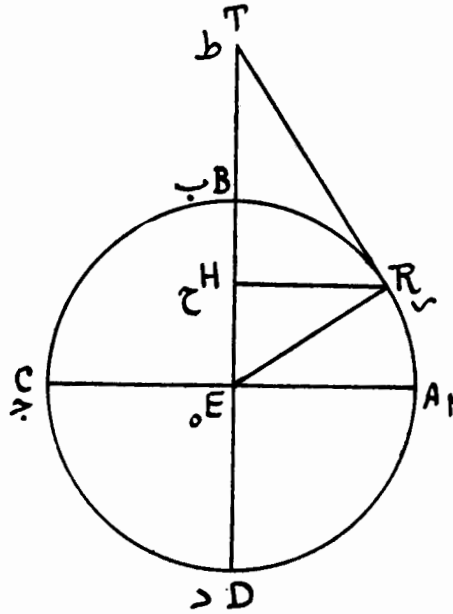
نوشت، که فقط مربوط به اجزای مثلث ERT است، و بدین صورت، عکس حکم مذکور نیز صحیح است، و بمبارت دیگر، شرط لازم و کافی برای اینکه در مثلث قائم الزاویه‌ی ERT رابطه‌ی (۳) برقرار باشد آنست که (۲) برقرار باشد.

زیرا در مثلث قائم الزاویه‌ی ERT همواره $ER : ET = EH : ER$ ، و به تفضیل $ER : (ET - ER) = EH : (ER - EH)$. حال اگر (۳) مفروض باشد نتیجه میشود $RH = ET - ER$ ؛ و بالعکس اگر (۲) مفروض باشد بالبداهه (۳) نیز برقرار است.

(+) شکل ۱۶ مقاله‌ی سوم تحریر اقلیدس مربوط به رسم مماس بردایره است از نقطه‌ای واقع در خارج آن. رسم مماس بردایره از نقطه‌ای واقع بر محیط آن از شکل ۱۵ همان مقاله استنباط می‌شود.

ضمناً باید دانست که ترتیب این فضا یا در تحریر اقلیدس با ترتیب آنها در کتاب سیزده مقاله (از هیت) متفاوت است. برای نکته‌ی مذکور به اول صفحه‌ی ۴۴ از جلد دوم کتاب هیت رجوع شود.

نقطه‌ی R خط RT را بر دایره مماس می‌کنیم، و EB را امتداد می‌دهیم تا خط مماس را در نقطه‌ی T قطع کند، و RE را وصل می‌کنیم. پس چون زاویه‌ی R از مثلث



ERT قائمه است، و از رأس زاویه‌ی R عمود RH بر قاعده اخراج شده، بنا بر آنچه در شکل هشتم مقاله‌ی ششم [اصول] ثابت شده است، نسبت EH به HR مثل نسبت HR به HT است. پس مربع HR مساوی حاصل ضرب EH در HT می‌باشد. اما مربع HR مساوی حاصل ضرب DH در HB است. بالتوجه، حاصل ضرب DH در HB برابر است با حاصل ضرب EH در HT، و لهذا - بموجب آنچه در شکل شانزدهم از مقاله‌ی ششم [اصول] ثابت شده - نسبت HD به EH مثل نسبت HT به HB می‌باشد، و بتفضیل نسبت، نسبت ED به EH مثل نسبت BT به BH است. ولی نسبت AE به RH مثل نسبت EH به HB [فرض شده] بود؛ پس، به دو تبدیل، نسبت AE به EH برابر نسبت RH به HB است. اما نسبت DE به EH مثل نسبت BT به BH بود. پس نسبت RH به HB برابر نسبت BT به HB می‌باشد. ولی، بموجب شکل نهم از مقاله‌ی پنجم

[اصول] ، مقادیری که نسبت آنها به يك شيء متساوی باشند خود نیز متساوی اند . پس RH مساوی BT است . ولی RE مساوی EB است . بنابراین ، مجموع ER و RH مساوی خط ET می باشد . پس تحلیل منجر شد به مثلث قائم الزاویه ای مشروط باینکه وتر زاویه قائمه مساوی مجموع یکی از دو ضلع محیط باین زاویه با عمود خارج از رأس آن بر وتر باشد .

پس هرگاه مثلث قائم الزاویه ای با این وصف بسازیم ، خواهیم توانست این شکل را بطریق هندسی ترکیب کنیم . و این مقدمه ، یعنی مثلثی دارای خاصیت مذکور ، فایده ی بسیار در امثال این مسئله دارد ، و آنرا خواص دیگری است که بعضی از آنها را یاد میکنیم تا کسی که این رساله را مطالعه می کند فایده ی آن را در اکثر مسائل شبیه این مسئله دریابد .

[۶۰۳ § خواص مثلث معین و معادله ی حل آن]

[۶۰۳۰۱ §] گوئیم که این مثلث ممکن نیست متساوی الساقین باشد .
 زیرا اگر ضلع ER مساوی RT باشد ، EH مساوی HT می شود ، و عمود [RH] مساوی هر يك از آنها می گردد ، و ET دو برابر عمود RH می شود ، و مجموع ER و عمود [RH] بزرگتر از وتر می گردد ، و حال آنکه آنرا مساوی وتر فرض کرده بودیم ، و این خلاف فرض است .

(*) بفرض

$$(۱) \quad RH + ER = ET .$$

گوئیم $ER \neq RT$. اثبات به برهان خلف است . اگر $ER = RT$ ، نتیجه میشود

$$EH = HT = RH \quad \text{، و لهذا}$$

$$(۲) \quad ET = EH + HT = ۲RH .$$

اما $ER > RH$ ، پس $RH + ER > ۲RH$ ، و یا بموجب (۲) ، $RH + ER > ET$ ،

و این با (۱) منافی است .

§ ۶۰۳۰۲] و گویم ER کوتاهتر از RT است .^{*}

چون اگر ER بلندتر از آن باشد، EH بلندتر از HT خواهد بود، و HR که خط واسطه‌ی [هندسی] بین EH و HT است بلندتر از HT خواهد بود. اما HR مساوی TB فرض شده بود. پس TB بزرگتر از TH است، [یعنی] جزء بزرگتر از کل است، و این محال است.

پس ثابت شد که در مثلثی دارای چنین خاصیت، مجموع ضلع کوتاهتر و عمود [وارد از رأس زاویه‌ی قائمه بر وتر] مساوی بلندترین ضلع مثلث است، و این همانست که می‌خواستیم ثابت کنیم.

§ ۶۰۳۰۳] و از خواص چنین مثلثی اینست که از دو ضلع محیط به زاویه‌ی قائمه آنکه بلندتر است مساویست با حاصل جمع ضلع کوتاهتر و قطعه‌ای که عمود [وارد از رأس زاویه‌ی قائمه بر وتر] در طرف ضلع کوتاهتر از وتر جدا می‌کند .[†]

(۵) فرض: $ER + RH = ET$ (۱) حکم: $ER < RT$.

اثبات به برهان خلف است. چون ثابت شد که $ER \neq RT$ ، کافی است ثابت کنیم که $ER > RT$ ممتنع است. پس (۲) را مفروض می‌گیریم، نتیجه می‌شود $EH > HT$ ، و لهذا $\overline{HT}^2 = \overline{EH} \times \overline{HT} > \overline{HR}^2$ ؛ پس $HR > HT$ (۳). از طرف دیگر، اگر EB را مساوی ER جدا کنیم، از (۱) حاصل میشود $RH = BT$. پس بموجب (۳)، $TB > TH$ ، و این ممتنع است. خیام در متن نقطه‌ی B را تعریف نکرده است.

(†) استدلال خیام خالی از تسامح نیست. توضیح آنکه موضوع قضیه مثلث قائم الزاویه‌ای مانند ERT است دارای خاصیت

$$(۱) \quad RH + ER = ET.$$

و میخواهیم ثابت کنیم که

$$(الف) \quad RT = ER + EH.$$

برهان. بمرکز F و شعاع ER دایره‌ای میکشیم تا شکل صفحه‌ی ۲۵۶ پدید آید. خیام گوید:

$$(۲) \quad ED : EH = TB : BH ,$$

ولی دلیل این حکم را نمی‌گوید، بلکه ظاهراً حکم عکسی را که در ذیل صفحه‌ی ۲۵۵ آوردیم بقیه در ذیل صفحه‌ی بعد

از شکل سابق مثال می آوریم . گوئیم مجموع ER و EH مساوی ضلع RT است .
 دلیلش اینست که نسبت ED به EH مثل نسبت TB به BH است . پس ، به ترکیب :
 نسبت DH به HE مثل نسبت TH به HB است ؛ و به تبدیل ، نسبت DH به HT برابر
 نسبت EH به HB می باشد . و لکن نسبت EH به HB مثل نسبت ER به RH است ، و -
 بعلت تشابه دومتک ERH و RHT - نسبت RE به RH مثل نسبت RT به HT می باشد .
 پس نسبت RT به HT برابر نسبت DH است به HT . بالنتیجه ، RT مساوی HD
 است . ولی HD مساوی مجموع ER و RH است . پس مجموع ER و RH مساوی RT
 می باشد ، و این همانست که می خواستیم ثابت کنیم .

[§ ۶۰۳۰۴ معادله‌ی حل مثلث معین^{۵۷}] و پس از ذکر این مقدمات ، مثلث

بقیه‌ی ذیل صفحه‌ی قبل

مسلم گرفته است . بموجب آن حکم

$$(۳) \quad ER : RH = EH : (ER - EH).$$

اما بموجب (۱) و شکل ، $ER = ED$ و $RH = ET - ER = ET - EB = TB$ و
 $ER - EH = EB - EH = HB$ ، و بدین ترتیب ، (۳) بصورت (۲) در می آید . بقیه‌ی استدلال
 آسان است . از (۲) به ترکیب نسبت نتیجه میشود $DH : EH = TH : BH$ ، یا
 $DH : TH = EH : HB$. اما بموجب (۳) ، $ER : RH = EH : HB$. بعلاوه ، بسبب تشابه
 دومتک ERH و RHT ، $RE : RH = RT : HT$. پس .

$$RT : HT = RE : RH = EH : HB = DH : TH .$$

بالنتیجه $RT = DH$. اما $DH = DE + EH = ER + EH$ ، و هوالمطلوب .

(۵) بشرحی که ملاحظه خواهد شد ، خیام معادله‌ای برای تعیین مثلث معین تشکیل میدهد .

اگر $AD = a$ و $BD = x$ فرض شود ، بناپرض $AB + x = AC$ ، و یا

$$\sqrt{a^2 + x^2} + x = a + x^2/a .$$

$$x^2 + 2a^2 x = 2ax^2 + 2a^3 \quad \text{یا}$$

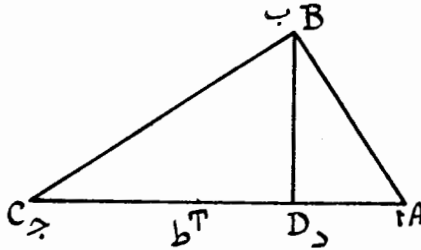
که بازاء $a = ۱۰$ همان معادله‌ی خیام است :

$$x^2 + 200x = 20x^2 + 2000 .$$

طریق خیام برای بدست آوردن معادله اینست .

فرض کنیم $AD = ۱۰$ و $BD = x$. اولاً $AB^2 = ۱۰۰ + BD^2$. ثانیاً بعلت تشابه دو
 مثلث ABC و ABD ، $AC : AB = AB : AD$ ، پس $AC \cdot AD = AB^2$ ، و بالنتیجه
 بقیه درذیل صفحه‌ی بعد

ABC را که زاویه‌ی B از آن قائمه است می کشیم ، و از نقطه‌ی B عمود BD را بر AC فرود می آوریم و فرض می کنیم مجموع ضلع AB و عمود BD مساوی AC باشد ، تا



تحلیل منجر به معلومی شود . سپس ترکیب می کنیم تا مثلی با خاصیت مذکور حاصل گردد .

و چون ریاضی دانان فاضل پیشین ، در امثال این مسائل ، برای آسان کردن راههای حسی ، اصطلاحات جبریه را بکار برده اند ، ما نیز به آنان اقتداء می کنیم ، و راهی که ایشان رفته اند می رویم ، ولی استعمال اصطلاحات جبریه ضروری نیست ، و عمل یکسان است ، منتهی اگر این اصطلاحات بکار برده شود ضرب و تقسیم آسانتر خواهد بود .

بقیه‌ی ذیل صفحه‌ی قبل

$$AC = 10 + \frac{1}{10} BD^2 \quad ; \quad \text{و چون فرض } AC = AB + BD \text{ ، خواهیم داشت } AB = 10 +$$

$$BD - \frac{1}{10} BD^2 \quad \text{، و}$$

$$\overline{AB}^2 = 100 + 2BD^2 + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} BD^4 - 20BD - \frac{1}{5} BD^3$$

و این مقدار معادل $100 + \overline{BD}^2$ می باشد ؛ و پس از اختصار

$$2BD^2 + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} BD^4 = 20BD + \frac{1}{5} BD^3$$

$$\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \overline{BD}^4 + 2BD = \frac{1}{5} \overline{BD}^3 + 20 \quad \text{یا}$$

یا بالاخره

$$\overline{BD}^4 + 200BD = 20\overline{BD}^3 + 2000$$

$$(x^4 + 200x = 20x^3 + 2000) .$$

پس خط AD را با طولی منطق، مثلا ده، می گیریم، و BD را شیء فرض می کنیم، و آنرا در مثل خودش ضرب می کنیم تا مال حاصل شود، و ده را در مساوی خودش ضرب می کنیم تا صد حاصل شود، و این دو را جمع می کنیم، صد و مال حاصل می شود، و آن - چنانکه در شکل چهل و هفتم مقاله اول [اصول] ثابت شده - مربع AB است. و چون - بعلمت تشابه دو مثلث ABC و ABD - نسبت AC به AB مثل نسبت AB به AD است، حاصل ضرب AC در AD [نیز] مساوی مربع AB است. پس اگر مربع AB را که [مساوی] صد بعلاوهی مال است بر AD که ده است تقسیم کنیم، خارج قسمت مساوی ده عدد و یک دهم مال خواهد بود، و آن AC است. ولی فرض کرده بودیم که AC مساوی مجموع AB و BD است. پس مجموع AB و BD [مساوی] ده عدد و یک دهم مال می باشد. از آن BD را که شیء است کم می کنیم، باقی می ماند ده عدد و یک دهم مال منهای شیء، و آن AB است. چون آنرا در مثل خودش ضرب کنیم حاصل می شود صد عدد و سه مال و یک دهم یک دهم مال منهای بیست شیء و منهای یک پنجم مکعب، که معادل صد عدد و مال است. پس جبر می کنیم و مقابله می کنیم و اسقاط می کنیم، نتیجه می شود که دو مال و یک دهم یک دهم مال معادل بیست شیء و یک پنجم مکعب است. سپس همه را به شیء تقسیم می کنیم تا به کمترین چهار جنسی $\frac{1}{10}$ که بر همین نسبت اند باز گردد. پس از تقسیم چنین حاصل می شود که یک دهم یک دهم مکعب و دو شیء معادل یک پنجم مال و بیست عدد است. سپس یک دهم یک دهم را بوسیلهی ضرب کردن آن در صد کامل می کنیم، و هم چنین تمام مراتب را در صد ضرب می کنیم، نتیجه می شود که مکعب و دویست شیء معادل بیست مال و دو هزار عدد است. پس، تحلیل منجر شد به معادلهی چهار جنس، و این را، بدان سبب که

$$(۵) \text{ معادله ای که بدست آمده } x^3 + \frac{1}{10}x = 20x + \frac{1}{10}x^4 = 20x + \frac{1}{10}x^3 \text{ است. حیام}$$

بوسیلهی تناسب مراتب عدد و شیء و مال و کعب و غیره (مثلا رجوع شود به ذیل § ۵۰۱۰۳،

صفحه ۱۶۲) معادله را بمعادلهی درجهی سوم $x^3 + \frac{1}{10}x = 20 + \frac{1}{10}x^2$ برمی گرداند.

مکعب در آن جای دارد، نمی‌توان بوسیله‌ی هندسه‌ی مسطحه حل کرد، و در حلش احتیاج به قطوع مخروطی است.

[۶۰۴ § کلیاتی در باب معادلات]

[۶۰۴۰۱ § مقدمه -] و پیش از اینکه در آشکار ساختن مطلوب بوسیله‌ی قطوع مخروطی سخن گوئیم، نکته‌ای می‌آوریم که مطالعه‌کنندگان این رساله را بطلب دانش و استوار ساختن مطالبی که ایشان را بر آنها می‌آگاهانیم تحریص کند؛ ونعمتهائی را که خدای تعالی به بعضی بندگان خود اعطا فرموده شکرانی باشد، زیرا بزبان آوردن نعمتها شکر گذاری بزرگی نسبت به نعمت دهنده است - چنانکه در قرآن می‌فرماید و اما بنعمة ربك فحدث . پس خواننده‌ی این رساله گمان نبرد که سخن را برای خودستانی باین مرحله کشانیدیم، چو این از عادات درماندگان گزاف گوی خود بین است، و خودبینی دون همتان را سزد، زیرا روان آنرا جز برای درك اندکی از علوم گنجایش نباشد، و چون آنرا دریابند چنین پندارند که همه‌ی علوم همین و به همین محصور است، و پناه به خدا می‌بریم از اینکه نفس ما آرائی را در نظر ما خوب جلوه دهد که ما را گمراه کنند، و از رسیدن بحقایق و نیل به مقصد و رستگاری باز دارند.

[۶۰۴۰۲ § مراتب مجهول-] گوئیم آن چیزی را که جبرها مال مال می‌خوانند در مقادیر متصل[⊛] امری موهوم است، و به‌هیچوجه وجود خارجی ندارد، و اطلاق الفاظ مال مال و مال کعب و کعب کعب و جز آنها بر مقادیر متصل از جهت اطلاق عدد بر این مقادیر است^{⊛⊛}؛ زیرا اعداد و مقادیر جملگی از جنس کمیت هستند، و بیان این مطلب را علمای حکمت اولی برعهده دارند.

اما چیزهائی که جبرها بکار می‌برند، و در خارج و در مقادیر متصل جود دارد

(⊛) رجوع شود به ۵۰۱۰۲ § .

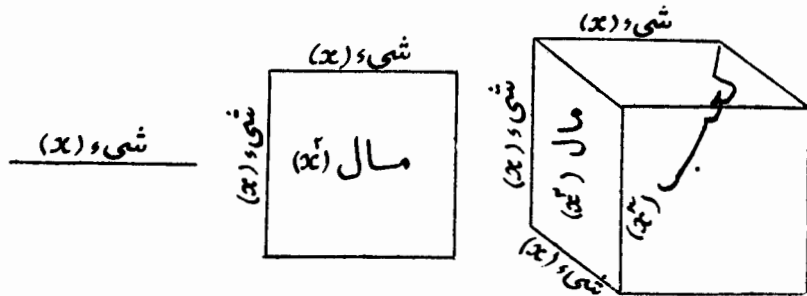
(⊛⊛) رجوع شود به ذیل صفحه‌ی ۱۶۴ و ۴۰۲۰۱ § (ص ۱۳۸) .

چهار است: عدد و شیء و مال و مکعب. اما عدد [مطلق] آنست که عدد مجرد از همه‌ی ماده‌ها در ذهن اندیشیده شود، و آن وجود خارجی ندارد، زیرا عدد چیزی است معقول و کلی که فقط آنگاه وجود خارجی پیدا می‌کند که بوسیله‌ی ماده متشخص شود.

اما شیء در مقادیر متصل به منزله خط مستقیم است. و اما مال بمنزله‌ی چهار ضلعی متساوی الاضلاع و قائم‌الزاویائی است که ضلعش مساوی خط مستقیمی باشد که نام شیء بر آن اطلاق شده است^{*}. و مکعب آنچه‌ان جسمی است که شش سطح چهار ضلعی و متساوی و دارای اضلاع مساوی و زوایای قائمه بر آن محیط باشند، و ضلعش همان خط مستقیمی باشد که اسم شیء بر آن اطلاق شده، و هر سطح آن مربعی است که نام مال بر آن اطلاق شده. پس، مکعب از ضرب کردن شیء در مثل خودش، و سپس، ضرب کردن این حاصل ضرب در شیء حاصل می‌شود، و توضیح ساختن آن و برهان آنرا اقلیدس در شکل بیست و هفتم مقاله‌ی یازدهم کتاب خود در اصول هندسه [آورده است].

و اما مال مال، که جبریه‌ها آنرا حاصل ضرب مال در مال می‌دانند، در مقادیر متصل معنی ندارد؛ زیرا چگونه می‌توان مربع را که سطح است در مثل خودش ضرب کرد[†]. چو سطح چیزی است دارای دو بُعد، و حاصل ضرب دو بُعد

(۵)



(†) رجوع شود به § ۴۰۲۰۱ (ع ۱۳۸).

در دو بعد چهار بعد می‌شود، و جسم را ممکن نیست بیش از دو بعد باشد. پس هر آنچه به جبر استخراج می‌شود از همین چهار مرتبه استخراج می‌گردد، و آنکه گمان کرده است که جبر حیل‌های در استخراج اعداد مجهول است امر نامعقولی را گمان برده است، و نباید باینکه جبر و هندسه در ظاهر مختلف‌اند توجه کرد، بلکه جبر و مقابله امور است هندسی که بوسیله‌ی اشکال پنجم و ششم مقاله‌ی دوم اصول مبرهن می‌شود. *

[§ ۶۰۴۰۲۰۱ تبصره ۵-] و اما آنکه گفته است که مال مال و سد مال معادل بیست و هشت است، و سپس عده‌ی مالها را نصف کرده، و [حاصل را] در خودش ضرب کرده، و عدد را بر آن افزوده و جذر حاصل را گرفته... و آن: پنج و نیم شده - و از آن نصف عده‌ی مالها را کم کرده، و چهار مانده، و گفته است که آن مال است و مال مال شانزده است، و سپس پنداشته که مال مال از راه جبر استخراج شده، گمانش سخت ضعیف است †، چو وی مال مال را استخراج نکرده، بلکه مال را بدست آورده است، و مانند اینست که مال و سد جذر معادل بیست و هشت باشد، و سپس جذر را بر طبق مقاله‌ی دوم [کتاب اصول] استخراج کند، و اصرار ورزد که جذری که استخراج کرده جذر مال مال است. و این سری است که بوسیله‌ی آن براسراری

(*) اشکال مذکور معادل دستورهای

$$x(a-x) + \left(\frac{a}{p} - x\right)^2 = \left(\frac{a}{p}\right)^2$$

$$x(a+x) + \left(\frac{a}{p}\right)^2 = \left(\frac{a}{p} + x\right)^2$$

است. رجوع شود به حل معادله‌ی درجه‌ی دوم در § ۵۰۴.

(†) یعنی اگر در حل معادله‌ی $x^2 + 3x^2 = 28$ بگوئیم

$$x^2 = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 28} - \left(\frac{3}{2}\right),$$

و یا $x^2 = 4$ و لهذا $x^2 = 16$ ، $x^2 = 16$ (بزعم خیام) x^2 را بطریق جبری استخراج نکرده‌ایم، بلکه، چون معادله‌ی مذکور قابل تحویل بصورت $z^2 + 3z = 28$ است، نباید مقدار $(x^2) = z$ را که از این معادله استخراج کرده‌ایم جذر x^2 بدانیم!

آگاه خواهی شد .

[§ ۶۰۴۰۳ طبقه بندی معادلات [⊙]]

و اینک ناز می گردیم بموضوعی که در بحث آن بودیم .

گوئیم که معادلات سه مرتبه‌ی اول ، یعنی اعداد و جذرها و مالها ، به شش شعبه باز میگردد : سه معادله‌ی مفرد و سه معادله‌ی مقترن . و مجهولات آنها را میشود به مقاله‌ی دوم [اصول] استخراج کرد ، چنانکه در کتاب جبرها گفته و شرح داده شده است . اما اگر مکعب مورد نظر قرار گیرد ، و بین آن و سایر مراتب معادله‌ای قرار داده شود ، درین صورت [برای حل این معادله] احتیاج به هندسه‌ی مجسمه و مخصوصاً مخروطات و قطوع مخروطی پیدا می‌شود ، زیرا مکعب جسم است . اما مفردات آن [⊙] [⊙] سه است : **مکعبی که معادل مالها باشد ، و آن [در حکم]** اینست که جذرهای معادل اعداد باشد ؛ و **مکعبی که معادل جذرها باشد ، و آن در حکم اینست که مالهای معادل اعداد باشد ؛ مکعبی که معادل اعداد باشد ، و برای حل [عددی]** این معادله راهی نیست مگر راههای عددی که برای استخراج کعبها آماده است [†] ، و یا راههای هندسی که بوسیله‌ی آنها جسمی متوازی السطوح مساوی جسم متوازی السطوح مفروض دیگر ساخته میشود ، و در اینگونه اعمال ناچار به قطوع مخروطی ، و یا - برای کسانی که مخروطات نمی‌دانند - به آلاتی ^{††} احتیاج می‌افتد .

اما مقترنات آن ^x دو صنف است : سه تائی و چهار تائی . سه تائی‌ها عبارتست از **مکعب و مالها معادل اعداد است ، و آن جز بوسیله‌ی قطوع حل نمی‌شود ؛ و مکعب و اموال معادل جذرها است ، و حکم آن همان حکم معادله‌ی مال و جذرها**

(⊙) رجوع شود به § ۵۰۲ و § ۴۰۲ و مخصوصاً § ۳۰۶۰۶ .

(⊙⊙) یعنی مفردات درجه‌ی سوم .

(†) رجوع شود به § ۵۰۲۰۲ .

(††) در این باب به § ۴۰۴۰۲ (ص ۱۵۵) رجوع شود .

(x) یعنی مقترناتی که شامل مکعب است ، و عبارت دیگر ، مقترنات درجه‌ی سوم .

با عدد است؛ و مکعب و اعداد معادل جذرها است، و آن جز بوسیله‌ی قطوع حل نمی‌شود؛ و مکعب و اعداد معادل مالها است، و آن جز بوسیله قطوع حل نمی‌شود؛ و مکعب و جذرها معادل اعداد است، و آن جز بوسیله‌ی قطوع حل نمی‌شود؛ و مکعب و جذرها معادل مالها است، و آن در حکم معادله‌ی مال و عدد با جذر است؛ و مالها و جذرها معادل مکعبی است، و آن در حکم معادله‌ی جذرها و اعداد با مال است؛ و مالها و عدد معادل مکعب است، و آن جز بوسیله‌ی قطوع حل نمی‌شود؛ و جذرها و اعداد معادل مکعب است و آن جز بوسیله‌ی قطوع حل نمی‌شود.

و اینها که ذکر شد نه نوع سه تائی است که سه از آنها بوسیله‌ی [مقاله‌ی] دوم اصول حل می‌شود، و شش دیگر جز بوسیله‌ی قطوع مخروطی حل نمی‌شود. و اما چهار تائی‌ها اینست که مکعب معادل مالها و جذرها و اعداد است؛ مکعب و جذرها و اعداد معادل مالها است؛ مکعب و مالها و اعداد معادل جذرها است؛ مکعب و مالها و جذرها معادل اعداد است؛ مکعب و مال معادل جذرها و اعداد است؛ مکعب و جذرها معادل مالها و اعداد است؛ مکعب و اعداد معادل مالها و جذرها است. و اینها هفت نوع چهار تائی است که هیچیک جز بوسیله‌ی قطوع مخروطی حل نمی‌شود.

پس، از معادلات مرکب [☆] سیزده نوع حاصل شد که جزء به قطوع مخروطی حل نمی‌شود، و نوعی از مفردات هست که جز بوسیله‌ی قطوع مخروطی حل نمی‌شود، و آن مکعبی است که معادل عدد باشد.

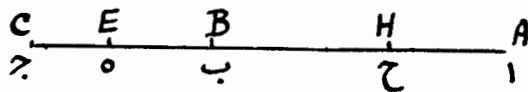
[۶۰۴۰۴ § نظر اجمالی به تاریخ معادلات درجه‌ی سوم و کارهای مؤلف]

اما ریاضیون قدیم از غیر اهل زبان ما ^{☆☆} به چیزی ازین مقوله پی نبردند، و

(☆) یعنی مقترن، و بعبارت دیگر، دارای بیش از دو جمله.

(☆☆) مقصود زبان عربی است.

[یا از اطلاعات ایشان درین باب] چیزی بما نرسیده و بزبان ما نقل نشده. ولی از متأخرین از اهل زبان ما، اول کسی که به صنفی سه تائی ازین اصناف چهارده گانه دوچار شد ماهانی[†] مهندس است، که دست زد به حل مقدمه‌ای که ارشمیدس در شکل چهارم از مقاله‌ی دوم کتاب کره و اسعوانه آنرا مسلم گرفته، و آنچه ذکر کرده اینست[‡]. ارشمیدس گفته است که دو خط AB و BC از حیث مقدار معلوم، و بریک امتداد متصل اند، و نسبت BC به BE معلومست. پس، بنا بر آنچه در معطیات ثابت شده، CE معلومست. سپس گفته است که نسبت HC به CE را مثل نسبت مربع AB به مربع AH قرار می‌دهیم. ولی نمیگوید که این مطلب چگونه دانسته می‌شود،



زیرا این مطلب ناچار محتاج به قطوع مخروطی است، و در کتاب کره و اسعوانه، جز درین مورد، چیزی که مبنی بر قطوع مخروطی باشد نیامده است، و باین جهت ارشمیدس این را نیز مسلم گرفته. و شکل چهارم [که بدان اشاره شد] عبارتست از تقسیم کره بوسیله‌ی سطحی مستوی به نسبت معلومی.

و ماهانی [در تحلیل مقدمه‌ی مذکور] اصطلاحات جبرها را بکار برد، و چون تحلیل منجر به معادله‌ای بین اعداد و اموال و کعب‌ها شد، و نتوانست آنرا بوسیله‌ی قطوع مخروطی حل کند، آنرا ممتنع شمرد، و با مقام فضل و تقدم فاضل مزبور درین فن، حل صنفی از اصناف مذکور براو پوشیده ماند؛ تا ابو جعفر خازن^{‡‡} ظاهر شد، و راهی برای حل آن یافت، و آنرا در رساله‌ای آورد.

(†) § ۳۰۴۰۰۰۱

(‡) رجوع شود به § ۳۰۷۰۱

(‡‡) § ۳۰۴۰۰۰۱

و ابونصر ابن عراق مولی امیر المؤمنین [☆]، از اهل خوارزم، پرداخت به حل مقدمه‌ای که ارشمیدس در استخراج ضلع هفت ضلعی [منتظم محاطی] در دایره آورده - و آن مربعی است دارای خاصیت مذکور [؟] - و او نیز اصطلاحات جبریها را بکار می‌برد، و بالنتیجه، تحلیل منجر شد به مکعب و مالهایی که معادل اعدادی است، و این معادله را بوسیله‌ی قطوع مخروطی حل کرد، و شك نیست که این مرد از بزرگان ریاضیون است.

و مسئله‌ای که ابو سهل کوهی ^{☆☆} و ابوالوفای بوزجانی ^{☆☆☆} و ابوحامد صفانی و جماعتی از رفقای ایشان که در بغداد مقیم دربار عضدالدوله بودند از حل آن عاجز ماندند اینست که می‌خواهیم ده را به دو جزء تقسیم کنیم که مجموع مربعین آنها و خارج قسمت جزء بزرگتر بر جزء کوچکتر [معادل] هفتاد و دو شود [†]، و تحلیل [این مسئله] منجر شد به اموالی که معادل مکعب و جذرها و اعداد است. و این فضلا مدت مدیدی درین مسئله حیران ماندند تا ابوالجود ^{††} آنرا حل کرد، و آنرا در کتابخانه‌های پادشاهان سامانی محزون نمودند.

پس این معادلات سه صنف از مرکبات ^{†††} است، که دو از آنها سه‌تائی و یکی چهارتائی است، و یگانه صنف مفرد، یعنی معادله‌ی مکعب با اعداد. و این معادلات را فضلی پیش از ما حل کرده‌اند، ولی از آثار آنان در ده صنف دیگر، و نه باین تفصیل

(☆) مقصود ابونصر منور ابن علی ابن عراق مولی امیر المؤمنین، معروف به ابونصر عراق (متوفی در ۴۵۸ هـ ق)، است که از ریاضیون و منجمین معروف و معاصر ابوریحان بیرونی بوده. برای اطلاع بیشتر رجوع شود به: دکتر محمد معین، چهار مقاله‌ی عروضی سمرقندی، ص ۴۱۹ - ۲۲.

$$\S 3040003 \text{ (☆☆☆)} \qquad \S 3040005 \text{ (☆☆)}$$

$$\S 3040008 \text{ (††)} \qquad \S 5080401 \text{ (†)}$$

(†††) یعنی از مقترنات. این سه صنف عبارتست از:

$$x^3 + a = cx^2 \quad (\text{معادله‌ی ماهانی})$$

$$x^3 + cx^2 = a \quad (\text{ابونصر عراق})$$

$$x^3 + bx + a = cx^2 \quad (\text{ابوالجود})$$

[که در طبقه بندی سابق مذکور شد]، چیزی به ما نرسیده است [☆] و اگر فرصتی دست دهد، و توفیق رفیق شود همه‌ی این اصناف چهارده گانه را با جملگی شاخه‌ها و حالات آنها و تمیز آنچه ممکن است از آنچه ممتنع است گرد می‌آورم، تا رساله‌ای شامل عده‌ای از مقدمات که در اصول این فن فواید عظیم دارد پرداخته آید ^{☆☆}. و در این کار به ریسمان توفیق الاهی چنگ میزنم، و بر او توکل می‌کنم، که در همه‌ی کارها یاری دهنده همو و توانائی و نیرومندی از اوست. جلّت عظمته.

[§ ۶۰۵ حل معادله‌ی مثلث معین]

پس از تمهید این مقدمات به مسئله‌ی خود باز میگردیم، و آن جستجوی مکعبی است که با دو یست ضلع خود معادل بیست مربع ضلع آن و دو هزار عدد باشد [†].

(☆) رجوع شود به § ۵۰۱۱۰۱ در شرح کارهای منسوب به ابوالجود در این باب.

(☆☆) رجوع شود به § ۴۰۴۰۱ ص ۱ (۱۵۲).

(†) $x^3 + 2000x = 20x^2 + 2000$ ، و آن حالت خاصی از صنف مذکور در § ۵۰۹۰۳ است.

ترسیمات: $AB = 20$ ، $ER = 200$ (مستطیل طرف راست)، $EH = 1$ (همان مستطیل)، $RH = 200$ (پس $-RH = 200$)، $AC = \sqrt{200}$ ، $AC^2 = 200$ ، $AD = 2000$ ، $DB = 100$ ، $200 = 10$

نیمدایره‌ی BKD بقطر BD ؛

هذلولی متساوی‌القطرین NDK مار بر D با مجانبهای CE و CA .

حکم: $x = AL$.

برهان. بموجب خاصیت عمومی هذلولی، $EA = KC$ ؛ پس $EA - EM + DK = KC$

یا $AK = DT$ ، پس $AK = DT$ ، و لهذا $AL : LT = DL : LK$ ، و لهذا

$$(۱) \quad \overline{AL}^2 : \overline{LT}^2 = \overline{DL}^2 : \overline{LK}^2.$$

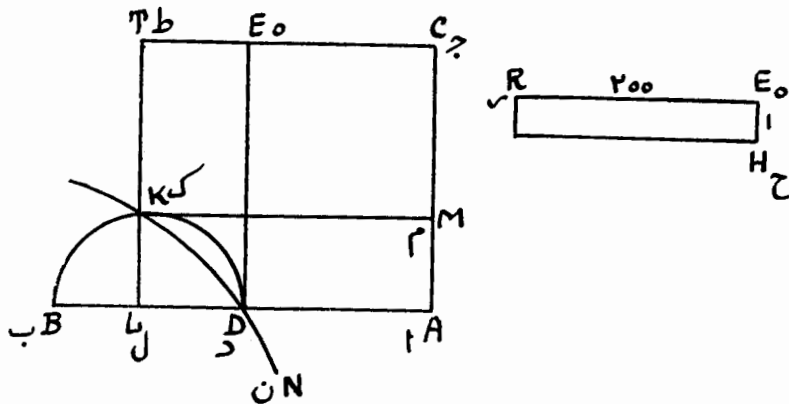
بعلت خاصیت دایره، $DL : LK = LK : LB$ ؛ پس

$$(۲) \quad \overline{DL}^2 : \overline{LK}^2 = (DL : LK)(LK : LB) = DL : LB.$$

بموجب (۱) و (۲)، $AL^2 : \overline{LT}^2 = DL : LB$ ، پس بترتیب،

بقیه در ذیل صفحه‌ی بعد

خط AB را مساوی عده‌ی مربعات قرار می‌دهیم، و آن بیست است. و خط ER را [در قسمت طرف راست، شکل] دو بیست، و خط EH را [در همان قسمت شکل] واحد می‌گیریم. پس سطح مستطیل RH [در همان قسمت شکل] دو بیست است. اینک، بنا بر آنچه در شکل چهاردهم مقاله‌ی دوم کتاب اصول ثابت شده، مربعی مساوی مستطیل RH می‌سازیم، و فرض می‌کنیم ضلع این مربع AC باشد، و آن بر AB عمود است، و مساوی جذر دو بیست می‌باشد. و AD عبارتست از خارج قسمت عدد بر عده‌ی جذرها، و آن ده است، زیرا عدد دو هزار است، و عده‌ی جذرها دو بیست است، و هر گاه دو هزار بر دو بیست تقسیم شود ده خارج می‌گردد. و DB نیز ده است. اینک بر [قطر] DB نیم‌دایره‌ی DKB را می‌سازیم، و ED را موازی AC



می‌کشیم، و مستطیل AE را تمام می‌کنیم، و بطریقی که آپولونیوس فاضل در شکل

$$\begin{aligned} \overline{AL}^2 \cdot LB &= \overline{LT}^2 \cdot DL, & \text{بقیه‌ی ذیل صفحه قبل} \\ \overline{AL}^2 \cdot LB + \overline{LT}^2 \cdot AD &= \overline{LT}^2 \cdot DL + \overline{LT}^2 \cdot AD, \\ \overline{LT}^2 \cdot AL &= \overline{LT}^2 \cdot AD + \overline{AL}^2 \cdot LB, \\ 200 \cdot AL &= 2000 + \overline{AL}^2 \cdot LB, \\ \overline{AL}^2 + 200 \cdot AL &= 2000 + \overline{AL}^2 \cdot LB + \overline{AL}^2 \\ &= 2000 + \overline{AL}^2 \cdot AB \\ &= 2000 + 20 \overline{AL}^2, \end{aligned}$$

و هوالمطلوب.

پنجاه و نهم از مقاله‌ی اول کتاب مخروطات و شکل‌های پنجم و ششم این کتاب آورده، قطع زایدی میسازیم که بر نقطه‌ی D بگذرد و خطوط AC و EC آنرا قطع نکنند، - چو ساختن این قطع جز بوسیله‌ی این سه شکل اتمام نپذیرد - و آن قطع NDK است، و دایره را در نقطه‌ی K قطع میکند. سپس از K عمود KL را بر AB اخراج میکنیم. حال گویم ضلع AL همان ضلع مکعبی است که با دو بست ضلع خود معادل بیست مربع AL بعلاوه‌ی دو هزار عدد است.

برهان آن. LK را مستقیماً امتداد میدهیم تا خط EC را در نقطه‌ی T قطع کند، و KM را موازی AL میکشیم. چون KT موازی ED و KM موازی AD است، سطح EA که زوایای آن قائمه‌اند مساوی سطح KC است که زوایایش قائمه‌اند، زیرا دو نقطه‌ی K و D بر محیط قطع زایدی قرار دارند که خطوط AC و CT آنرا قطع نمیکنند، و از هر یک از آنها دو خط به خطوطی که [قطع را] تلاقی نمیکنند کشیده شده که موازی دو خطی هستند که از نقطه‌ی دیگر کشیده شده - و برهان این مطلب را آیوئونوس فاضل در شکل چهارم مقاله‌ی دوم کتاب مخروطات آورده است. اما وضع دایره‌ی DKB معلومست (زیرا قطر آن که DB است از حیث وضع و مقدار معلومست). و دو خط AC و CT از حیث وضع معلومند، و وضع نقطه‌ی D معلومست؛ پس وضع قطع NDK معلومست. و چون وضع دایره‌ی DKB [نیز] معلوم است، وضع نقطه‌ی K معلوم است. پس وضع خط KL معلومست؛ و لهذا، وضع نقطه‌ی L معلوم میباشد؛ و چون وضع A [نیز] معلومست، مقدار خط AL معلوم است. و این مطالب از کتاب معیبات آشکار است.

امانابت کردیم که سطح EA مساوی سطح KC است. پس، چون سطح EM را که مشترك است اسقاط کنیم، دو سطح مساوی DM و EK باقی میماند، و چون سطح DK را به هر دو بیفزائیم، سطح AK مساوی سطح DT خواهد بود؛ و چون زوایای این دو سطح متساوی اند - زیرا زوایای آنها قائمه‌اند - بنابراین آنچه اقلیدس در شکل

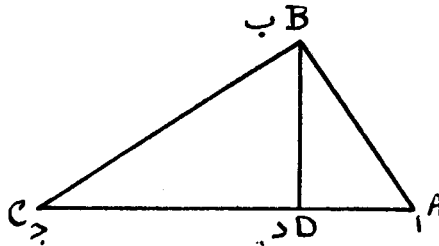
چهاردهم مقاله‌ی ششم ثابت کرده ، اضلاع آنها متکافسی می‌باشند ، و نسبت AL به LT مثل نسبت DL به LK است . پس مربعات آنها نیز متناسبند ، و نسبت مربع AL به مربع LT مثل نسبت مربع DL به مربع LK است . اما نسبت DL به LK مثل نسبت LK به LB است . پس نسبت مربع DL به مربع LK مثل نسبت LK به LB است . پس لازم می‌آید که نسبت مربع AL به مربع LT مثل نسبت DL به LB باشد . بالنتیجه ، حاصل ضرب مربع AL در خط LB مساوی حاصل ضرب مربع LT در خط DL است ، و چون حاصل ضرب مربع LT در AD را به هر دو بیفزائیم حاصل ضرب مربع LT در AL مساوی حاصل ضرب مربع LT در AD بعلاوه‌ی حاصل ضرب مربع AL در LB خواهد بود . اما مربع LT مساوی عده‌ی اضلاع یعنی دو‌یست است ، و AL همان ضلع مکعب . پس دو‌یست ضلع مکعب مساوی حاصل ضرب مربع LT در ضلع AD بعلاوه‌ی حاصل ضرب مربع AL در LB است ، و چنانکه گذشت ، حاصل ضرب مربع LT در AD مساوی عدد است ، و آن دو هزار است . پس دو هزار عدد و حاصل ضرب مربع AL در LB مساوی دو‌یست ضلع مکعب می‌باشد ، و چون مکعب AL را ، که همان حاصل ضرب مربع AL در AL است ، به هر دو بیفزائیم ، مکعب AL و دو‌یست AL مساری دو هزار عدد و حاصل ضرب مربع AL در AL و حاصل ضرب مربع AL در LB خواهد بود . اما حاصل ضرب مربع AL در AL بعلاوه‌ی حاصل ضرب مربع AL در LB مساوی حاصل ضرب مربع AL در AB است ، و چون AB را بیست فرض کرده بودیم ، حاصل ضرب مربع AL در AB بیست مربع AL می‌باشد . پس مکعب AL با دو‌یست خط AL مساوی دو هزار عدد با بیست مربع ضلع مکعب است ، و این همانست که می‌خواستیم ثابت کنیم .

[§ ۶۰۵۰۱ رسم مثلث معین]

و بعد از ذکر این مقدمات ، مثلث ABC را دگر باره می‌کشیم ، و AD را مُنطق قرار می‌دهیم و آن ده است . درین صورت خط DB همان خط AL [شکل اخیر]

است که ثابت کردیم از حیث مقدار معلومست. و اینکه میگویم مقدارش معلومست مقصودم این نیست که کمیت آن معلومست - چو این دو مطلب متفاوت اند - بلکه از «معلوم بودن از حیث مقدار» همان معنی را قصد داریم که اقلیدس در کتاب معیّیات قصد داشته، و آن اینست که مقداری مساوی آن توان یافت*.

و اینک به مرحله‌ی ترکیب می‌پردازیم. خط AD را ده میگیریم، و BD را بزایوهی قائمه بر آن و مساوی خط AL از شکل سابق قرار میدهیم، و AB را وصل میکنیم، و از نقطه‌ی B عمود BC را $[AB]$ می‌کشیم، و AD را مستقیماً امتداد می‌دهیم تا عمود را در نقطه‌ی C قطع کند. پس ناچار لازم می‌آید که مثلث ABC



قائم الزویه باشد (یعنی زاویه‌ی B از آن قائمه است)، و خط AB با عمود BD مساوی وتر AC باشد، و خط AB با خط AD مساوی خط BC باشد، و این همانست که می‌خواستیم توضیح دهیم.

[§ ۶۰۶ حل مسئله‌ی § ۶۰۱ †]

و اینک به ربع دایره‌ی AB از دایره‌ی $ABCD$ باز میگردیم، و در آن قطرهای

(۵) § ۳۰۲۰۳۰۲.

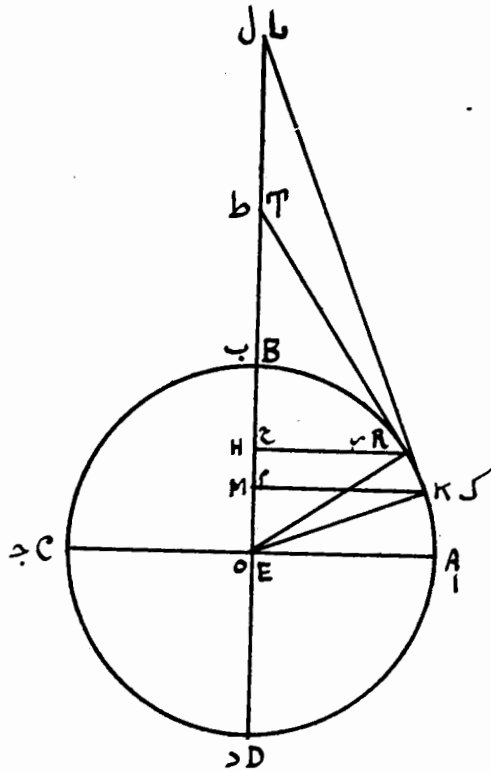
(†) پس از حل مثلث معین (§ ۶۰۰۱)، خیام به حل مسئله‌ی موضوع رساله (§ ۶۰۱) میپردازد، و چون در § ۶۰۰۱ و نیز در § ۶۰۶ حروف A, B, C, D, E, F را بکار برده، برای تمیز آنها، حروف مربوط به شکل § ۶۰۰۱ را به لفظ «متقدم» مقید می‌کند. ما در این مورد حروف A و B و غیره را بکار می‌بریم.

اینک توضیح استدلال خیام.

چنانکه در § ۶۰۰۱ معلوم شد، مثلث قائم‌الزاویه‌ی A, B, C را واجد شرط

بقیه در ذیل صفحه‌ی بعد

AC و BD را ، که یکدیگر را بزائویه قائمه قطع می کنند ، می کشیم . و مرکز



دایره نقطه‌ی E است . و از خط CD از مثلث ABC در شکل سابق خط CT را مساوی

بقیه‌ی ذیل صفحه‌ی قبل

$$(۱) \quad A,B + B,D = A,C,$$

میسازیم ، و C,T را مساوی B,D جدا میکنیم . سپس در دایره‌ی مفروض نقطه‌ی H را بر شعاع EB چنان تعیین می کنیم که

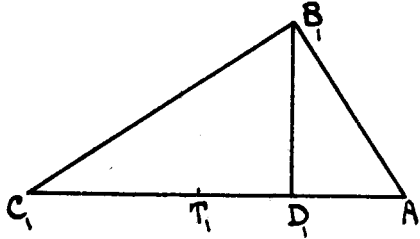
$$(۲) \quad EH : HB = A,D : D,T ,$$

و ER و HR را مماس RT را میکشیم ، و کوئیم مثلث ERT بامثلث A,B,C متشابه است . برای این منظور کافی است ثابت کنیم که زوایای REH و B,A,C و مساویند . اثبات به تشخیص حالات و برهان خلف است . اگر اولی کمتر از دومی باشد ، چون زاویه KEB را مساوی بقیه در ذیل صفحه‌ی بعد

عمود BD جدا می‌کنیم، و نصف قطر دایره را که خط EB در شکل حاضر است،

بقیه‌ی ذیل صفحه‌ی قبل

دومی جدا کرده مماس KL را بکشیم، و مثلث EKL و A,B,C متشابه خواهند بود، و لهذا



اولا با توجه به (۱)، $EK + KM = LE$ ، و یا

$$(۳) \quad KM = BL$$

و ثانیاً

$$(۴) \quad LM : KM = C,D : D,B ,$$

$$(۵) \quad T,C : D,A = BL : ME .$$

از (۴) بموجب (۳) و $C,T = B,D$ ، نتیجه میشود $LM : LB = C,D : C,T$ ،

و یا به تفصیل نسبت،

$$(۶) \quad MB : LB = D,T : C,T ,$$

از (۵) و (۶) نتیجه میشود،

$$EM : MB = A,D : D,T ,$$

ولهذا، بموجب (۲)،

$$EM : MB = EH : HB .$$

اما $EM < EH$ ؛ پس $MB < HB$ ، و حال آنکه HB جزء MB است. پس فرض کوچکتر بودن زاویه‌ی REH از زاویه‌ی B,A,C باطل است. به همین قیاس معلوم میشود که فرض کوچکتر بودن دومی از اولی نیز باطل است. پس دو زاویه‌متساوی‌اند، و لهذا دو مثلث ERT و A,B,C متشابهند.

از تشابه دو مثلث معلوم میشود که $ER + RH = ET$ ، و لهذا $BT = RH$.

اینک کوئیم از طرفی $HB \cdot RH = DH$ و از طرف دیگر $EH \cdot HT = RH^2$ پس

ولهذا $DH : EH = HT : HB$ ، و $DH \cdot HB = EH \cdot HT$ ، و به تفصیل نسبت، $DE : EH = BT : HB$ ، و یا $AE : RH = EH : HB$ بالآخره، و هوالمطلوب.

بطریقی که اقلیدس در شکل سیزدهم مقاله‌ی ششم ثابت کرده ، در نقطه‌ی H به نسبت AD به DT از مثلث ABC شکل سابق تقسیم می‌کنیم ، و عمود HR را می‌کشیم ، و ER را وصل می‌کنیم ، و از نقطه‌ی R خطی میکشیم که بر دایره مماس باشد ، و آن خط RT است . سپس EB را مستقیماً امتداد می‌دهیم تا RT را در نقطه‌ی T قطع کند . پس مثلث ERT متشابه با مثلث ABC از شکل سابق است . برهانش اینکه زاویه‌ی REH مساوی زاویه‌ی BAC است ، چو اگر چنین نباشد ، یکی از آن دو ، مثلاً BAC بزرگتر است . در این صورت ، از نقطه‌ی E از خط EB زاویه‌ای مساوی زاویه‌ی BAC جدا می‌کنیم ، و آن زاویه‌ی KEB است ؛ و از نقطه‌ی K خطی بر دایره مماس می‌کنیم ، و آن خط KL است که ET را در نقطه‌ی L قطع می‌کند . پس مثلث EKL با مثلث ABC متشابه است ، زیرا زوایای آنها متساوی اند . و چون از نقطه‌ی K عمود KM را بر EB اخراج کنیم مجموع EK و KM مساوی LE خواهد بود ، و چون EB مساوی EK است ، BL مساوی KM است . اما نسبت LM به KM مثل نسبت CD به DB است ؛ پس نسبت ML به LB برابر نسبت CD است به BD ، و به تفضیل ، نسبت MB به BL مثل نسبت DT به CT خواهد بود . [از طرف دیگر] نسبت TC (که مساوی DB است) به DA برابر نسبت BL (که مساوی KM است) به ME است . پس ، در نسبت مساوات ^۵ ، EM به MB مثل نسبت AD به DT است . ولی نسبت EH به

(۵) استدلال به قاعده‌ی نسبت مساوات اینست که اگر دو دسته از مقادیر مانند

$$a, b, c, \dots, k, l, \\ A, B, C, \dots, K, L,$$

اولاً از حیث عده مساوی باشند ، و ثانیاً

$$a : b = A : B, \quad b : c = B : C, \quad \dots, \quad k : l = K : L,$$

می‌توان نتیجه گرفت که $a : l = A : L$.

قاعده‌ی نسبت مساوات مضطرب آنست که اگر

$$a : b = B : C,$$

$$b : c = A : B,$$

$$\text{آنگاه } a : c = A : C$$

بقیه در ذیل صفحه‌ی بعد

HB را مثل نسبت AD به DT قرار داده بودیم . پس نسبت EM به MB مثل نسبت EH به HB است . ولی EM ، که اولی است ، کمتر از EH است ، که سومی است ؛ پس ، بنا بر آنچه در [مقاله‌ی] پنجم اصول ، در شکل چهاردهم این مقاله ، ثابت شده ، لازم می‌آید که MB که دومی است ، کمتر از HB باشد ، که چهارمی است . ولی MB از HB بزرگتر است ، و این محال است .

پس زاویه‌ی REH کمتر از زاویه‌ی BAC از مثلث ABC سابق نیست ، و [بهمین قیاس معلوم می‌شود که] بزرگتر از آن هم نمی‌باشد . پس مثلث RET با مثلث ABC سابق متشابه است ؛ و لهذا مجموع ER و RH مساوی ET است ، و بنابراین ، BT مساوی RH است . ولی حاصل ضرب DH در HB مساوی مربع HR می‌باشد ؛ و همچنین حاصل ضرب EH در HT مساوی مربع HR است . پس حاصل ضرب DH در HB مثل حاصل ضرب EH در HT است ، و لهذا ، بنا بر آنچه در شکل شانزدهم مقاله‌ی ششم [اصول] ثابت شده ، این چهار خط اربعه‌ی متناسبه هستند . پس ، نسبت DH ، که اولی است ، به HE ، که دومی است ، مثل نسبت HT است ، که سومی است ، به HB ، که چهارمی است ؛ و به تفضیل ، نسبت DE به EH مثل نسبت BT است به BH . اما DE مساوی AE و BT برابر RH است . پس نسبت AE به EH مثل نسبت RH به HB است ، و به تبدیل ، نسبت AE به RH برابر نسبت EH است به HB . پس ربع دایره را بدو قسمت در نقطه‌ی R تقسیم کردیم و از R عمود RH را [بر EB] کشیدیم بطوریکه نسبت AE ، که نصف قطراست ، به RH مثل نسبت EH به HB گردید ، و این همانست که می‌خواستیم ثابت کنیم .

بقیه‌ی ذیل صفحه‌ی قبل

برای مزید اطلاع رجوع شود به : تحریر اقلیدس ، ۷۲ و ص ۸۵-۸۱ (فضای ۲۲ و ۲۳)؛

هیث ، سیزده مقاله ، جلد ۲ ، صفحات ۱۱۵-۱۰۶ و ۱۷۹-۱۸۳ .

در مورد مذکور در متن ، دو دسته مقادیر مورد بحث عبارتند از

$$\begin{array}{ccc} MB, & LB, & ME, \\ DT, & CT, & DA. \end{array}$$

پس بقاعده‌ی نسبت مساوات ، $MB : ME = DT : DA$ ، و لهذا $ME : MB = DA : DT$

[§ ۶۰۷ در محاسبه‌ی مقدار تقریبی جواب]

و کسی که بخواهد [جواب مسئله را] به حساب بداند، چون به دقت بنگرد، راهی بدان نخواهد داشت، زیرا چیزهایی که به قطوع مخروطی استخراج می‌شود استخراج آنها به حساب ممکن نیست، و اگر جوندنه به تخمین قانع باشد، براوست که به جداول اوتار مجسطی یا جداول جیبها و سهمها^(*) در زیج معتمد رجوع کند، و در جدول قوسی بجوید که نسبت شصت که، بر حسب فرض، نصف قطر دایره است، به جیب آن قوس مثل جیب تمام آن باشد به سهمش^(†)؛ و این قوس را قریب پنجاه و هفت درجه از تقسیماتی که بر حسب آنها دایره سیصد و شصت [درجه] است، و جیب آنها قریب پنجاه جزء و سهمش را نزدیک بیست و هفت جزء و ثلث جزء، و جیب تمام آنها نزدیک سی و دو جزء و دو ثلث جزء می‌یابیم. و ممکن است در دقت [محاسبه] بیش از این کوشید تا جایی که تفاوت [مقدار واقعی با نتیجه‌ی محاسبه] به اندازه‌ای تقلیل یابد که بحسب در نیاید.

(*) سهم α یعنی $1 - \cos \alpha$.

(†) اگر زاویه‌ی BER (شکل ص ۲۵۶) را به α نمایش دهیم، معادله‌ی مسئله چنین خواهد بود:

$$1 : \sin \alpha = \cos \alpha : (1 - \cos \alpha),$$

و از آن نتیجه میشود:

$$\sin \alpha = 0,8395, \quad \alpha = 57^\circ 5' 30'', \quad \cos \alpha = 0,5433.$$

باید دانست که ریاضیون اسلامی، به پیروی از یونانیان، قطر دایره را به ۱۲۰ قسمت متساوی تقسیم می‌کردند، و هر قسمت را يك جزء یا جزء قطر میخواندند، و جزء قطر را - مانند درجه - به دقایق و ثوانی و غیره تقسیم میکردند. واضحست که هر جزء قطر برابر $3:\pi$ درجه ولهدا کمی از درجه کمتر است. اینک اگر α قوسی از دایره‌ی مثلثاتی و $\sin \alpha$ جیب معمولی آن و $\sin \alpha$ جیب آن بر حسب اجزای قطر باشد، واضح است که

$$\sin \alpha = 60 \times \sin \alpha \text{ (جزء قطر)}$$

پس، در مثال مورد بحث، $\sin \alpha = 50,37$ ، و این مقدار بر حسب اجزای قطر است (خیام

مقدار ۵۰ را میدهد).



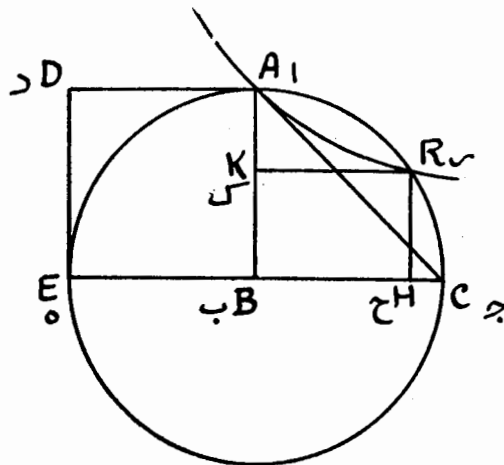
این بود آنچه ، با پراکندگی فکر و آشفتگی خاطر و گرفتاری به کارهایی که مانع پرداختن باین قبیل جزئیات است ، درین باب بر خاطر من گذشت . و اگر بلند پایگی این مجلس - که بلند پایگی آن بردوام بماند - و حق سؤال کننده‌ی این مسئله - که خداوند همواره او را مؤید بدارد - نبود ، من خیلی ازین وادی دور بودم ، چه کوشش من صرفاً معطوف به مطالبی است که در نزد من مهمتر از اینگونه مطالب جزئی است ، و همت من مصروف آنهاست . و خدای تعالی در همه حال مورد شکر و ستایش است ، و امید از او اینکه توفیق کارهای خیر عنایت فرماید که اجابت دعا در دست اوست .

مسئله

ربع دایره‌ی AC به مرکز B مفروض است، و میخواهیم AB را چنانکه دانستی تقسیم کنیم.*

بر AB شکلی چهارضلعی میسازیم که اضلاعش و زوایایش متساوی باشند، و آن AE است. پس وضع خطوط BE و ED معلوم است. و وضع E معلوم می‌باشد. پس بر A قطع زایدی می‌کشیم که خطوط BE و ED آنرا قطع نکنند، و آن قطع AR است. پس وضع این قطع معلوم می‌باشد. و اگر AC را وصل کنیم ناچار بر قطع مماس خواهد بود، و چون AC در داخل دایره است لازم آید که قطع زاید دایره را قطع کند. فرض کنیم نقطه‌ی تقاطع باشد. وضع R معلوم است. حال دو عمود RH و RK را می‌کشیم و گوئیم عمل تمامست.

برهانش اینکه نقاط A و R بر محیط قطع واقعند، و از هر يك دو خط اخراج شده که موازی دو خط اخراج شده از دیگری است. پس سطح RE مساوی سطح AE است، و چون KE را که مشترك است اسقاط کنیم نتیجه می‌شود که KH مساوی KD است، و چون زوایای این دو شکل متساویند اضلاعشان متکافی‌اند، و نسبت AD به KR مثل نسبت BK به KA است. تمام شد.



[در این شکل RK را تا محل تلاقی آن با ED امتداد دهید]

(*) یعنی بطوری که $BC : KR = BK : KA$

عكس

رساله‌ی خيام

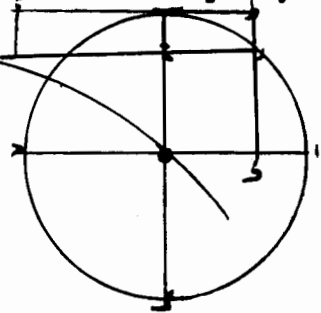
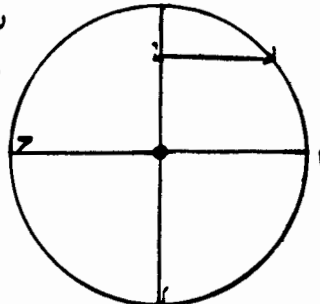
در تحليل يك مسئله به معادله‌ی درجه‌ی سوم

که اصل آن در

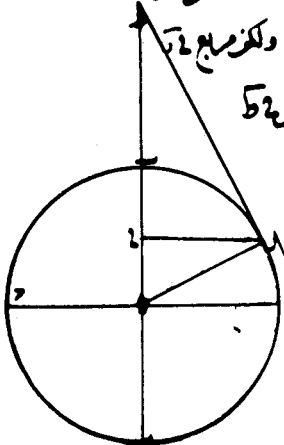
کتابخانه‌ی مرکزی دانشگاه تهران

مضبوط است

هذه مسائلنا لاسم الله الرحمن الرحيم وهو مشهور لا يفتي الفصح عن ابي الهيثم
 شريهان تقسم بسبع دوائر اربعة اقسام وبعين على نقطة مثل ذلك ونخرج عموداً
 على نظرة فيكون نسبة آه الى آه كغنة آه الى آه و مركز الدارين وآه نصف القطر
 نصف القطر فاننا لانافد فمنا حتى نرى القطر المار معلوم
 تركيب على ذلك الصفة فمبدأ اربعة اقسام و مركزها آه ونخرج آه
 ونقاطها على ذواها فانه ونخرج عموداً يكون نسبة آه
 اليه كغنة آه الى آه ونخرج عموداً كآه طم ونتم سطح آه
 بعد ان جعلنا خط آه مثل آه فلا ينسب آه الى آه كغنة آه
 الى آه و آه مثل آه يكون نسبة آه الى آه ضرب آه في آه مساوياً لضرب آه في آه كما
 بينه الفيلسوف في توفيق الاصول وضرب آه في آه مثل سطح آه وضرب آه في آه مثل سطح
 آه فيكون سطح آه مساوياً لسطح آه ونحمل سطح آه
 شراً فيكون سطح آه مساوياً لسطح آه فان عملنا قطاراً
 لايقا وخط آه طم وير على نقطة كما بينه الجوهري
 في نظرية المقالة الاولى من كتاب المخروطات والشكل
 و من المقالة الثانية من هذا الكتاب ان هذا العمل يتم
 الاشكال الثلثة فان ذلك القطع الزايد يمر على نقطة لا حجة كما بينت في عكس الشكل الثامن
 المقالة الثانية من كتاب المخروطات ونقطة معلومة الوضع وخط آه معلوم الوضع والقطر
 ان نقطة عند التركيب غير معلومة الوضع لانها كانت معلومة الوضع لكأن نقطة معلومة
 الوضع لا خط آه معلوم القطر فيكون خط آه معلوم القطر ولكان الشكل معلوماً وكذا

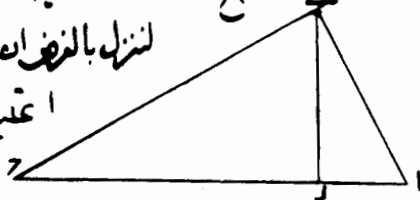


خط طه غير معلوم الوضع لانه لو كان معلوم الوضع لكانت نقطه ط معلومة الوضع ولر كانت نقطه
 و معلومة الوضع لكان خط ط معلوم القدر ولر كان خط ط معلوم القدر لكان الشكل معلوما
 وليس كذلك ان المقصود علم الشكل فلو كانت نقطه آ معلومة الوضع او خط ط معلوم الوضع لكان
 يمكن ان يعمل الشكل وما بال المقصود عند التركيب بسهولة وليس المرفوع براهدها سهلته بحيث
 هذه الطريقة للباحث المستبر ككتاب المخروطات لا يوصل الى المطلوب بطريقه اخرى لكنه
 لهذه الطريقة واما افردت هذه الطريقة مع صعوبتها ليكون شبه تمهيد للتعلم وتوطئة له ولم
 اتما ولم اركبها على الوجه الهندسي لصعوبتها وكثرة افتقارها الى عدة مفاهيم وغيره من القطوع
 المخروطية فالتعميم فرشا من العالمين بتطوع المخروطات بعد ما حصلت له الطريقة التي اذكرها فانها وان
 كانت ايضا حتمية الاستدلال فخرطية فهي اهمل بكثير من الاول وستدنا بها اهم منفعة فاقول
 بعون الله بنسب الاشكال بعينه ونزل بالتحليل اننا قد فعلنا ما اردنا وصارت نسبة آه الى اربع
 كنسبة آه الى اربع وتخرج من نقطه آ خطا يماس الدايه وهو رط على اوجنه المقيد في مركز
 ويخرج ه على استقامته حتى ينقطع للخط المماس على نقطه ط ونصل رة فثلاثه ه رط
 زاوية ر منه قائمه وضع زاوية ر ط و رة الى القاعدة فط ياتين في مثلثه ر ط و يكون نسبة
 الا اربع كنسبة آه الى اربع ف يكون مربع ر مساويا لضرب آه في ح و ذلك مربع آه في ح
 مساو لضرب ر في ح فيكون ضرب ر في ح مساويا لضرب آه في ح وفي ح
 فيكون نسبة آه الى ر كنسبة ط الى ح على ما تين في ر ط و
 فالتفصيل يكون نسبة ه الى ر كنسبة ط الى ر و قد تكا
 نسبة آه الى اربع كنسبة ه الى ح فالتسلسل يكون نسبة آه
 الى ه كنسبة ر الى ح وقد كانت نسبة رة الى ح كنسبة ط
 الى ح فيكون نسبة رة الى اربع كنسبة ط الى ح والمعاير



التي قسمتها الى ح و واحد بعينه متساوية فانها ايضا متساوية كما تين في شكل ط و م قاله في ر ح
 فيكون ر ح مساويا لـ ط و ه مثل ح و فيكون مجموع ه ر ح مساويا لخط ه ط فقدرى
 المحل ان مثلث قائم الزاوية بشرط ان يكون وتر الزاوية القائمة مساويا لاه الضلعين المحلين

بالرأيه مجموعها لا العود الخارج منها لا وترها نكلما علمنا مثلنا قائم الزاوية هذه الصفة المتنازيبنا
 الشكل على الصفة الهندسي وان هذه الهندية عن هذا المثلث هذه الصفة عظيمة المنفعة في اشارة
 هذه الاشكال وله خواص اخرى يذكر بعضها في بعض المناظر المنفعة في اكثر اشياء هذه ^{مسئله}
 اقول ان هذا المثلث لا يمكن ان يكون متساوي الساقين لانه لو كان ضلع هـ ر مثل د هـ لكان
 د هـ مثل د ط وكان العمود ساويا لكل واحد منها وكان هـ ط ضعف العمود وكان مجموع هـ ر
 والعمود اعظم من الوتر وهو ما ساد ياله هـ ف واقول ان هذا المثلث هـ ر اصغر من هـ ط
 لانه لو كان اعظم منه لكان هـ د اعظم من د ط وكان د ر اقل من د هـ وهو الخط اوسط في خطي هـ د و د
 اعظم من هـ ط وقد فرض د ر مثل د ط فيكون د ط اعظم من ط هـ الجز اعظم من الكل هذا محال
 تبين ان امثلك على هذه الصفة يكون الضلع الاصغر مع العمود ساويا بضع الاعظم فذلك
 اردنا ان تبين ان خواصه ان الضلع الاعظم من الضلعين المتعينين بالزاوية القائمة ساد مجموع
 الاصغر مع القطعة التي يتردها العمود من الوتر من جانب الضلع الاصغر ولكن شائنا ان نذكر الشكل
 المتقدم اقول ان مجموع هـ ر هـ ساد بضع د هـ برهان ان نسبة هـ د الى هـ ر كنسبة د ط
 الى ر ح فبالتركيب يكون نسبة د هـ الى هـ ر كنسبة د ط الى ر ح وبالمقيد يكون نسبة د هـ الى
 هـ ر كنسبة هـ د الى ر ح ولكن نسبة هـ د الى ر ح كنسبة هـ ر الى ر ح كنسبة د ط
 الى هـ ر كما لنا برثلثة هـ ر ح فيكون نسبة د ط الى هـ ر كنسبة د هـ الى هـ ر فيكون د ط ساويا
 الى هـ ر وهو مثل مجموع هـ ر في مجموع هـ ر ح مثل د ط وذلك ما اردنا ان تبين ونرسل ما
 تقدمه ههنا فانما بضع مثل اسد وزاوية منه قائمة ونخرج من نقطة عمود سـ د على ا د و



لنزل بالنظر ان ضلع ا ب مع عمود سـ د جميعا مثل ا د حتى يودي
 اعني الى معلوم ثم تركيبه حتى يجعل لنا مثلثا بضع
 المتكافئة ولكن يكون متساوي الساقين الا ان

ر صاحب الضاعمة في سبيل طرت المحية باستقام المناظر اهل اجرة انك هذه المائدة
 فسنهم سبيلهم في ذلك وان لم يستهد الفاظ الجبرين جاز ويكون العود لصا الا ان هذه
 الاطراف اذا استقلت كان الضرب والقسمة اسهل وتضع خط ا د سطحا في العمود ولكن عشرة

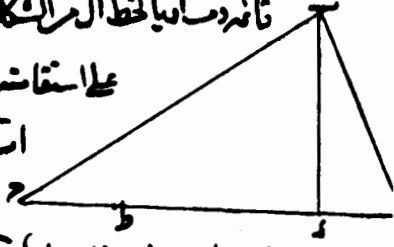
مقول كل لا يوجد الا مشخصا بالمراد واما الشئ فنزلته من القادر المتصله بنزله لفظ التسليم واما
المال فنزلته المايه المتأدى الاضلاع القائم الزوايا الذي ضلعه ذلك الخط التسليم المطلق
لفظ الشئ والمكعب هو الجسم الذي يحيط بستة سطح مربعة ومتساوية ومتساوية الاضلاع
قائمة الزوايا الذي ضلعه الخط التسليم المطلق عليه اسم الشئ واحد طوره المربع المطلق عليه اسم
المال فهو الحاصل من ضرب الشئ في شئ ثم ضرب المثلث في الشئ وقد بين عمله قليلا ليس عبره عليه
في ترجمته في كتابه في الاصول واما مال المال الذي هو عند الجبرين حاصل ضرب المال
في مثله فلا يفتقر في القادير المتصلة لان المايه الذي هو على كيف يمكن ان يضرب في شئ او في شئ
بذلك بعد ذلك في تعيين اربعة ابعاده والجسم لا يمكن ان يكون له اكثر من ثلثة ابعاد فجميع الاشياء
التي يخرج بالجبر اما يخرج من هذه الاربعة الاجزاء من فنزلت الناس ان الجبر صيلة في استخراج
الاعداد الجبرية فقد فرغ محال فلا تقتضي الظاهر من المختلفين بل الجبر والقابل له امر هذين
برهن عليها في مقاله من الاصول في محله وادمنه واسمها قال ما مال وثلثة اموال
ثلاثة وعشرين من العدد فصفا الاموال وضرب في مثله فزاده العدد واخذ جذره الجمع فكما
عنه وسبع ونقص منه نصف الاموال فبقى اربعة وهو المال وما المال ستة عشر ثم فنزل ان مال
المال استنبط بطري الجبر فهو ضيف الظن جدا لانه استنبط مال المال بل استنبط المال
فكانه مال وثلثة اجزاء بعد ثمانية وعشرين ثم استخراج الجذرا بالقالة الثانية وصار على
ان ذلك الجذرا مال وهذا سطر تطلع منه على اسرار ورجوع الى ما كنا فيه فنقول ان الثلثة
الاجناس الاول اعني الامداد والجذره والاهول عند المعاد لترجع الى الستة ثلثة فنزل
ثلثة فنزل ويمكن ان يعلم بجور لانه بالقالة الثانية على ما هو مذكور مشروح في كتاب الجبرين
واما اذا نظر في المكعب عمود جنه ويزيد ورايينه في المجهلات وخصاته المخروطات و
وقولها لكون المكعب مجسما اما فنزل انه ثلثة مكعب اموال وهو الجذره بعد الاعداد
ومكعب سيدك الجذره وهو اموال بعدك الاعداد ومكعب بعدك الاعداد ولا سيدك الاستبانة
الابالطرق العددية المعدة لاستخراج الكعاب واما بالطرق الهندسية التي يعمل بها محسب متوازي
السطوح مسادا بالجسم آخر متوازي الى سطح من بعض وتبقره اشياء اعتمد الاعمال المتطوع الخ

اضوا

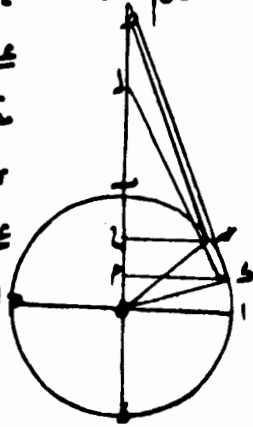
باضطرار الى آلات عند من يعرف المخروطات واما متفرقاته فهذه صفات امكنة واما آيات
 فالثلاث وكتب واورال بيدك اعداد ولا يخرج الا بالقطع وكتب واورال بيدك جندرا وكتب
 حكمه حكم مال و جندرا بيدك اعداد وكتب واعداد بيدك جندرا ولا يخرج الا بالقطع و
 كتب واعداد بيدك اموال ولا يخرج الا بالقطع وكتب و جندرا بيدك اعداد ولا يخرج
 الا بالقطع وكتب و جندرا بيدك اموال و يكون حكمه حكم مال و عدد بيدك جندرا واورال
 جندرا بيدك كتب و يكون حكمه حكم جندرا واعداد بيدك مال واورال واعداد بيدك كتب و
 لا يخرج الا بالقطع و جندرا واعداد بيدك كتب و لا يخرج الا بالقطع فهذه ستة انواع ثلثة
 ثلثة منها يخرج ثمانية الاسطوانات وستة منها لا يخرج الا بقطع المخروط واما الرباعي كتب
 بيدك اموال و جندرا واعداد كتب و جندرا واعداد بيدك اموال وكتب واورال واعداد
 بيدك جندرا كتب واورال و جندرا بيدك اعداد وكتب واورال بيدك جندرا واعداد
 كتب و جندرا بيدك اموال و اعداد وكتب واورال بيدك اموال و جندرا فهذه سبعة
 انواع رباعية لا يخرج شئ منها الا بقطع المخروطات فقد جعلت المركبات ثلثة عشر نوعا
 لا يخرج الا بقطع المخروط و نوع من الفروقات الا بقطع المخروط و هو كتب بيدك اعداد و
 اما المتعدون الرياضيون من غير اهل لساننا لم يبقوا على شئ من هذا ولم يصل اليه البناء لم يبق
 الا سائنا واما المتأخرين من اهل لساننا فاول واضطروا الى وصف ثلثة من هذه الاحداث
 الاربعة عشر هو الماهان المنسب فانه كان عملا المعتدلة التي اخذها ارشميدس مسكته شكل
 د من مقالة من كتاب الكره والاسطرانز وهو هذا الذي اذكره قال ارشميدس ان خط
 ا ب معلوم القدر متصلان على استقامة و نسبة د ا الورد معلومة فيكون ح د
 حلوما على ما بين في اعطيات سمر قال فحيلة نسبة د ا الورد كنسبة مربع ا ب الورد
 ا ب د ه
 ا د و لم يتدكف فلم هذا لان ه هنا
 محتاج الى قطع المخروط باضطرار ولم يزد في الكتاب شيئا سببا على القطوع الاضافا
 عنها ايضا سلبا والشكل الرابع هو في نسبة الكره سطح مستوي على نسبة معلومة وكان انما هما
 يستعمل الفاظ الجبريين للتعبير فلما ادرك التحليل او اعداد واورال وكتب واعداد و لم يكن

و عدد الجذور ثمان و اذا قسم الاعداد على ما ينخرج عشره و ثمانا عشره و نعد على
ضعف دارة و قد نخرج دة و ادى اذ قسم على آه و نعل خطا زابرايم على نظره و لا يلى
خطى آدوه كما بينه المومنين لفاصله فى اشكاله من المقالة الاولى من كتاب المخروطات
و اشكده و قد مر المقالة الثانية من ذلك الكتاب اذ هنا العمل لا يتم الا بهذه الاشكال الثلثة
هو قطع دة و يتبع الدارة على نظره و نخرج من نظره عمودى على آه فافراد من قطع آه
هو قطع مكعب يكون مع ما فى ضلعه عدليه لمشربين ربع الاعم النيز من العدد و مرهله انا
نخرج كى على الاستقامة حتى يتبع قطعه على نظره و نخرج دة و ادى آه فافراد
ده و دة و ادى آه يكون على آه القائم الزوايا مساويا لسطح دة العالم الزوايا لان تصعد
على محيط قطعنا يدليا فاه خطا آدوه و قد خرج من كل واحد منها خطان الى المحيطين
الذين لا يقيان موازيتين لسطحها الخارجين من النقطه الاضرب و قد برهن عليه المومنين
القائلين فى شكله من مقالة من كتاب المخروطات و دارة و قد معلومة الوضع لان
تطرها الذى هو معلوم الوضع و القدر و خطا آدوه معلوما الوضع و نقط معلومة الوضع
فيكون قطع دة معلوم الوضع و دارة معلومة الوضع فيكون تصعد معلومة الوضع
و خط دة يكون معلوم الوضع فيكون نظره معلومة الوضع و نقطه معلومة الوضع فيكون
ال معلوم القدر و هذه اشياء ظاهرة من كتاب المعطيات و قد بينا ان سطح آه مثل سطح دة و يقع
هـ م المشترك بين سطح دة مثل سطح طة و نعمل سطح دة مشتركا فيكون سطح آه مساويا لسطح طة
و هما متاديا الزوايا لان زواياها قائم فيكون اضلاعها متكافئة فى النسبة كما بينه المومنين
فى شكله من مقاله و يكون نسبة الآه كمنه و الآه كمنه و الآه كمنه و الآه كمنه
و نسبة مربع الآه الى مربع الآه كمنه و الآه كمنه و الآه كمنه و الآه كمنه و الآه كمنه
فكون نسبة مربع الآه الى مربع الآه كمنه و الآه كمنه و الآه كمنه و الآه كمنه و الآه كمنه
كمنه و الآه كمنه فيكون ضرب مربع الآه و خطا آه مساويا لضرب مربع الآه و خطا آه و نعمل
ضرب مربع آه فى آه مشتركا فيكون ضرب مربع آه فى آه مساويا لضرب مربع آه فى آه و ضرب
الآه فى آه هو مثل عدد الاضلاع اثنى اثنين و آه هو مثل الكعب فيكون ما نأمنه

المكعب مساويا لضرب مربع لوط في آء وضرب مربع آل في لآء وضرب مربع لوط في آء مساويا للعدد
 كما قد مضى وهه الثابت فيكون الفلك من العدد وضرب مربع لوط في لآء مساويا للمثلث ضلع المكعب
 بجمله مكعب آل الذي هو ضرب مربع آل في آل مشترك فيكون مكعب آل مساويا للعدد مع
 ضرب مربع آل في آل وضرب مربع آل في لآء وضرب مربع آل في آل في آل مع ضرب مربع آل في لآء هو
 مساو لضرب مربع آل في آء وآء قد مضى هه عشرين ضرب مربع آل في آء هو عشرين مربع
 آل فيكون مكعب آل مع ما تم خط الآساويا للعدد مع عشرين مربع ضلع المكعب ذلك
 ما اردنا ان نثبت ونجسد تقدم ههنا فانا نثبت مثل آء ونضع آء منقطا وهه عشره يكون
 د هه خط آل الذي ههنا على انه معلوم القدر وستا عن بقول معلوم القدر ان معلوم الكمية
 فان فيها فاقابل اعني بقول معلوم القدر في بر افليدس في كتاب العليات وهه الذي
 ان يوجد متزايا مساو له وبالتركيب نضع خط آء عشره ونضع د قاتا على خط آء على رؤيا
 قائمه مساويا لخط آل من الشكل المتقدم ونصل آء ونقيم على نقطة عمود آء ونخرج آء



على استقامه حتى ينقطع العمود على نقطة بياضه ارجيب ان يكون مثلث
 آء د قائم الزاوية اعني زاوية د منه قائمه ويكون خط آء ح
 عمودا وسادا يالوتر آء وخط آء ح خط آء مساويا لخط
 آء وذلك ما اردنا ان نثبت ونجسد مربع د اربع آء من اربع آء د ونخرج فيها خطي آء
 د وتقاطعان على رؤيا قائمه ومركز الدائر نقطه ونصل من خط د ومثلث آء د في
 المقدم خط دة مساويا للعمود د ونقسم نصف قطر الدائر الذي هه خط دة من هه الشكل



على نسبة آء الـ دة مثلث آء د المتقدم كما بينه افليدس في كتابه من
 مقاله د على نقطة د ونخرج عمود دة ونصله د ونخرج من نقطة د خطا
 مابر الدائر وهه خط دة ونخرج دة على استقامة الـ ان يتقطع خط دة
 على نقطة ط فيكون مثلث ه د ط متساويا مثلث آء د من الشكل المتقدم بها
 ان زاوية دة مساوية لزاوية آء د فان لم يكن فليكن احدها اعظم
 مثل آء د فنقيم على نقطة هه خط دة لا زاوية مثلا زاوية آء د ونخرج

دغ

فخرج من نقطه خطا يامر الدايه و هو قده يتبعه و ط على نقطه آ فيكون مثلث ه و د ثانياً
اسخ لان زواياها متساويه و يخرج من نقطه ق عمود و ق م على ه و ق ن فيكون ه و ق م جميعاً مساوي الخط
ه و د و ت مثلث و يكون م د مثلث ق م و نسبة ل م الى ق م ك نسبة د و الى و ت فيكون نسبة م ك الى
د و ك نسبة م الى و ت و بالتفصيل يكون نسبة م ت الى م ك ك نسبة و ه الى و د و نسبة و د الى ه ه
مثلث و ت الى ك نسبة م د الى ه ه و نسبة م الى و ت ك نسبة م الى و ت و نسبة م الى و ت ك نسبة م الى و ت
او ا ر ه و نكنا جعلنا نسبة و الى و ت ك نسبة آ الى و ت فيكون نسبة م الى و ت ك نسبة و الى و ت
و ه م الاول اسفرت ه و الثالث يلزم ان يكون م ت الثاني اسفرت و م الرابع على ما بيننا و ط
الاصول في شكلها الاثر اعظم فداخ قلبت زاوية د ه باصف زاوية م آ و مثلث آ ح
الحق م ولا اكبر منها ايضا فيكون مثلث د ه ح فيها مثلث آ ح المتقدم فيكون ه و ر ح جميعاً
و ط فيكون م ط مثلث و ح و ط مثلث و ح و ط و كذلك ضرب ه و ح في ط مساوي بالربيع
ح و فيكون ضرب ه في ح م مثلث و ح في م ت فيكون الخطط الاربعة متساوية على ما بيننا
شكلها من هنا و نسبة و ح الى و ت ك نسبة و ط الى و ت ك نسبة و ط الى و ت ك نسبة و ط الى و ت ك نسبة
و ح الى و ت ك نسبة و ح الى و ت ك نسبة و ح الى و ت ك نسبة و ح الى و ت ك نسبة و ح الى و ت ك نسبة
نظرة و اخرجنا منها عمود و ح ح صارت نسبة آ ه الذي هو نصف القطر الى و ح ك نسبة و ح الى و ت
الحد و ذهبت ما اردنا ان بين و م اراد ان يعلم بالحاسب لا سيد له السير اذا حاد ^{المتخلف}
فان الاشياء التي يستخرج بقطع الخوطات لا يمكن فيها ان يجلدوا الى الحجاب وان تقع بالتحقق
فعلية جيلدوا لا اذنا من كتاب المحطى او جلدوا الى الحجاب والسهم من زنج منه يطلب غير فيها
يكون نسبة ح تين الذي هو نصف قطر الدايه فرضا الى ح تين ك نسبة ح تين تامها الى سهمها و جلد
ذمت العتق من غير م ت و ح ه بالاجزاء التي ه الدايه تسه و ح تين ك نسبة ح تين و ح تين ك نسبة ح تين
سهما قريب م ك و جلد ح و ح تين تامها من ح تين و ح تين ك نسبة ح تين و ح تين ك نسبة ح تين
ان يان في التفتيح في جلد التعدادات بحجج الاحكام هنا هو الذي نسخ في هذا النص في نسبة
الفكر و توزع الحاطر و اعتنا الاشغال اصابته عن اشغال هذه الحانات و ولا شر المحلى

دام شرفه و حقان ابتدا دام اسه نايده لکن عنها في بنوف واسع از عبا بنی مضره على ما هتم
 من انما هذه عند و هتم مضره فتر المير والله تع المحمود والشكر على كل حال ولما مولغنه ان
 يرفق الميجرات انردلى الاجاسته تمت الرسالته والصلوة على خاتم الرساله مسك كلف
 سبع دايره آد مرفوض على مركزه و زيبان نسيم آه بعين كانه عن شفا نافع على آه ربها ساد
 الاضلاع والزوايا وهواه فيكون خطاه . و معلوم الوضع ونقطه آ
 معلوم الوضع نقطه على نقطه آ قطعا انما لا يلقا . خطاه . و وضع
 آد فيكون معلوم الوضع ونصل آد فتر لا محه يكون ما سالف القطع ورفق
 داخل الدايه ميليم ان يتقطع القطع الايد الدايه فليقطعها على نقطه
 فيكون معلوم الوضع ونخرج عمودي آد و فاقرب تدتم العله ما
 ان نقطه آه على محيط القطع و تدخرج من كل واحد منها خطان الى
 القطع موازيان للاخرين فيكون - طره ساد بالسطح و المقصود المشترك بقى في ملاحظه
 هالطمان متساويا الزوايا فيكون اضلاهما متكافيه نسبة آه المودر كمنه خط آه الى آه تحت

ملحقات

(I) مخروطات و قطوع مخروطی

(صفحات ۸۹ - ۹۲ و ۱۵۶ - ۱۵۷)

چون ترجمه‌ها و تحریرهای مخروطات آپولونیوس بوسیله‌ی ریاضیون اسلامی، تا حدی که نگارنده اطلاع دارد، هیچیک تا کنون چاپ نشده، و از خوانندگان کمتر کسی ممکن است به آنها دسترس داشته باشد، و از طرف دیگر بعضی اشخاص بی اطلاع سخنانی یاوه در تسمیه‌ی قطوع بافته‌اند^{۵۶} که ممکن است سبب گمراهی کسانی که اهل فن نیستند بشود، مناسب دیدیم که برای تتمیم فایده توضیحات مختصری در مبادی مخروطات بیاوریم. در آنچه گفته میشود از کتاب تلخیص المخروطات ابوالفتح اصفهانی (قرن چهارم هـ ق) و کتاب مخروطات ابوالحسین عبدالملک ابن محمد شیرازی (قرن ششم هـ ق) و آثار سرت. هیث (مخصوصاً کتاب او در تاریخ ریاضیات در یونان) استفاده شده است.

آپولونیوس مخروط مستدیر، و به عبارت اصح، دو پرده‌ی سطح مخروطی مستدیر را بطور کلی مکان هندسی خطی مار بر نقطه‌ای ثابت (رأس مخروط) و متکی

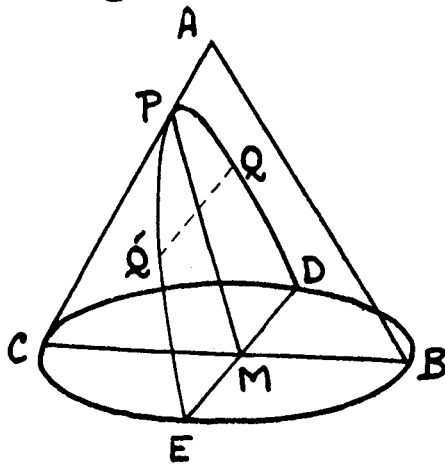
(۵۶) رجوع شود به: جلال همایی، کتاب التفهیم، تهران (۱۳۱۶ - ۱۸)، ذیل شماره‌ی ۴ صفحه‌ی ۲۸، که در آن گفته شده است: «دوم قطع مکافی . . . و آنرا مکافی خوانند از این جهت که برای بدست آوردن مخروط از سهمی نباید چیزی کم کرد و نه چیزی افزود [!]. . . سوم قطع زاید آنست که قاطع یک ضلع با قاعده‌ی مخروط باشد [!]. . . این قسم را زاید گویند برای آنکه باید چیزی افزود تا تبدیل به مخروط شود [!]. . . چهارم قطع ناقص آنست که قاطع دو ضلع باشد بدون قاعده [!]. و اینجا شکل بیضی پیدا میشود، و از او چیزی باید کاست تا مخروط بدست آید [!].»

معذک، نویسنده‌ی این اراجیف «مخروطات ابولونیوس» را جزء «مآخذ نگارنده در تصحیح و توضیحات» قلمداد کرده است (صفحه‌ی «فکح» در مقدمه‌ی همان کتاب).

بر دایره‌ای مفروض (قاعده) تعریف می‌کند. سهم یا محور مخروط خط واصل بین رأس و مرکز قاعده است، و اگر این خط بر صفحه‌ی قاعده عمود باشد مخروط قائم و الا مایل است.

فصل مشترك مخروط با صفحه‌ای مار بر محور آن مثلثی است که قاعده‌اش قطری از قاعده‌ی مخروط است، و چنین مثلثی مثلث محوری مخروط است.

سپس، آپولونیوس در هر مخروط مستدیر دو رشته صفحه‌ی قاطع مشخص می‌کند که مقاطع آنها با مخروط دایره است: یکی صفحات موازی قاعده، و دیگر صفحاتی که نسبت به صفحه‌ی قاعده متقابل اند. آنگاه به تعریف سهمی و هندولوی بیضی بوسیله‌ی مقاطع مخروط مستدیر می‌پردازد، و برای این منظور، صفحه‌ی قاطع را چنان می‌گیرد که فصل مشترك آن با قاعده‌ی مخروط بر قاعده‌ی مثلث محوری عمود باشد^{۵۰}. و مقدمه ثابت می‌کند که در این صورت، فصل مشترك صفحه‌ی قاطع با مثلث محوری قطری است از مقطع نظیر امتداد فصل مشترك



صفحه‌ی قاطع با قاعده‌ی مخروط. بعبارت دیگر، اگر A رأس مخروط، ABC مثلث محوری آن، DE (که بر BC عمود فرض می‌شود) فصل مشترك صفحه‌ی قاطع

(۵۰) این قید خللی در کلیت احکام وارد نمی‌کند، چو هر گاه مخروط و صفحه‌ی قاطعی

مفروض باشد، همواره میتوان مثلث محوری را چنان انتخاب کرد که شرط مورد بحث برقرار شود.

با قاعده‌ی مخروط ، و PM فصل مشترك صفحه‌ی قاطع با مثلث محوری باشد ، خط PM هر وترى از مقطع را مانند QQ' كه موازى DE باشد نصف مى كند . ضمناً آیولونیوس تذکر میدهد که اگر مخروط قائم باشد DE بر PM عمود است ، ولی اگر مخروط مایل باشد ، فقط وقتی DE بر PM عمود است که صفحه‌ی مثلث محوری بر قاعده‌ی مخروط عمود باشد .

اینک پرده‌ی ABC از مخروط مستدیری به رأس A و قاعده‌ی BC را اختیار کرده سایر حروف را نیز بهمان طریق که ذکر شد تعریف میکنیم ، و مانند گذشته ، ED را عمود بر BC میگیریم . سه حالت ممکن است اتفاق افتد :

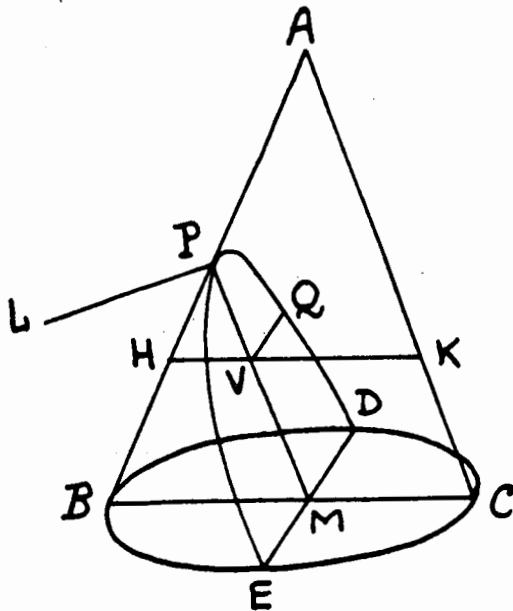
PM (I) موازى AC است ؛

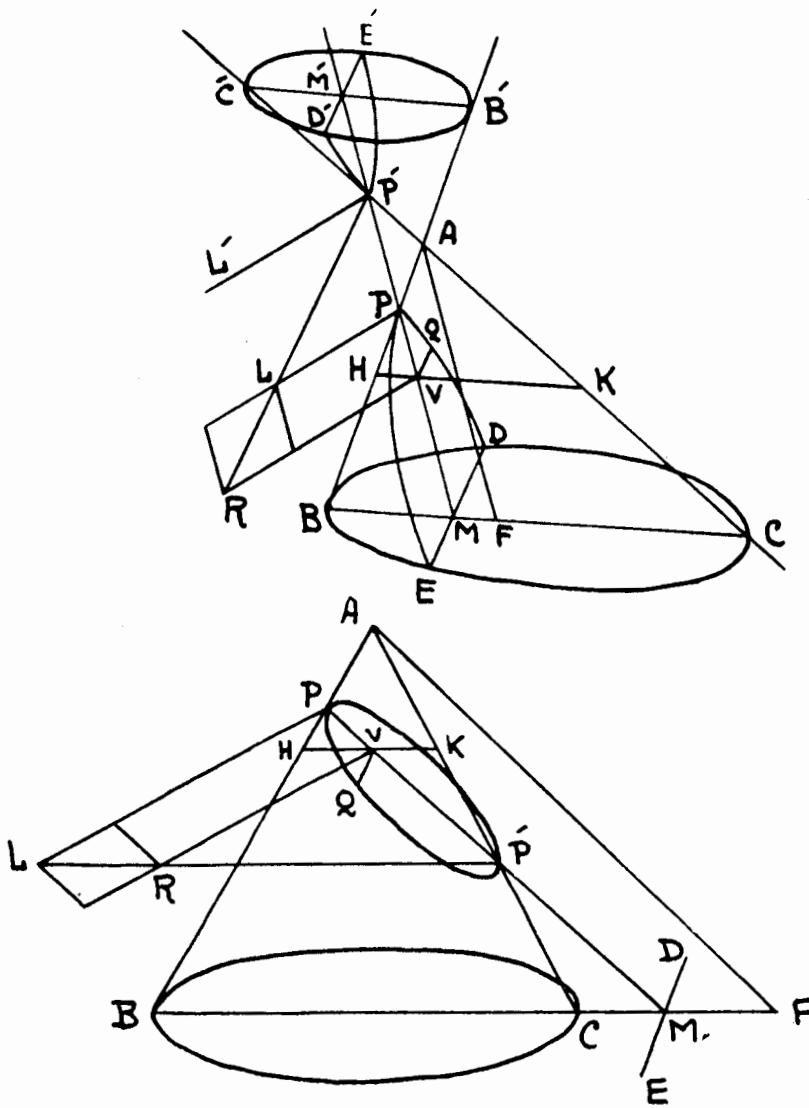
PM (II) پرده‌ی دیگر مخروط را در نقطه‌ای مانند P' قطع میکند .

PM (III) همین پرده‌ی ABC از مخروط را در نقطه‌ی دیگری مانند P' قطع

می کند .

در حالات II و III ، خط AF را بموازات PM میکشیم ، و در هر سه حالت از





نقطه‌ی P خط PL را در صفحه‌ی مقطع بر PM عمود می‌کنیم، و بر آن طول PL را در حالت I از روی

$$(الف) \quad PL : PA = BC^2 : (BA \cdot AC),$$

و در حالات II و III از روی

$$(ب) \quad PL : PP' = (BF \cdot FC) : \overline{AF}^2$$

جدا می کنیم .

اینک فرض کنیم Q نقطه‌ی دلخواهی از مقطع باشد . QV را موازی DE میکشیم تا قطر PM را در V قطع کند . در حالات II و III ، خط VR را موازی PL میکشیم تا P'L را در R قطع کند . در هر حال ، اگر از V خط HK را بموازات BC بکشیم ، HK قطر مقطع مستدیر مخروط بوسیله‌ی صفحه‌ی QHK است ، و لهذا

$$(ج) \quad \overline{QV}^2 = HV \cdot VK .$$

پس از ذکر این مقدمات گوئیم *

$$\text{در حالت I} , \overline{QV}^2 = PL \cdot PV .$$

$$\text{در حالات II و III} , \overline{QV}^2 = PV \cdot VR .$$

برهان حالت I . بالبداهه

$$HV : PV = BC : CA ,$$

$$VK : PA = BC : BA .$$

پس بموجب (ج) و (الف) .

$$\overline{QV}^2 : (PV \cdot PA) = (HV \cdot VK) : (PV \cdot PA)$$

(*) بیان و استدلال آپولونیوس بسیار طولانی است . مثلاً در حالت I ، که ساده‌ترین

حالات است ، حکم را چنین بیان میکند :

« فرض کنیم مخروطی را صفحه‌ای مار بر محور آن قطع کند ، و فرض کنیم صفحه‌ی دیگری نیز مخروط را قطع کند بطوری که این صفحه قاعده‌ی مخروط را بر خط مستقیمی عمود بر قاعده‌ی مثلث محوری قطع کند ، و بعلاوه فرض کنیم قطر مقطع موازی یکی از اضلاع مثلث محوری باشد . درین صورت ، اگر خطی از مقطع مخروط به موازات فصل مشترک صفحه‌ی قاطع و قاعده‌ی مخروط تا قطر مقطع رسم شود ، مربع آن مساوی خواهد بود با مستطیل محدود به قطعه‌ای که این خط در طرف رأس مقطع [P] از قطر جدا میکند و خط مستقیم دیگری ؛ نسبت این خط مستقیم به قطعه‌ی مفروض بین رأس مخروط و رأس مقطع همان نسبتی است که مربع ساخته شده بر قاعده‌ی مثلث محوری به مستطیل محدود به دو ضلع دیگر مثلث دارد . و چنین مقطعی « مکافی » خوانده

میشود . »

$$= \overline{BC}^2 : (CA \cdot BA)$$

$$= PL : PA$$

$$= (PL \cdot PV) : (PV \cdot PA)$$

بالتیجه $\overline{QV}^2 = PL \cdot PV$ ، و هوالمطلوب .

برهان حالات II و III . از

$$HV : PV = BF : FA ,$$

$$VK : P'V = FC : AF ,$$

با توجه به (ج) و (ب) ، خواهیم داشت :

$$\overline{QV}^2 : (PV \cdot P'V) = (HV \cdot VK) : (PV \cdot P'V)$$

$$= (BF \cdot FC) : \overline{AF}^2$$

$$= PL : PP'$$

$$= RV : P'V$$

$$= (PV \cdot VR) : (PV \cdot P'V) .$$

پس $\overline{QV}^2 = PV \cdot VR$ ، و هوالمطلوب .

چنانکه ملاحظه می‌شود ، در حالت I مربع QV مساوی مستطیلی است مضاف \square بر PL که ضلع دیگرش PV باشد ، و چنانکه سابقاً گفتیم ، یونانیان از این نوع اضافه به لفظ پارابوله تعبیر می‌کرده‌اند .

در حالت II ، مستطیل مضاف بر PL و مساوی \overline{QV}^2 بقدر مستطیل LR - که متشابه و متشابه‌الوضع با مستطیل $PL \times PP'$ است - بر مستطیل مضاف بر تمام خط PL زاید است . پس در این حالت ، اضافه از نوع هورپروه است .

بالاخره ، در حالت III ، اضافه از نوع آپپیس می‌باشد .

چنانکه سابقاً گفته شد ، اسامی قطوع مخروطی ناشی از نوع اضافه‌ای است که در تعریف آنها پیش می‌آید ، و الفاظ قطع مکافی ، قطع زاید ، و قطع ناقص که ریاضیون

اسلامی بر این منحنیات نهاده‌اند ترجمه‌ی دقیقی از اصطلاحات یونانی است * .
 در هر حال ، خط PL ضلع قائم قطع نامیده می‌شود . بعلاوه ، در قطوع زاید و ناقص ، PP' ضلع مایل و PL ضلع مُنْتَصَب نیز خوانده میشود .
 بالاخره ، اگر p ضلع قائم و d قطر نظیر آن باشد ، معادلات سابق الذکر
 قطوع سه گانه نسبت به محورهای PL و PM چنین خواهد بود :

$$y^2 = px \quad \text{قطع مکافی}$$

$$y^2 = px + \frac{p}{d} x^2 \quad \text{قطع زاید}$$

$$y^2 = px - \frac{p}{d} x^2 \quad \text{قطع ناقص}$$

(III) عرب ، ریاضیون عرب ، منجمین عرب ، و غیره .

(ذیل صفحه‌ی ۱۲۵)

نگارنده با اینکه همواره کوشش داشته است که ، مخصوصاً در طریق کسب علم ، روان خود را به تعصبات باب روز نیالاید ، از ذکر این نکته ناگزیر است که توجیه محققین فرنگی برای استعمال لفظ عرب بمعنی عربی نویس یا کسی ، اغلب آثار علمی او بزبان عربی است غیر موجه بنظر می‌رسد . بعنوان نمونه استدلال وپکه و نالینو را در این باب نقل می‌کنیم .

وپکه در مقاله‌ی خود ، تحت عنوان « بحث در دو روش عربی * در تعیین مقداری تقریبی برای $\sin I$ » ، که در صفحات ۱۵۳-۱۷۶ جلد نوزدهم مجله‌ی ریاضیات خالص

(*) ابوالفتح اصفهانی در تعریفات مذکور در اوایل مقاله‌ی اول تلخیص المخروطات گوید :
 « فان كان محور القطع [PM] موازياً لاحد اضلاع مثلث المخروط [= مثلث محوری] فالقطع يسمى **بارابولي** ای **المکافی** فان كان محور القطع والضلع الآخر من مثلث المخروط يلتقيان اذا اخرجنا داخل زاوية مثلث المخروط فالقطع يسمى **البيسي** ای **الناقص** . . .
 و ان كان التقاؤهما خارج زاوية المثلث فان السطح القاطع يقطع المخروطين معا و يحدث في كل واحد منهما قطعاً يسمى كل واحد منهما بانفراد **اوپربولي** ای **الزائد** . .
 (*) *méthodes arabes* . البته مقصود روش « ریاضیون عرب » است ، ولی نگارنده نخواست هیچگونه تصرفی در گفته‌ی وپکه بکند .

و آلمی ☆ (مورخ ۱۸۵۴) در صفحه‌ی ۱۵۴ آن مندرج است، چنین می‌نویسد:

« این روشها، که در شرح چلبی † بسط داده شده، از خود این ریاضیدان نیست، بلکه از الغ بیگ یا از دیگر ریاضیون ایرانی است، و من در این باب [خواننده را] به تفصیلاتی که چلبی خود آورده است حواله می‌کنم. برای احتراز از تکرار، بدون تمییز آنها را روشهای چلبی می‌خوانم، بدین معنی که این ریاضیدان آنها را عرضه نموده است. همچنین، این روشها را عربی مینامم، زیرا نجوم و ریاضیات نزد ایرانیان بالاصاله جزء همان بسط عظیم علوم دقیقه است که از امپراطوری عربی خلفا سرچشمه گرفته است. » [!]

و اما نالینو، در « محاضره‌ی دوم » از کتاب معروف خود، بنام علم الفلك، در صفحات ۱۶-۱۷ آن کتاب، گوید:

« ولی هر گاه از عصرهای بعد از قرن اول هجری سخن گفته شود، این لفظ [یعنی لفظ عرب] را بمعنی اصطلاحی آن گرفته به تمام ملل و اقوام ساکن ممالک اسلامی اطلاق می‌کنیم که در بیشتر تألیفات علمی خود زبان عربی بکار برده‌اند. پس ایرانیان و هندیان و ترکها و مردم سوریه و مصریها و بربرها و اندلسیها و غیره - که در زبان علمی و در تابع دولتهای اسلامی بودن وجه مشترك داشته‌اند - تحت اسم عرب می‌آیند. و اگر بر اینها لفظ عرب اطلاق نکنیم، تقریباً نمی‌توانیم از علم هیئت در نزد عرب سخن گوئیم، زیرا عده‌ی کسانی از اولاد قحطان و عدنان که درین علم مهارت داشته‌اند اندک است. » [!]

(III) تاریخ وفات غیاث الدین جمشید کاشانی

(ذیل ☆ صفحه‌ی ۱۳۴)

تاریخ مذکور درموضوع فوق‌الذکر بغلط ۸۳۵ چاپ شده، و ۸۳۲ صحیح است.

(☆) Journal de Mathématiques pure et appliquées.

(†) مقصود کتاب دستور العمل و تصحیح الجدول است در شرح زیج الغ بیگ، از محمود

ابن محمد قاضی زاده، معروف به میرم چلبی (متوفی در ۹۳۱ هـ ق).

در جزء کتابهای خطی کتابخانه‌ی مرکزی دانشگاه تهران مجموعه‌ای است از رسائل و یادداشتهای ریاضی، به شماره‌ی ۱۷۹۵، که قسمت اول آن مفتاح الحساب غیاث الدین است، و در صفحه‌ی آخر این قسمت عبارت ذیل مشاهده می‌شود: «وفات مولانای اعظم مولانا غیاث الدین طیب الله مضجعه در اول روز چهارشنبه نوزدهم شهر رمضان المبارک سنه ۸۳۲ هجریه خارج بلده سمرقند بموضع رصد».

(IV) تحلیل و ترکیب

(ذیل صفحه‌ی ۱۵۳)

در جزء عکسهایی از بعضی رسائل ریاضی دوره‌ی اسلامی که به همت دانشمند ارجمند آقای مهندس صفی اصفیا از کتابخانه‌ی مدیچئا لاورنتسیانا[☆]، در شهر فلورانس ایتالیا، بدست نگارنده رسیده رساله‌ی جالبی است به زبان فارسی تحت عنوان رساله‌ی للشیخ رئیس شرف الدین تاج الزمان الحسین بن حسن السمرقندی[†] فی طریق المسائل العدویه.

این رساله، چنانکه از اسمش نیز استنباط می‌شود، در روشهای حل مسائل عددی است، و مؤلف طرق مختلف را به اجمال شرح میدهد، و امثله‌ای در توضیح آنها می‌آورد. درباب «تحلیل و ترکیب» گوید:

«طریق تحلیل و ترکیب. اما طریق آنست که مطلوب را بر غایت و کمال فرض کنند و نگاه دارند و اگر حاجت آید واسطه‌ای در میان می‌فکنند تا آنگاه که به لازمی رسد یا به لوازم که ایشان معلوم باشند؛ پس این لوازم را عکس کنند مطلوب حاصل آید. و مران طلب کردن لوازم را تحلیل گویند، و مرین عکس

Biblioteca Medicea Laurenziana (☆)

مجموعه‌های مذکور در متن مجموعه‌های شرقی شماره‌های ۲۲، ۳۸، و ۱۱۸ این کتابخانه است.

(†) شرف الدین حسین ابن حسن سمرقندی این رساله را در ۶۳۲ هـ ق بیابان رسانیده است. مثلاً رجوع شود به: ستوری، تألیفات فارسی (Persian Literature)، جلد دوم، جزء اول، لندن ۱۹۵۸، صص ۵-۶.

کردن را ترکیب گویند، و اگر تحلیل به لازمی رسد که آن لازم محال باشد مسئله را ممتنع گویند، و اگر هیچ لازم محال نباشد مسئله را ممکن گویند.

(V) استقراء

(ذیل × صفحه‌ی ۱۶۶)

در باب استعمال این لفظ در ریاضیات، شاید ذکر این مطلب خالی از فایده نباشد که در کتاب فخری (۳۰۴۰۵۰۷ §، ص ۱۵۷) فصلی تحت عنوان ذکر الاستقراء هست بدین مضمون^۵:

«الاستقراء فی الحساب ان تردّ عليك جملة من نوع او من نوعین او ثلثة انواع متوالية و تكون تلك الجملة غیر مربعة من جهة ما يدلّ عليه اللفظ و تكون فی المعنی و القوه مربعة و انت ترد ان تعرف جذرها».

و در توضیح این مطلب مسئله‌ی تعیین عددی را می‌آورد که مجموع مربع آن با چهار برابرش مجذور کامل باشد. این مسئله به معادله‌ی $x^2 + 4x = y^2$ برمیگردد، که در آن، اگر چه $x^2 + 4x$ صورت مجذور کامل نیست، از حیث مقدار مربع کامل فرض می‌شود. کرخ، برای حل مسئله، مقداری برای y جستجو میکند که چون آنرا در معادله قرار دهیم معادله‌ای بین دو مرتبه‌ی متوالی حاصل شود. بازاء $y = 2x$ خواهیم داشت $4x = 3x^2$ ؛ پس $x = 4/3$. بازاء این مقدار، $x^2 + 4x = 64/9$ ، و آن مجذور کامل است، و جذرش $8/3$ است. نیز بازاء $y = x - 1$ مقدار $x = 1/6$ حاصل

(۵) وپکه، فخری، صص ۷۲ - ۷۳.

و نیز برک ۹۵ نسخه‌ی عکسی مجموعه‌ای از رسائل ریاضی (از جمله کتاب فخری) که فیلم آن به شماره‌ی ۳۶۱ در کتابخانه‌ی مرکزی دانشگاه تهران موجود است.
این فیلم جزء مجموعه‌ی گرانبهای فیلمهایی است که به کوشش استاد علامه، آقای مجتبی مینوی، از کتابخانه‌های مختلف ترکیه برای دانشگاه تهران تهیه شده، و در کتابخانه‌ی مرکزی آن دانشگاه مخزون است. اینکسکه آقای مینوی، در انتخاب نسخ، آثار علمی را از نظر دور نداشته‌اند. حاکی از وسعت نظر ایشان و درخور ستایش است. همچنین، کوشش اولیاء محترم کتابخانه‌ی مرکزی دانشگاه در برآوردن حاجت طلاب علم و فراهم آوردن تسهیلات برای ایشان در استفاده از آثار گرانبهایی که در آن کتابخانه مخزون است از هر جهت درخور تقدیر است.

می گردد که بازاء آن $25/36 = \epsilon x + x^2$.

بطوری که دیده میشود ، حل معادله بوسیلهی تجسس و امتحان مقدار مناسبی برای ϵ انجام گرفته است ، و مقصود از استقراء همین جستجوی مقدراری مناسب است .

(VI) بوعلاء

(صفحهی ۲۵۵ و نیز صفحهی ۵۹)

سالهای هجری قمری از سنهی ۵۵۵ تا ۶۵۵ که در آنها بیست و سوم ربیع الاول بر طبق حساب (و نه بر حسب رؤیت هلال) یکشنبه است عبارتست از سنوات

۵۲۸، ۵۲۵، ۵۱۲، ۵۵۷، ۵۵۴،
 ۵۶۸، ۵۶۵، ۵۵۲، ۵۴۴، ۵۳۶،
 ۶۵۵، ۵۹۲، ۵۸۴، ۵۷۶ .

تاریخ مذکور در پایان رسالهی جبرخیام ، یعنی علامتی که بجای تاریخ گذاشته شده ، و ظاهراً به شمار سیاق نوشته شده ، بظن قوی « ۵۲۴ » است ، واسی جزء اول علامت مذکور با هیچیک از ارقام ۵ و ۸ که در رشتهی اعداد فوق آمده ظاهرأ مطابقت ندارد . از طرف دیگر ، ۲۳ ربیع الاول سال ۵۲۳ هـ ق ، به حساب رؤیت ، یکشنبه است و بنابراین ، بظن قوی ، تاریخ مذکور ۵۲۳ است . بخصوص که در رسم الخط قدیم سیاق ، بسیاری از کتآب رقم ۳ را بشکل جزء اول علامت مورد بحث می نوشته اند . ارقام و مطالب مذکور از افادات دوست فاضل آقای احمد منشی زاده است ، که یک تقویم دائمی و تطبیقی در پنج ورق بر اساس نوموگرافی اختراع کرده است ، که مشتمل است بر (۱) تقویم مسیحی از ابتدای میلاد الی سال ۲۷۸۵ میلادی ؛ (۲) تقویم هجری قمری از ابتدای هجرت تا سنهی ۲۵۹۵ هـ ق ؛ (۳) تقویم هجری شمسی از ابتدای هجرت تا سال ۲۱۵۵ هـ ش . بعلاوه ، بوسیلهی همین پنج ورق با کمال آسانی می توان تواریخ را از تقویمی به تقویم دیگر تبدیل کرد .

مآخذ*

- ابن الندیم ، الفهرست ، مصر ، ۱۳۴۸ هـ ق .
- ابن خلدون ، مقدمه ، طبع م . کاترمر ، جلد اول ، قسمت سوم ، پاریس ، ۱۸۵۸ .
- اقبال آشتیانی ، عباس ، راجع به احوال حکیم عمر خیام نیشابوری ، مجله‌ی شرق ، دوره‌ی اول ، شماره‌ی ۸ ، مرداد ۱۳۱۰ هـ ش .
- بروکلمان (جوع کنید به Brockelmann) .
- تاریخ الحکماء [عنوان اصلی : کتاب اخبار العلماء باخبار الحکماء ، للوزیر جمال الدین ابی الحسن علی ابن القاضی الاشراف یوسف القفطی] ، مصر ، ۱۳۲۶ هـ ق .
- تحریر اقلیدس (تحریر کتاب اقلیدس در اصول هندسه ، بتوسط خواجه نصیر الدین طوسی) ، تهران ۱۲۹۸ هـ ق .
- تقی زاده ، سید حسن ، تاریخ علوم در اسلام ، چاپ دوم ، تهران . این کتاب دروس دانشکده‌ی معقول و منقول است ، و چاپ اول آن دروس «ماههای آخر سال ۱۳۳۱ هجری شمسی . . . و دنباله آن دروس در سال ۱۳۳۲» است (صفحه‌ی اول چاپ اول) .
- از این کتاب در کتاب حاضر به عنوان دروس یاد شده است .
- دانش پژوه ، محمد تقی ، فهرست کتابخانه‌ی ۱۵۱ آفای سید محمد مشکوة به کتابخانه‌ی دانشگاه تهران ، جلد سوم ، بخش دوم ، تهران ۱۳۳۲ هـ ق .
- دائرة المعارف اسلام (انگلیسی ؛ عنوان اصلی The Encyclopaedia of Islam) ، چاپ اول ، چهار مجلد (وبك جلد ضمیمه) ، ۱۹۱۳ - ۱۹۳۴ ، لندن و لندن ؛ چاپ جدید ، جلد اول (فقط تا کنون چاپ شده است) ، لندن ، ۱۹۶۰ .

(*) اسامی اہم کتابها و نشریاتی کہ بمناسبتی نام آنها در کتاب حاضر آمده در آخر کتاب در فهرست عمومی الفبائی مندرج است ، و چون اسامی مذکور در این فهرست با حروف ۸ سیاه چاپ شده به آسانی میتوان آنها را یافت .

روزنفلد، ب. ا. ، سگال ، و. و. س. ، دیوشکویچ ، ا. پ. ، مفتاح الحساب و الرسالة المحيطیه ، از غیاث الدین جمشید کاشانی ، متون و ترجمه‌ی روسی با حواشی و مشتمل بر ترجمه‌ی روسی رساله‌ی دستورالعمل و تصحیح الجدول (از میرم چلبی) ، مسکو ، ۱۹۵۶ .

سارتن ، مدخل (رجوع کنید به Sarton) .

سمیث ، تاریخ (رجوع کنید به Smith) .

فرهاد میرزا ، معتمدالدوله ، کتبخانا الحساب (ترجمه‌ی فارسی و شرح خلاصه الحساب

شیخ بهائی) ، تهران ، ۱۲۷۹ هـ ق .

کاشانی ، غیاث الدین جمشید ، مفتاح الحساب ، تهران ۱۳۵۶ هـ ق ؛ مشتمل بر

بعضی آثار دیگر غیاث الدین جمشید .

محمد بن موسی الخوارزمی ، کتاب الجبر والمقابله ، باهتمام علی مصطفی مشرفه

و محمد مرسی احمد ، مصر ، ۱۹۳۷ .

مصاحب ، غلامحسین ، جبر و مقابله‌ی خیام ، تهران ۱۳۱۷ هـ ش .

معطیات ، تهران ، ظاهراً حدود ۱۳۵۴ هـ ق . (قسمت آخر مجموعه‌ای از رسائل

ریاضی که با « اُکرِ ناووزیوس » آغاز میشود) .

معین ، دکتر محمد ، چهارمقاله عروضی سمرقندی ، تهران ۱۳۳۳ - ۳۵ هـ ش .

نالینو (Alfonso Carlo Nallino) ، علم الفلك ، تاریخه عند العرب فی القرون

الوسطی ، رم ، ۱۹۱۱ . (اسم مؤلف در آن « کرلو نلینو » ضبط شده است) .

وپکه ، جبر عمر خیام (رجوع کنید به Woepcke) .

وپکه ، فخری (رجوع کنید به Woepcke) .

هیث ، تاریخ (رجوع کنید به Heath) .

هیث ، سیزده مقاله (رجوع کنید به Heath) .



Brockelmann, Carl, *Geschichte der arabischen Literatur*, Vol I, 1943; Vol II, 1949. Leiden.

Eecke, Paul Ver, *Diophante d'Alexandrie*, Paris, 1959.

Heath, Sir Thomas, *A History of Greek Mathematics*, 2 vols. Oxford, 1921.

(در کتاب حاضر بعنوان « هیث ، تاریخ » از آن نام برده ایم) .

Heath, Sir Thomas L., *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, 3 vols. New York, 1956.

(در کتاب حاضر بعنوان « هیث ، سیزده مقاله » از آن اسم برده ایم) .

Heath, T. L. (Sir Thomas L. Heath), *The Works of Archimedes*, New York.

Karpinski, Louis C., *Robert of Chester's Latin Translation of the Algebra of al-Khowarizmi*, New York, 1915.

Kasir, Daoud S., *The Algebra of Omar Khayyam*, New York City, 1931.

Montucla, J. E., *Histoire des Mathématiques*, tome premier, Paris, 1758.

Newman, James R., *The World of Mathematics*, vol. I, New York, 1956.

Sarton, Georges, *Introduction to the History of Science*, vol I, 1950; vol II & III (each in 2 parts), 1953. Baltimore.

Sédillot, L., *De l'algèbre chez les Arabes*, Journal asiatique, Sième série, tome II, 1853, p. 323-356.

Smith, D. E., *History of Mathematics*, 2 vols. Vol I, 1951; Vol II, 1953. U. S. A.

(در کتاب حاضر بعنوان « سمیث ، تاریخ » از آن نام برده ایم) .

Storey, C. A., *Persian Literature*, Vol II, part I, London, 1958.

Story, W. E., *Omar Khayyam as a Mathematician*, Boston, 1918.

Suter, H., *Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke*, Leipzig, 1900.

Tirtha, Swami Govinda, *The Nectar of Grace*, Omar Khayyam's life and works, Allahabad, 1941.

Woeppcke, F., *L'Algèbre d' Omar Alkhowarizmi*, Paris, 1851.

(در این کتاب بعنوان « ویکه ، جبر عمر خیام » از آن نام برده ایم) .

Woepcke, F., *Discussion de deux méthodes arabes pour déterminer une valeur approchée de $\sin 1^\circ$* . Journal de mathématiques pures et appliquées, Tome XIX, 1854, p. 153 - 176.

Woepcke, F., *Extrait du Fakhri*, Paris, 1853.

(در کتاب حاضر بعنوان « ویکه ، فخری » از آن نام برده ایم) .





فهرست

عمومی الفبائی

(۱) برای اینکه عناوین مورد نظر را به آسانی بتوان در این فهرست یافت ، عناوین مختلف با حروف مختلف چاپ شده است : مطالب و اصطلاحات با حروف درشت سیاه ؛ اعلام و امکنه و مؤسسات با حروف متن کتاب ؛ اسامی کتابها و رسالات و غیره با حروف ریز سیاه .

(۲) ← علامت ارجاع است .

(۳) ارقام شماری صفحات است (برای تسهیل چاپ ، رقم صفر مطابق معمول با نقطه نمایش داده است ، چنانکه در شماره گذاری صفحات کتاب نیز بهمین نحو عمل شده) . حرف « ن » اشاره به ذیل صفحات است . علامت « + » حاکی از اینست که عنوان مورد نظرهم در متن و هم در ذیل صفحه آمده است .

در ارقام کسری ، مخرج اشاره به متون آثار خیام (قسمتهای اول و دوم کتاب حاضر) و صورت اشاره به ترجمه‌ی فارسی آنهاست . وقتی عین لفظی که در متن آمده در ترجمه تکرار نشده (بلکه نقل بمعنی شده است) ، رقم مربوط به ترجمه را در پراکنش قرار داده‌ایم ، و بالعکس . بالاخره ، مطالب عکس رساله‌ی تحلیل خیام (صص ۲۸۲ - ۲۹۲) ، که قبلاً در جزء مطالب قسمت دوم در این فهرست آمده ، در فهرست مکرر نشده است .

(۴) معمولاً در مواردی که عنوانی نسبتاً زیاد تکرار شده ، مواضعی را که اهمیت بیشتری دارد یا مطالب آن جامعتر است با ارقام سیاه متمایز کرده‌ایم .

(۵) اصطلاحات خارجی (تقریباً همه یونانی یا لاتینی) با علامت « * » متمایز شده‌است . این علامت در مورد اعلام بکار نرفته است .

محدودیتها و خطاهای ابوالجود در

بحث معادله‌ی درجه‌ی سوم (بقول خیام):

$$\frac{206}{33}, \frac{219}{40}, \frac{250-241}{56-52}$$

ابوالحسین عبدالملک ابن محمد

شیرازی] ← عبدالملک ابن محمد شیرازی.

ابوالفتح اصفهانی : ۹۰، ۹۹-۱۰۰،

۲۹۳، ۲۹۹ ز.

ابوالوفای بوزجانی : ← بوزجانی .

ابوتراب ابن احمد : ۱۵۲ ز .

ابو جعفر خازن : ← خازن

ابو جعفر منصور : ← منصور .

ابو حامد صفانی : ← صفانی .

ابوریحان بیرونی : ← بیرونی .

ابو سعید سجزی : ← سجزی .

ابوسهل کوهی (یا قوهی) : ← کوهی .

ابوطاهر : ۱۳۱، $\frac{160}{8}$

ابوعلی ابن الهیثم : ← ابن هیثم .

ابوعلی سینا : ۱۳۰ .

ابو کامل [ابو کامل شجاع ابن اسلم] :

۱۰۴ .

ابو نصر عراق [ابونصر ابن عراق] :

۲۶۸، $\frac{268}{77}$ ز .

آپولون (Apollon) : ۱۲۲ ز .

آپولونیوس (Apollonios) [در مآخذ

اوتوکیوس (Eutocios)] در مآخذ اسلامی

اوطوقیوس و اطوقیس] : ۱۲۳ ز .

اودوکسوس (Eudoxos) : ۸۱، ۸۵ .

ابراهیم ابن حبیب فزاری : ←

فزاری .

ابراهیم ابن سنان : ۱۰۱ .

ابرخس [به یونانی هیپارخوس

(Hipparchos)] : ۱۰۵ + .

ابلونیسوس [به یونانی آپولونیوس

(Apollonios)] : ۸۴ ز (← آپولونیوس).

ابن اثیر : ۱۳۲ .

ابن الندیم یا ابن ندیم [مولف الفهرست] :

۱۰۵ ز، ۳۰۴ .

ابن خلدون : ۱۳۳ ز، ۳۰۴ .

ابن لیث ، ابوالجود محمد : ←

ابوالجود .

ابن هیثم [ابو علی حسن ... ابن

الهیثم] : ۹۶، ۱۰۶، ۱۲۸، ۱۴۰،

$$\frac{240}{51}, \frac{238}{50}$$

ابوالجود [ابوالجود محمد ابن لیث] :

۵۱ ز، ۱۰۷، ۱۲۶، ۱۲۷، ۱۴۱، ۱۴۴،

۱۴۵، $\frac{216}{38}$ ، $\frac{241}{52}$ ، $\frac{268}{78}$ ز، ۲۶۹ ز .

آریتموس : ۷۹ ز .
 آریستایوس (Aristaeos) : ۹۰ .
 اژه ، دریای (Egée) : ۸۰ ز ، ۸۱ ز .
 اساس الاقیاس : ۱۶۴ ز .
 استخراج (یا درج) دو یا چهار
 واسطه : ← درج .
 استخراج ریشه : ← ریشه .
 استعمال جبر در هندسه : ←
 جبر ، استعمال هندسی .
 استعمال حروف و علامات : ←
 علامات .
 استقرار : $\frac{۱۶۶}{۱۱}$ ، ۱۶۶ ز ، $\frac{۱۷۰}{۱۲}$ ، $\frac{۱۷۲}{۱۳}$ ،
 $\frac{(۲۱۸)}{۳۹}$ ، ۳۰۲ - ۳۰۳ .
 اسحاق ابن حنین : ۸۸ ، ۹۹ .
 اسطقس و اسطقسات : $\frac{۱۷۱}{۱۳}$ ، ۱۷۱ ز ،
 $\frac{(۱۸۰)}{۱۸}$.
 اسکندر مقدونی : ۹۳ .
 اسکندریه : ۷۸ ، ۸۱ ، ۸۲ ، ۸۴ .
 اشکال متکافیه الاضلاع : ۱۵۶ ز .
 آشوکا : ۹۳ .
 اشیاء : ← شیء .
 اصطلاحات جبر : ← جبر ،
 اصطلاحات .
 اصفیا ، صفی : ۳۰۱ .
 اصل موضوع اقلیدس : ۸۴ ، ۱۳۲ .
 اصناف بیست و پنجگانه‌ی معادلات :
 ۱۳۴ ، ۱۷۰ ز ، $\frac{۱۷۰}{۱۲}$ ، $\frac{۲۳۳}{۴۸}$ (نیز ← معادلات ،

اسلامی ابلونیوس] : ۸۴ ، ۸۹ ، ۹۰ ، ۹۱ ،
 ۹۹ ، ۱۰۱ ، ۱۲۳ ز ، ۱۳۷ ، $\frac{۱۶۳}{۹}$ ، ۲۹۳ ،
 ۲۹۴ ، (نیز ← مخروطات) .
 آحاد : ۱۱۳ .
 احمد ابن عبدالجلیل سجزی : ←
 سجزی .
 احمد ابن عبدالله مروزی (معروف به
 حبش حاسب) : ← حبش حاسب .
 احمد ابن موسی ابن شاکر : ۱۰۰ .
 آحمس : ۷۹ ، ۱۱۲ ، ۱۱۵ .
 ادوار و مراحل جبر : ← جبر ، ادوار ؛
 جبر علامتی ؛ جبر لفظی ؛ جبر هندسی .
 ارانی ، دکتر تقی : ۱۳۲ .
 ارثماطیقی : ۷۹ ز .
 ارجبهد و ارجبهر : ۹۴ .
 اردها جیا (ardhâ - jyâ) : ۹۳ ز .
 ارشمیدس : ۸۴ ، ۹۰ ، ۹۹ ، ۱۰۱ ،
 ۱۰۳ ، ۱۰۲ ، ۱۲۳ ، ۱۲۱ ، ۱۵۲ ز ، $\frac{۱۵۹}{۷}$ ، $\frac{۲۶۷}{۶۷}$ ، $\frac{۲۶۸}{۶۷}$.
 نیز ← ارشمیدس ، مسئله‌ی کرمه و استوانه) .
 ارشمیدس ، مسئله‌ی : ۱۰۴ ، ۱۰۶ ،
 ۱۲۳ - ۱۲۴ ، ۱۲۵ ، $\frac{۲۶۷}{۶۷}$ ، $\frac{۲۶۸}{۶۷}$.
 ارقام : ۹۳ ، ۹۷ ، ۹۸ .
 آریهط : ۹۳ ز ، ۹۴ ، +
 آریتمیکه : ۷۹ .

الفهرت: ← ابن النديم .
 ☆ آگوريسم (algorithm) : ۱۰۳. ان .
 ☆ اليسيس : ۸۶ ، ۹۱ ، ۹۲ ، ۲۹۸ .
 امتحان و تصحيح در حل معادلات :
 ← معادلات ، حل .
 اموال : ← مال .
 انجمن آثار ملی : ۱۴۳ .
 اوطوقیوس : ← ائوتوکیوس .
 ☆ آهه : ۱۱۲ .
 ايرون اسکندرائی : ۸۲. ان ← هرون .
 ☆☆☆
 بحث در معادلات : ← معادلات ،
 بحث و شرایط امکان .
 بحر الجزایر : ۸۰. ان .
 برهمسپهت سدهات : ۹۴ ، ۹۷ .
 بر کارتام و بر کار قطوع : ۱۵۵. ان .
 نیز ← پرگار .
 بروکلیمان ، کارل (C. Brockelmann):
 ۱۰۱. ان ، ۱۵۵. ان ، ۳۰۴ ، ۳۰۶ .
 برهمکیت : ۹۴ ، ۹۷ .
 بطلمیوس : ۹۹ .
 بطلمیوس I : ۸۱. ان .
 بعد: $\frac{۱۶۴}{۹}$ ، $\frac{۱۶۳}{۱۰}$ ، $\frac{۲۶۳}{۶۵}$ ، ۲۶۴ .
 بغداد : ۸۴ ، ۹۳ ، ۹۶ ، ۹۷ ، ۹۸ ،
 ۱۰۹ .

طبقه بندی) .
 اصناف ششگانه‌ی معادلات : ۱۴۵ ،
 $\frac{۲۴۰}{۵۱}$ ، $\frac{۱۶۶}{۱۱-۱۰}$.
 اصول (هندسه) : ۸۱ ، ۸۴-۸۸ ، ۹۸ ،
 ۹۹ ، ۱۰۰ ، ۱۳۷ ، ۱۵۲. ان ، ۱۵۶. ان ، $\frac{۱۶۲}{۹}$ ،
 $\frac{۱۶۵}{۱۰}$ ، ۱۷۱. ان ، $\frac{۱۸۷}{۲۱}$ ، $\frac{۲۶۵}{۶۶}$ ، $\frac{۲۶۶}{۶۶}$.
 اضافه کردن سطح بر خط : ۸۰. + ،
 ۸۵-۸۷ ، ۹۰ ، ۹۱ ، ۱۵۶ ، $\frac{۱۷۷}{۱۶}$ ، $\frac{۱۷۹}{۱۷}$ ،
 ۲۵۰. ان ، ۲۹۸ .
 اضافه کردن مجسم بر خط : $\frac{۲۵۰}{۵۶}$.
 اضلاع : ← ضلع .
 اطقیس : ← ائوتوکیوس .
 اعداد : ← عدد .
 افلاطون : ۸۱ ، ۱۲۱ ، ۱۲۲. ان .
 اقبال آشتیانی ، عباس : ۱۳۰. ان ، ۱۵۱. + ،
 ۱۵۲. ان ، ۳۰۴ .
 اقلیدس : ۸۱ ، ۸۲ ، ۸۴ ، ۸۸ ، ۹۰ ،
 ۹۹ ، ۱۰۳ ، ۱۲۱ ، ۱۳۷ ، ۱۵۲. ان ، ۱۵۶ ،
 ان ، $\frac{۱۶۲}{۹}$ ، $\frac{۱۶۵}{۱۰}$ ، ۱۷۱. ان ، $\frac{۱۸۷}{۲۱}$. نیز ← اصول؛
 معطیات .
 اک ، پول ور (Paul Ver Eecke) : ۸۲. ان ،
 ۸۳. ان ، ۲۳۴. ان ، ۳۰۶ .
 التفهیم : ۲۹۳. ان .
 الدراسات الادبیه : ۱۰۶. ان .
 الغ بیک : ۳۰۰ .

پرگار نام یا پرگار قطوع :
 ۱۰۶ ، + ۱۵۵ (نیز ← برگار) .
 * پلطوس : ۱۱۳ .
 پلوتارک (Plutarque) : ۱۰۵ ن .
 پنج سدهائیک : ۹۲ .
 پول وراک : ← اک ، پول ورا .
 پیسا ، لئوناردو دا : ← فیبوناتچی .
 ☆☆☆
 تاریخ الحکماء : ۹۶ ن ، ۱۴۰ ، ۳۰۴ .
 تثلیث زاویه : ۱۰۰ ، ۱۰۷ ، ۱۲۱ -
 ۱۴۴ ، ۱۲۴ ، ۱۲۵ .
 تحریر اقلیدس : ۸۶ ن ، ۸۷ ن ، ۸۸ ،
 ۱۵۶ ن ، ۱۶۲ ن ، ۱۹۲ ن ، ۲۳۴ ن ، ۲۵۵ ن ،
 ۲۷۷ ن .
 تحلیل و ترکیب : ۸۹ ، ۱۵۳ ، +
 ۳۰۱ - ۳۰۲ .
 تریب دایره : ۱۲۲ .
 ترکیب : ← تحلیل .
 تسمیه‌ی جبر : جبر ، تسمیه‌ی .
 تسمیه‌ی مجهول : مجهول .
 تضعیف مکعب : ۸۱ ، ۱۲۱ ، ۱۴۲ -
 ۱۴۳ ، + ۱۲۴ .
 تقسیم ده ، مسئله‌ی : $\frac{218 - 219}{40 - 39}$ ،
 $\frac{268}{78}$.
 تقسیم خط به نسبت ذات وسط و
 طرفین : ۸۰ ن ، ۸۱ ، ۸۵ .

بقراط] به یونانی هیپوکراتس
 (Hippocrates) : [۸۱ ، + ۱۲۴ .
 بلینوس : ۸۴ ن .
 بنوموسی : ۹۹ ، + ۱۰۰ .
 بوزجانی ، ابوالوفای : ۸۳ ، ۱۰۴ - ۱۰۵ ،
 ۱۲۶ ، $\frac{268}{78}$.
 بهاءالدوله‌ی دیلمی : ۱۰۷ .
 بهاء الدین عاملی : ۱۲۲ ن .
 بهاسکر : ۹۴ ، ۹۵ .
 بیان معادلات : ← معادلات ، بیان .
 بیت الحکمه : ۹۷ ، ۱۰۱ .
 بیرونی ، ابوریحان : ۱۰۷ ، ۱۲۶ ،
 ۲۶۸ ن .
 ☆☆☆
 پاپوس (Pappos) : ۸۸ ن .
 پایروس : ۷۹ ، ۱۱۶ ، ۱۲۰ .
 * پارابوله : ۸۵ ، ۹۱ ، ۹۲ ، ۲۹۸ .
 * پارامتر : ۹۱ ن .
 پاریس ، کتابخانه‌ی ملی : ۱۳۹ ، ۱۴۱ .
 پاولوس اسکندرانی : ۹۳ ن .
 پاولیاسدهات : ۹۲ ، ۹۳ ن .
 پیغامه سدهات : ۹۲ .
 پرگا (Perga) : ۸۴ ن .

۹۲ - ۹۵ - در یونان : ۷۹ ببعث تا ۸۷ ،

۱۲۴ - ۱۲۵ - علامتی : ۷۸ ، ۸۲ ، ۱۰۹ .

- لفظی : ۷۸ ، ۸۰ ، ۸۲ ، ۱۰۹ ، ۱۱۴ ،

۱۸۱ ن . - هندسی : ۸۰ + ، ۸۴ ، ۱۱۲ ،

۱۱۶ ، ۱۲۴ .

جبر خیام : ۱۳۱ - ۱۳۲ ، ۱۳۳ ، ۱۳۵ ،

۳۰۳ . تحلیل - : ۱۴۴ - ۱۵۰ . ترجمه -

های - : ۱۴۰ ، ۱۴۲ ، ۱۴۴ . کشف - :

۱۳۸ - ۱۳۹ . متن - : ۱۴۰ ، ۱۴۱ - ۱۴۲ .

جبر و مقابله : ← جبر .

جذر : ۱۱۲ ، ۱۱۳ ، ۱۱۴ ، $\frac{۱۱۲}{۹}$ ،

$\frac{۱۱۲}{۹}$.

جذور : ← جذر .

جزء : ۱۶۴ ن ، $\frac{۲۳۴}{۴۸}$.

جزء (قطر) : ۲۷۸ ن .

جمل معادله : ← معادلات ، جمل .

جمله‌ی معلوم (معادله) : ۱۱۳ ،

۱۸۱ ن .

جواب یا ریشه‌ی معادله : ←

معادلات ، جواب یا ریشه‌ی .

جیا (jyâ) : ۹۳ ن .

جیا اردها (jyâ - ardhâ) : ۹۳ ن .

جیب : ۹۳ + ، ۱۰۴ ن ، ۱۲۲ ، $\frac{۲۷۸}{۷۳}$ ،

۲۷۸ ن .

تقی زاده ، سید حسن : ۹۴ ن ، ۹۶ ن ،

۱۳۰ ن ، ۱۳۱ ن ، ۳۰۴ .

تلخیص المعروضات : ۹۹ ، ۲۹۳ ، ۲۹۹ ن .

تمیز حل عددی و هندسی معادلات :

← معادلات ، تمیز ...

تیرتهه ، سوامی کووندا : ۱۳۰ ن ،

۱۳۱ ن ، ۳۰۶ .

ثابت ابن قره : ۸۸ ، ۹۰ ، ۹۹ ، ۱۰۰ -

۱۰۱ ن ، ۱۱۰ .

جبر (عمل) : ۱۰۲ + ، ۱۰۸ ، ۱۱۱ ،

۱۱۶ .

جبر و جبر و مقابله (کلیات ، تعریف ،

فایده) : ۷۷ + ، ۷۸ - ۷۹ ، ۱۱۰ ، ۱۳۶ ،

۱۴۵ ، $\frac{۱۵۹}{۷}$ ، $\frac{۱۶۱}{۸}$ ، $\frac{۲۶۰}{۳}$ ، $\frac{۲۶۴}{۶۵}$. ادوار -

۷۷ - ۷۸ (نیز ← جبر علامتی : جبر

لفظی) . استعمال هندسی - : ۱۰۹ ،

۱۲۵ . اصطلاحات - : ۱۴۵ ، ۱۵۵ ، $\frac{۱۱۲}{۹}$ ،

$\frac{۲۶۲}{۶۵}$ - $\frac{۲۶۳}{۶۵}$ (نیز ← معادلات ، جمل :

معادلات ، بیان) . تسمیه‌ی - : ۱۰۲ .

- خیام (تحت عنوان جداگانه آمده است) .

- در چین : ۸۰ ، ۱۱۱ . - در دوره‌ی

اسلامی : ۹۵ ، ۹۹ ، ۱۰۱ - ۱۰۷ ، ۱۰۷ -

۱۱۰ ، ۱۱۱ - ۱۱۲ ، ۱۲۴ - ۱۲۵ (نیز ←

ریاضیات هندی : ریاضیات یونانی) .

- در مصر : ۷۹ - ۸۰ ، ۱۱۱ . - در هند :

☆ جیو (jyva) : ۹۳ ز .

☆☆☆

چلبی ، میرم [محمود ابن محمد قاضی
زاده] : ۳۰۰ ، + ۳۰۵ .

☆☆☆

حازمی خوارزمی : $\frac{۲۴۱}{۵۲}$.

خبش حاسب [احمد ابن عبدالله
مروزی] : ۹۸ .

حجاج ابن یوسف ابن مطر : ۸۸ ،
۹۸ ، ۹۹ .

حساب ، علم : ۷۹ .

حساب هند (ی) و حساب هند (ی) ،
۹۸ ، ۱۰۰ ، ۱۰۳ ، ۱۰۶ ز .

حسن ابن موسی ابن شاگرد : ۱۰۰ .
حسین ابن حسن سمرقندی : ←
سمرقندی .

حل معادلات : ← معادلات ، حل .

حنین ابن اسحاق : ۹۹ ، + ۱۰۰ .

حیل بنوموسی : ۱۰۰ .

☆☆☆

خازن ، ابو جعفر : ۱۰۴ ، ۱۲۴ ، $\frac{۱۵۹}{۷}$ ،

$\frac{۲۱۷}{۱۷}$.

خجندی [ابو محمد حامد ابن خضر
خجندی] : ۱۰۵ .

خطائین : ۱۱۵ .

خط ترتیب : ۱۵۷ .

خوارزمی [محمد ابن موسی
الخوارزمی] : ۷۹ ، ۹۵ ، ۹۸ ، ۱۰۱-۱۰۳ ،

۱۰۴ ، ۱۰۵ ، ۱۰۸ ، ۱۱۱ ، ۱۱۴ ، + ۱۱۶ ،

بعد تا ۱۲۰ ، ۱۴۷ ، ۱۷۵ ز ، ۱۷۶ ز ،

۱۷۸ ز ، ۱۸۰ ز ، ۳۰۵ .

خیام : ۱۴۰-۱۴۱ ، ۱۴۳-۱۴۸ .

اصطلاحات ریاضی - : ۱۵۵-۱۵۷ ،
۱۷۲ ز ، ۱۸۱ ز-۱۸۲ ز . تأثیر یونانیان

در - : ۸۱ ، ۸۴ ، ۱۳۷ . تألیفات ریاضی - :

۷۷ ، ۱۴۱-۱۴۲ (نیز ← جبر خیام ؛ رساله

در تحلیل) . تحقیقات و کارهای - در جبر

و مقام وی در این علم : ۱۱۰ ، ۱۱۵ ،

۱۲۰ ، ۱۲۵ ، ۱۳۱ ، ۱۳۲ ، ۱۳۳ ، ۱۴۵ ،

۱۳۶ ، ۱۴۵ ، ۱۴۷ ، ۱۴۸ ، ۱۴۹ ، ۱۵۴ ،

$\frac{۱۶۵}{۱۰}$ ، $\frac{۱۶۸}{۱۱}$ ، $\frac{۱۷۰-۱۷۱}{۱۲-۱۳}$ ، $\frac{۲۴۰}{۵۱}$. محدودیتها

و خطاهای - : ۱۰۸ ز ، ۱۰۹ ، ۱۱۰ ،

۱۱۱ ، ۱۴۷-۱۴۸ ، ۱۴۷ ، ۱۴۹ ، ۱۵۰ ،

۱۷۵ ز ، ۱۸۰ ز ، ۱۸۱ ز-۱۸۲ ز ، ۲۱۳ ز-

۲۱۴ ز ، ۲۲۹ ز ، ۲۳۱ ز ، ۲۳۳ ز ، ۲۴۰ ز ،

۲۴۶ ز - ۲۴۷ ز ، ۲۵۳ ز ، ۲۶۴ ز .

نکاتی از تاریخ جبر در آثار - : ۱۴۴ ،

۱۵۴ ، $\frac{۱۵۹-۱۶۰}{۸-۷}$ ، $\frac{۱۶۰}{۱۰}$ ، $\frac{۱۶۵-۱۶۶}{۶۸-۶۷}$.

دیوفنطس : ۸۲ ذ (← دیوفانتوس).

☆☆☆

دیوفنطس : ۸۲ ذ ، ۱۰۵ (←

دیوفانتوس) .

☆☆☆

☆ رادیکس (radix) : ۱۱۲ .

رأس (قطوع مخروطی) : ۱۵۶ ،

۱۵۷ .

☆ رس (res) : ۱۱۲ .

رسالة فی استخراج جیب الدرجة الواحدة :

۱۳۴ ذ .

رساله در تحلیل (از خیام) : ۱۳۲ ، ۱۳۶ ،

۱۵۱-۱۵۵ ، ۱۶۴ ذ .

رفینه : ۱۰۵ ذ .

روزنفلد ، ب . آ . : ۱۳۴ ذ ، ۱۴۳ ، ۳۰۵ .

رومك سدهات : ۹۲ .

ریاضی و ریاضیات : ۷۷ ، ۷۸ ، ۷۹ ،

۸۴ ، ۸۸ ، ۹۲ ، ۹۵ ، ۹۷ ، ۹۸ ، ۱۰۸ ،

۱۱۰ ، ۱۲۵ ، ۱۳۳ ، $\frac{۱۰۹}{۷}$ ، $\frac{۱۶۱}{۸}$.

ریاضیات هندی (از جهت تأثیر در

ریاضیون اسلامی) : ۷۷ ، ۹۲ ، ۹۶ ، ۹۸ ،

۱۰۱ ، ۱۰۸ .

ریاضیات یونانی (از جهت نفوذ در

ریاضیون اسلامی) : ۷۷ ، ۸۱ ، ۸۴ ، ۹۸ ،

۱۰۱ ، از ۱۰۷ بیعد تا ۱۱۱ ، ۱۳۷-۱۳۸ ،

خیوس (Chios) : ۸۱ ذ .

دایره : ۱۵۷ ، $\frac{۱۶۵}{۱۰}$ ، $\frac{۱۸۷}{۲۱}$ ، $\frac{۲۴۰}{۵۱}$.

دایرة المعارف اسلام : ۸۴ ذ ، ۱۰۲ ذ ،

۱۳۰ ذ ، ۱۳۲ ذ ، ۳۰۴ .

دانش پژوه ، محمد تقی : ۱۳۴ ذ ،

۱۵۱ ذ ، ۱۵۲ + ، ۳۰۴ .

درج (یا استخراج) دو واسطه :

۸۱ ، ۸۷ ذ ، ۱۰۰ ، ۱۲۲-۱۲۳ ، ۱۲۴ ،

۱۲۵ ، ۱۴۰ ، ۱۴۸ ، $\frac{۱۸۹-۱۸۷}{۲۳-۲۱}$.

درج (یا استخراج) چهار واسطه :

۱۰۶ ذ ، $\frac{۲۳۸}{۵۰}$.

درهم و دراهم : ۱۱۳ .

دستگاههای معادلات : ←

معادلات ، دستگاههای .

دکارت (R. Descartes) : ۱۰۶ ،

۱۳۸ ذ .

دلوس (Delos) : ۱۲۲ ذ .

دو رساله دربارهی آثار علوی : ۱۳۴ ذ .

☆ دو نامودونامیس ، دو نامو کوبوس ،

و دو نامیس : ۱۱۲ .

دیوفانتوس (Diophantos) [در مآخذ

اسلامی دیوفنطس و زیوفنطس] : ۷۷ بیعد

تا ۸۰ ، ۸۳-۸۴ ، ۹۹ ، ۱۰۵ ، ۱۰۷ ، ۱۰۹ ،

بیعد تا ۱۱۳ ، ۱۲۰ ، ۱۲۱ ، ۱۳۸ .

- ۱۹۲ ز، ۲۳۴ ز، ۲۷۸ ز .
 ریاضیون عرب : ← عرب .
 ریثه ، استخراج و علامت : ۱۱۲ ،
 ۱۳۲ + ، ۱۵۵ ، $\frac{۱۶۶}{۱۱}$ ، $\frac{۱۷۲-۱۷۰}{۱۳-۱۲}$.
 ریثه یا جواب معادله : ←
 معادلات ، جواب یا ریثه ی .
 ☆ ☆ ☆
 زاویه ی ترتیب : ۱۵۷ .
 زاید : ۸۶ ، ۹۰ ببعده تا ۹۲ ، ۲۹۳ ،
 ز ، ۲۹۸ ، ۲۹۹ ز .
 ☆ ☆ ☆
 سارتن ، جورج (G. Sarton) : +۹۲ ،
 ۹۳ ز ، ۹۶ ز ، ۱۰۱ + ، ۱۰۴ ، ۱۳۳ ،
 ۱۳۴ ز ، ۱۳۵ ، ۱۵۵ ، ۳۰۶ ، ۳۰۵ .
 ساموس (Samos) : ۸۰ ز .
 سبخت ، سوروس (Severus Sebokht) :
 ۹۳ ز .
 سبوحی ، نصرالله : ۱۴۳ .
 سجزی ، ابوسعید احمد ابن عبدالجلیل :
 ۱۴۱ + ، ۱۵۲ ز .
 سدهات : ۹۲ ، ۹۳ ، ۹۴ ، ۹۷ .
 سدیو ، لوئی (L. P. E. A. Sédillot) :
 ۱۳۹ ، ۱۴۱ ، ۳۰۶ .
 سطح (بمعنی مستطیل) : ۱۴۷ ، ۱۵۶ ،
 ۱۹۰ / ۲۳ .
 سگال ، و . س . : ۳۰۵ .
 سلسله : ۷۹ ، ۱۱۰ .
 سلطان الدوله ی دیلمی : ۱۰۷ .
 سمرقندی [شرف الدین حسین ابن
 حسن سمرقندی] : ۳۰۱ + .
 سمیث ، دیوید یوجین (D. E. Smith) :
 ۷۸ ز ، ۹۳ ز ، ۱۰۲ ز ، ۱۰۳ ز ، ۱۰۴ ،
 ۱۰۹ ز ، ۱۱۵ ز ، ۱۱۶ ز ، ۱۲۰ ز ، ۱۲۴ ز ،
 ۱۴۳ ، ۳۰۵ ، ۳۰۶ .
 سند هند : ۹۷ ، ۹۸ .
 سوامی گوویندا تیرتهه : ← تیرتهه .
 سوتر ، هاینریش (H. Suter) : ۱۳۳ ،
 ۲۱۹ ز ، ۳۰۶ .
 سوری سدهات : ۹۲ ، ۹۴ ، ۹۷ .
 سهم (قطوع مخروطی) : ۱۵۶ ،
 ۱۵۷ .
 سهم (قوس) : ۲۷۸ ز .
 سهم (مخروط) : ۲۹۴ .
 سیال ، معادلات : ← معادلات
 سیال .
 سیزده مقاله : ← هیث .
 سینوس (sinus) : ۹۳ ز .
 ☆ ☆ ☆
 شرایط امکان معادلات : ←

ظل : ۹۸ ز .
 ☆☆☆
 عادل انبویا : ۱۰۶ ز .
 عبارت جبری : ۱۱۳ ز .
 عباس اقبال : ← اقبال آشتیانی .
 عبدالله ابن محمد الخدام العراقی
 البغدادی : ۱۳۴ ز .
 عبدالملك ابن محمد شیرازی ،
 ابوالحسین : ۹۰ ، ۲۹۳ .
 عدد : ۸۰ ز ، ۱۰۸ ، ۱۱۴ ، ۱۳۷ ،
 $\frac{۱۶۴}{۱۰}$ ، $\frac{۱۶۵}{۱۰}$ ، $\frac{۱۶۸}{۱۱}$ ، $\frac{۲۶۲-۲۶۳}{۶۵}$ ؛ (بمعنی جملهی
 معلوم معادله) ۱۱۳ ؛ (بمعنی عبارت جبری)
 ۱۱۳ ز . نمایش - : ۱۲۷ (← عدد
 مجسم ؛ عدد مسطح) . عدد مثبت : ۸۳ .
 عدد مجسم : ۱۴۷ ، $\frac{۱۷۲}{۱۴}$ ، $\frac{۱۶۳}{۲۵}$. عدد
 مسطح : ۱۴۷ ، $\frac{۱۷۱}{۱۳}$. عدد مطلق : ۱۳۷ ،
 $\frac{۱۶۱}{۸}$ ، $\frac{۱۶۵}{۱۰}$. عدد منفی : ۸۳ ، ۱۰۲ ز ،
 ۱۱۱-۱۱۴ ، ۱۵۰ .
 عدد : ۱۱۳ + ، ۱۸۱ ز - ۱۸۲ ز .
 عرب ، ریاضیون و منجمین : ۱۲۱ + ،
 ۱۲۵ ز ، ۲۹۹ - ۴۰۰ .
 عسقلان : ۱۲۳ ز .
 عضدالدوله دیلمی : ۱۰۵ ، $\frac{۲۶۸}{۶۸}$.
 عکس يك عدد : ۱۶۴ ز ، ۲۳۴ ز ،

معادلات ، بحث و شرایط امکان .
 شرفالدوله دیلمی : ۱۰۵ .
 شتی [ابو عبدالله محمد ابن احمد
 الشتی] : ۲۱۹ ز ، $\frac{۲۱۹}{۴}$.
 شیء : ۱۱۲ ، ۱۱۳ ، ۱۱۴ ، $\frac{۱۶۲}{۹}$ ،
 $\frac{۱۶۵}{۱۰}$ ، $\frac{۲۶۳}{۶۵}$.
 ☆☆☆
 صفانی ، ابو حامد : $\frac{۲۶۸}{۶۸}$.
 صفر : ۱۳۷ .
 صلاح الدین یوسف I ابن ایوب : ۱۵۵ ز .
 ☆☆☆
 ضریب : ۱۱۳ ، ۱۴۸ ، ۱۴۹ ، ۱۸۱ ز ،
 ۱۸۲ ز .
 ضلع : ۱۱۲ ، ۱۱۳ ، ۱۱۴ ، $\frac{۱۶۳}{۹}$.
 ضلع قائم : ۹۱ ، ۱۵۶ ، ۲۹۹ .
 ضلع مایل : ۱۵۶ ، ۲۹۹ .
 ضلع منتصب : ۲۹۹ .
 ☆☆☆
 طبقه بندی معادلات : ← معادلات ،
 طبقه بندی .
 طوسی ، خواجه نصیرالدین : ←
 نصیرالدین طوسی .
 ☆☆☆

فیتزجرالد ، ادوارد (E. Fitzgerald):

+ ۱۳۱

فیثاغورس: ۷۷ ، ۸۰ ، + ۱۲۱ .

فیثاغوریان: ۷۷ ، ۸۰ ، + .

☆☆☆

قائم ، ضلع : ← ضلع قائم .

قاضی زاده‌ی رومی: ۱۳۴ ذ .

قسطا ابن لوقا ، ۸۳ ، ۸۸ ، ۹۹ .

قطع زاید : ← قطوع مخروطی:

زاید .

قطع مخروطی : ← قطوع

مخروطی .

قطع مکافی : ← قطوع مخروطی:

مکافی .

قطع ناقص: ← قطوع مخروطی:

ناقص .

قطوع مخروطی یا مخروطات

(کلیات) : ۸۹ ، ۱۰۱ ، ۱۰۶ ، + ۱۵۵ ،

$\frac{۲۶۵}{۶۶}$ ، $\frac{۲۶۶}{۶۷}$ ، $\frac{۲۷۸}{۷۳}$ ، ۲۹۳ ، ۲۹۹ تا ۲۹۹ (نیز

← مخروطات) . تسمیه‌ی - : ۹۰-۹۲ ،

۲۹۳ ، ۲۹۸ . کشف - : ۸۱ ، ۹۰ .

- در حل معادلات درجات بالاتر از

۴ : ۹۰ ، ۱۰۶ ، ۱۰۷ ، ۱۲۴ ، ۱۲۵ ،

۱۲۶ ، ۱۳۵ ، ۱۴۹ ، ۱۵۰ ، ۱۵۷ ، $\frac{۱۵۹}{۷}$ ،

$\frac{۱۶۵}{۱۰}$ ، $\frac{۱۶۶}{۱۱}$ ، $\frac{۱۶۸}{۱۲}$ ، $\frac{۱۶۹}{۱۲}$ ، $\frac{۱۸۷}{۲۱}$ ، $\frac{۲۴۰}{۵۱}$ ، $\frac{۱۷۲}{۱۴}$ ،

$\frac{۲۴۱}{۵۲}$ ، $\frac{۲۶۵}{۶۶}$ ، $\frac{۲۶۶}{۶۶}$.

علاءالدوله ابوکالیجار : ۹۹ .

علامات : ۷۷ ، ۷۸ ، ۷۹ ، ۸۳ ، ۱۰۹ ،

۱۱۱ ، ۱۱۲ ، ۱۱۳ .

علم الفلك : ← نالینو .

علی ابن احمد عمرانی : ۱۰۴ .

علی محمد اصفهانی : ۱۲۵ ذ .

عمرانی ، علی ابن احمد . ← علی ابن

احمد عمرانی .

عمر خیام : ← خیام .

عیون الحساب : ۱۳۵ ذ .

☆☆☆

غیاث‌الدین جمشید کاشانی : ←

کاشانی .

☆☆☆

فارسی ، کمال‌الدین : ۱۳۴ ذ .

فخرالدوله‌ی دیلمی : ۱۰۵۰ .

فخرالملک واسطی : ۱۰۷ .

فخری : ۱۰۷ ، ۱۰۹ ، ۱۱۰ ، ۱۱۳ ذ ،

۱۲۱ ، ۲۳۴ ذ ، ۳۰۲ + (نیز ← ویکه) .

فزاری ، ابراهیم ابن حبیب : ۹۶ ،

۹۷ ، ۹۸ .

فیبناتچی ، لئوناردو (L. Fibonacci)

یا لئوناردو دا پیسا (L. da Pisa) :

۱۰۷ .

کندی [ابویوسف یعقوب کندی]:

. ۱۰۰، ۹۶

کنز الحساب: ۱۰۲، ۳۰۵.

☆ کنسوس (censos): ۱۱۲.

کنکه یا منکه: ۹۶، ۹۷.

کنیدوس (Cnidos): ۸۱، ۸۱.

☆ کوبوس و کوبو کوبوس: ۱۱۲.

کوچ، ویلهلم (W. Kutsch): ۱۰۱، ۱۰۱.

کونون (Conon): ۹۰.

کوهی، ابوسهل [ابوسهل و بیجن

(= بیژن) ابن رستم قوهی (= کوهی):

۱۰۵-۱۰۶، ۱۴۰، ۱۵۲، ۱۵۵، ۱۵۵، ۱۵۵.

. $\frac{268}{67}$ ، $\frac{219}{40}$

☆☆☆

گراردوس کرموننسیس (Gerardus)

(Cremonensis): ۹۳، ۱۰۰، ۱۰۰.

گولیوس (Golius): ۱۴۲، ۱۴۲.

☆☆☆

☆ لاتوس ترانسورسوم (latus

transversum): ۱۵۶، ۱۵۶.

☆ لاتوس رکتوم (l. rectum):

۹۱، ۹۱.

لئوی ارمنی (Leo): ۹۷.

قنسرین: ۹۳، ۹۳.

قوای مجهول: ← مجهول.

قوهی: ← کوهی.

☆☆☆

کاشانی (یا کاشی یا قاسانی)، غیاث

الدین جمشید: ۱۳۴، ۱۳۵، ۳۰۰، ۳۰۱، ۳۰۱.

. ۳۰۵

کتابخانه‌ی مرکزی دانشگاه تهران:

۱۵۱، ۳۰۱، ۳۰۲، ۳۰۲.

کرجی: ۱۰۶، ۱۰۶.

کرخنی [ابوبکر محمد کرخی]:

۸۳، ۱۰۴، ۱۰۶-۱۰۷، ۱۲۱، ۲۳۴، ۲۳۴، ۲۳۴.

. + ۳۰۲

کروتونا (Crotona): ۸۰، ۸۰.

کره و اسطوانه (یا اسطوانه): ۱۰۱، ۱۰۱.

. $\frac{267}{67}$ ، $\frac{159}{7}$ ، ۱۲۳، ۱۰۶.

کف الظنون: ۱۳۴، ۱۳۴.

کشکول: ۱۲۲، ۱۲۲.

کعب: ۱۱۲، ۱۱۳، $\frac{162}{9}$ ، $\frac{165}{11}$ (نیز

← مکعب).

کعب کعب: ۱۱۳، $\frac{162}{9}$ ، $\frac{135}{48}$ ، $\frac{262}{65}$.

کم (و کمیت): ۸۰، ۱۰۸، ۱۳۷، ۱۳۷.

. $\frac{262}{65}$ ، ۱۶۴، $\frac{171}{9}$

کمال الدین فارسی: ← فارسی.

مثناة: (۱۹۲) $\frac{۱۹۲}{۲۵}$ ، ۱۹۲ ن. ذ.
 . مجانب : ۱۵۷ +
 . مجسطی : ۹۹ + ، $\frac{۲۷۸}{۷۳}$
 . مجسم : ۱۴۷ ، ۱۵۶ ، $\frac{۱۹۰}{۲۳}$
 . مجله شرق : ۱۳۰ ن. ذ.
 مجهول : ۱۱۲-۱۱۳ ، ۱۱۴ ، ۱۲۰ ،
 . ۱۲۱ ، ۱۳۷ ، $\frac{۱۵۹}{۷}$ ، $\frac{۱۶۱}{۹}$ ، ۱۶۳ ، $\frac{۲۶۵}{۲۱}$ ،
 محمد ابن ابانراب : ۱۵۱ ن. ذ.
 محمد ابن الحسين ابن محمد ابن
 الحسين : ۱۵۵ ن. ذ.
 محمد ابن ليث ، ابوالجود : ←
 ابوالجود .
 محمد ابن موسى ابن شاکر : ۱۰۰ .
 محمد ابن موسى خوارزمی : ←
 خوارزمی .
 محمد باقر یزدی : ۱۳۵ ن. ذ.
 محمود ابن محمد قاضی زاده : ←
 چلبی .
 محور کانونی : ۱۵۶ .
 مخروط : ۲۹۳ ، ۲۹۴ ، ۲۹۵ .
 مخروطات و مخروطات آبولونیوس :
 ، ۸۴ ، ۸۹-۹۳ ، ۹۹ ، ۱۰۰ ، ۱۰۱ ،
 ، ۱۰۶ ن. ذ. ، ۱۳۷ ، ۱۵۵ ، ۱۵۶ ، $\frac{۱۶۳}{۹}$ ، $\frac{۱۶۵}{۱۰}$ ،
 ، $\frac{۱۸۷}{۲۱}$ ، $\frac{۲۶۵}{۲۱}$ ، ۲۹۳-۲۹۹ . (نیز ←

لوکی ، پاول (P. Luckey) : ۱۳۲ ن. ذ.
 لیری ، گولیمو (G. Libri) :
 . ۱۳۹ ، ۱۴۱ .
 لیدن (Leyden) : ۸ ن. ذ. ، ۱۳۲ ، ۱۳۸ ،
 . ۱۳۹ ، ۱۴۲ ، ۱۴۳ .

☆☆☆

مال : ۱۱۲ ، ۱۱۳ + ، $\frac{۱۶۲}{۹}$ ، $\frac{۱۶۳}{۱۰}$ ،
 . $\frac{۲۶۳}{۶۵}$ ، $\frac{۱۶۵}{۱۰}$

مال کعب : ۱۱۳ ، $\frac{۱۶۲}{۹}$ ، $\frac{۲۳۵}{۴۸}$ ، $\frac{۲۶۲}{۶۵}$ ،
 مال مال : ۱۱۳ ، ۱۳۸ ، ۱۴۵ ،
 ، $\frac{۱۶۳}{۹}$ ، $\frac{۱۶۴}{۱۰}$ ، ۱۶۴ ، $\frac{۲۳۵}{۴۸}$ ، $\frac{۲۶۲}{۶۴}$ ، $\frac{۲۶۳}{۶۵}$ ،
 . $\frac{۲۶۴}{۶۵}$

مال مکعب : $\frac{۱۷۴}{۱۵}$ ، ۱۷۴ ن. ذ.

مأمون : ۹۶ بعد تا ۱۰۲ .

ماهانی [ابو عبدالله محمد ماهانی] :
 ، ۱۰۴-۱۰۴ ، ۱۲۴ ، $\frac{۱۵۹}{۷}$ ، $\frac{۲۰۶}{۲۳}$ ، $\frac{۲۶۷}{۶۷}$ ،

۲۶۸ ن. ذ. معادله ی - : ۱۰۴ ، ۱۲۴ .

مایل ، ضلع : ← ضلع مایل .

متجانس کردن معادلات : ←
 معادلات ، متجانس کردن .

متکافی یا مکافی (در نسبت) : ۱۵۶ .

مثبت : ← عدد منفی ؛ معادلات ،
 جواب یا ریشه ی .

مثلثات : ۹۳ ، ۹۸ ن. ذ. ، ۱۰۳ ن. ذ. ، ۱۰۴ ،

. ۱۰۵

حل عددی - : ۱۲۵ ، ۱۳۶ ، ۱۵۴ ، ۱۴۵ ،
 $\frac{۱۶۰}{۱}$ ، ۱۶۵ ، ۱۶۶ ، $\frac{۱۶۶}{۱۱}$ ، $\frac{۲۶۰}{۶۶}$. حل هندسی - :
 ۸۰ ، ۱۰۶ ، ۱۴۵ ، $\frac{۱۶۰}{۱۰}$ ، $\frac{۱۶۶}{۱۱}$ ، $\frac{۲۶۰}{۶۶}$.
 دستگاه‌های - : ۸۳ ، ۸۹ ، ۱۱۰ ، ۱۴۰ -
 ۱۴۱ . طبقه بندی - : ۱۰۸ ، ۱۱۱ ، ۱۱۲ ،
 ۱۱۴ - ۱۱۵ ، ۱۳۵ ، ۱۳۶ ، ۱۴۵ - ۱۴۷
 ۱۵۴ ، $\frac{۱۶۶-۱۶۱}{۱۲-۱۰}$ ، $\frac{۲۶۶-۲۶۰}{۶۶-۶۶}$ طبقه بندی -
 بر حسب درجه : ۱۱۵ ، ۱۵۴ . متجانس
 کردن - : ۱۴۷ ، ۱۴۸ .
 معادلات درجات بالاتر از سوم ،
 ۱۰۵ ، ۱۰۶ ، ۱۰۷ ، ۱۴۶ - ۱۴۸ ، ۱۵۰ ،
 $\frac{۲۴۰}{۴۸}$ ، ۲۴۰ ز .
 معادلات درجه‌ی اول : ۷۹ ، ۹۴ ،
 ۹۵ ، ۱۰۳ ، ۱۱۰ ، ۱۱۵ ، $\frac{۱۷۰}{۱۲}$.
 معادلات درجه‌ی دوم : ۷۹ بیدتا
 ۸۳ ، ۸۵ ، ۸۶ ، ۹۴ ، ۹۵ ، ۱۰۳ ، ۱۱۰ ،
 ۱۴۷ . حل - : ۱۱۵ - ۱۱۶ ؛ (طریق خوارزمی)
 ۱۱۶ - ۱۲۰ ؛ (طریق خیام) $\frac{۱۷۱-۱۷۰}{۱۳-۱۲}$ ،
 $\frac{۱۷۲}{۱۴}$ ، $\frac{۱۷۲-۱۷۴}{۱۱-۱۰}$ (نیز ← معادلات کسری) .
 معادلات درجه‌ی سوم : ۱۰۴ ،
 ۱۰۵ ، ۱۰۷ ، ۱۲۱ ، ۱۲۳ ، ۱۲۴ - ۱۲۵ ،
 ۱۳۵ ، ۱۴۶ بیدتا ۱۵۰ ، ۱۵۳ ، ۱۵۴ .
 حل و بحث - در آثار خیام : $\frac{۱۷۲}{۱۴-۱۳}$ ،
 $\frac{۲۳۳-۲۶۶}{۷۰-۶۸}$ ، $\frac{۲۳۳-۱۹۳}{۴۸-۲۵}$ (نیز ← معادلات
 کسری) .

قطوع مخروطی (مراتب هفتگانه : $\frac{۲۳۰}{۴۸}$ ، ۲۳۶ ، $\frac{۲۳۹}{۵۱}$.
 مرکب و مرکبات : ۱۱۴ ، $\frac{۲۶۶}{۶۶}$) نیز
 ← مقترن) .
 مسائل ثلاثه : ۱۲۲ ، ۱۴۳ .
 مسائل چند مجهولی : ← معادلات
 چند مجهولی .
 مسئله‌ی ارشمیدس : ← ارشمیدس ،
 مسئله‌ی .
 مسعودی ، شرف‌الدین محمد : ۱۳۴ ، ۱۳۵
 صاحب ، غلامحسین : ۱۰۶ ، ۱۲۲ ، ۱۲۴ ،
 ۱۲۵ ، ۱۳۱ ، ۱۳۳ ، ۳۰۵ .
 معادلات (و معادله) (کلیات) :
 ۱۱۰ ، ۱۱۱ ، ۱۵۳ ، $\frac{۱۵۹}{۷}$ ، $\frac{۱۶۲}{۹}$ ، ۱۶۳ ، ۱۷۰ ،
 $\frac{۱۶۴}{۱}$. بحث و شرایط امکان - : ۱۰۹ ،
 ۱۱۸ ، ۱۳۶ ، ۱۳۸ ، ۱۴۷ ، ۱۴۸ ، ۱۴۹ ،
 ۱۵۰ ، ۲۰۲ ، ۲۰۳ ، ۲۱۴ ، ۲۱۷ ، ۲۲۵ ،
 ۲۲۷ ، ۲۳۳ ز . بیان - :
 ۱۱۳ - ۱۱۴ . تمیز حل عددی و هندسی - :
 ۱۳۷ - ۱۳۸ ، ۱۴۵ ، $\frac{۱۶۰}{۱۰}$ ، $\frac{۱۶۶}{۱۱}$ ، $\frac{۱۶۷}{۱۱}$ ،
 $\frac{۱۶۸}{۱۱}$ ، $\frac{۱۸۷}{۲۱}$ ، $\frac{۱۶۸}{۱۲}$ ، $\frac{۱۶۸}{۱۱}$.
 جواب یا ریشه‌ی - : ۱۱۱ ، ۱۱۷ ،
 ۱۳۷ ، ۱۲۱ ، ۱۴۹ ، ۱۵۰ . حل - :
 ۱۳۷ . حل - بوسیله‌ی امتحان و تصحیح :
 ۷۹ ، ۱۱۵ . حل تقریبی - : ۱۲۵ ، $\frac{۲۷۸}{۷۳}$.

$\frac{۲۶۲}{۶۵}$ ، $\frac{۱۶۵}{۱۰}$ ، $\frac{۱۶۴}{۱۰}$ ، $\frac{۱۶۱}{۹}$.
 مقدمه‌ی این خلدون : ۱۳۳ ن .
 مکافی : ۹۰ ببعد تا ۹۲ ، ۲۹۳ ن ،
 ۲۹۸ ، ۲۹۹ ن .
 مکافی (در نسب) : ← متکافی .
 مکعب : ۱۱۲ ، $\frac{۱۶۳}{۱۰}$ ، $\frac{۲۶۲}{۶۵}$ ، $\frac{۲۶۵}{۶۶}$ (نیز
 ← کعب) .
 ملک‌شاه سلجوقی : ۱۳۰ ، ۱۳۱ .
 منایخ‌موس (Menaechmos) : ۸۱ ،
 ۹۰ ، ۱۲۴ .
 منشی زاده ، احمد : ۳۰۳ .
 منتصب ، ضلع : ← ضلع منتصب .
 منصور ، ابو جعفر : ۹۶ ، ۹۷ .
 منکه : ← کنکه .
 منفی : ← عدد ؛ معادلات ،
 جواب یا ریشه‌ی .
 موسی ابن شاکر : ۱۰۰ .
 مونا داس : ۱۱۳ .
 موتو کلا ، ژان اتین (J. E.)
 Montucla) : ۱۳۸ ، ۱۴۲ ، ۳۰۶ .
 مونژ ، کاسپار (G. Monge) : ۱۳۹ .
 مهاویر : ۹۴ ، ۹۵ .
 میرم چلبی : ← چلبی
 مینورسکی ، ولادیمیر (V. Minorsky) :
 ۱۳۰ ن ، ۱۳۲ ن .

معادلات دیوفانتی : ۸۳ ن .
 معادلات سیال : ۸۳ + ، ۹۲ ، ۹۴ ،
 ۹۵ ، ۱۰۷ ، ۱۱۰ ، ۱۲۱ .
 معادلات قابل تحویل بدرجات
 پایینتر (خاصه بدرجه‌ی دوم) : ۱۴۶ :
 (در جبر خیام) $\frac{۱۸۷-۱۸۳}{۲۰-۱۶}$ ، $\frac{۱۷۴-۱۷۳}{۱۵-۱۴}$.
 معادلات کسری : ۱۵۰ ، $\frac{۲۳۲}{۴۸}$ ،
 $\frac{۲۴۰-۲۳۵}{۵۱-۴۹}$.
 معادله : ← معادلات
 معادله‌ی ماهانی : ← ماهانی .
 معطیات : ۸۱ ، ۸۴ ، ۸۷ ن ، ۸۸-۸۹ ،
 ۱۰۱ ، ۱۳۷ ، $\frac{۱۶۲}{۹}$ ، $\frac{۱۶۵}{۱۰}$ ، $\frac{۱۸۷}{۲۱}$ ، $\frac{۲۷۲}{۷۰}$ ، ۳۰۵ .
 « معلوم بودن » : ۸۸-۸۹ ، $\frac{۲۷۲}{۷۰}$.
 معین ، دکتر محمد : ۱۰۰ ن ، ۱۳۰ ن ،
 ۱۳۱ ن ، ۱۴۱ ن ، ۲۶۸ ن ، ۳۰۵ .
 مفصاح الحساب : ۱۳۴ + ، ۳۰۱ ، ۳۰۵ .
 مفرد و مفردات : ۱۱۴ ، ۱۲۶ ، ۱۴۵ ،
 $\frac{۲۶۵}{۶۶}$ ، $\frac{۱۶۶}{۱۰}$.
 مقابله (عمل) : ۱۰۴ + ، ۱۱۱ ، ۱۰۸ ،
 ۱۱۶ .
 مقادیر : ← مقدار .
 مقترن (یا مرکب) و مقترنات (یا
 مرکبات) : ۱۱۴ ، ۱۳۶ ، ۱۴۵ ، ۱۴۶ ،
 $\frac{۲۶۵}{۶۶}$ ، $\frac{۱۶۶-۱۶۶}{۱۲-۱۰}$.
 مقدار : ۱۳۷ ، ۱۳۸ ، ۱۴۵ ، ۱۴۷ ،

- وراهمپیر : ۹۲ .
 ویت ، فرانسوا (F. Viète) : ۱۰۳ + .
 ☆☆☆
 ☆ هائو : ۱۱۲ .
 هارون الرشید : ۹۶ ، ۹۸ .
 هرون (Heron) [در مآخذ اسلامی
 ایرون اسکندرانی] : ۸۲ ، ۹۹ .
 هلال ابن هلال حمصی : ۹۰ ، ۹۹ .
 هندسه : ۸۱ ، ۱۱۰ ، ۱۲۵ ، $\frac{۲۶۴}{۶۵}$.
 هندسه‌ی تحلیلی : ۱۰۹ .
 ☆ هوپربوله : ۸۶ ، ۹۱ ، ۹۲ ، ۲۹۸ .
 هوپسیکلس (Hypsicles) : ۸۷ ن .
 هیپارخوس (Hipparchos) [نام
 یونانی ابرخس] : ← ابرخس .
 هیث، سر تامس لیثل (Sir T. L. Heath) :
 ۱۲۳ ن ، ۲۹۳ . کتاب او بنام تاریخ ریاضیات
 یونانی : ۸۶ ، ۱۲۴ ن ، ۲۹۳ ، ۳۰۵ ، ۳۰۶ .
 کتاب او بنام سیزده مقاله‌ی اصول اقلیدس :
 ۸۷ ن ، ۸۸ ن ، ۱۵۳ ن ، ۱۵۶ ن ، ۲۳۴ ن ،
 ۲۵۵ ن ، ۲۷۷ ن ، ۳۰۵ ، ۳۰۶ .
 ☆☆☆
 یعقوب ابن طاروق : ۹۶ ، ۹۸ .
 یوشکویچ، ا. پ. : ۱۳۴ ن ، ۱۴۴ ،
 ۳۰۵ .

- مینوی ، مجتبی : ۳۰۲ ن .
 ☆☆☆
 ناقص : ۸۶ ، ۹۰ ، ۹۲ ، ۲۹۳ ن ،
 ۲۹۸ ، ۲۹۹ ن .
 نآلینو ، کارلو آلفونسو (C. A. Nallino) :
 ۹۴ ن ، ۹۶ ن ، ۲۹۹ ، ۳۰۰ ، ۳۰۵ .
 نسبت و نسب : ۸۵ ، ۱۳۲ ، ۱۵۶ ،
 $\frac{۱۶۵}{۱۰}$ ، $\frac{۱۶۶}{۱۱}$ ، ۱۹۲ ن ، $\frac{۲۳۵}{۴۸}$. نسبت
 مساوات و نسبت مساوات مضطرب :
 $\frac{۲۷۶}{۷۲}$ ، ۲۷۶ ن ، ۲۷۷ ن .
 نصیرالدین طوسی : ۸۷ ن ، ۸۸ ، ۱۳۴ ن .
 نهضت علمی اسلامی : ۹۵ ، ۹۶ ، ۹۸ .
 نیکوماخوس (Nicomachos) [در مآخذ
 اسلامی نیکوماخوس] : ۱۰۱ ن .
 ☆☆☆
 واسیفته سدهات : ۹۲ .
 ویکه ، فرانتس (F. Woepcke) : ۸۰ ن ،
 ۹۲ ، ۱۰۶ ، ۱۰۷ ، ۱۰۹ + ، ۱۲۱ ،
 ۱۲۴ ، ۱۲۵ ، ۱۲۶ + ، ۱۳۳ ، ۱۳۹ +
 ببعده تا ۱۴۲ ، ۱۴۳ ، ۱۵۰ ن ، ۲۹۹ : جبر
 عمر خیامی (از ویکه) : ۸ ن ، ۱۰۵ ن ، ۱۰۶ ،
 ۱۲۵ ن ، ۱۲۶ + ، ۱۳۸ ن ، ۱۳۹ ببعده تا
 ۱۴۲ ، ۱۵۵ ن ، ۲۴۹ ن ، ۳۰۵ ، ۳۰۶ ؛ ملخص
 فخری (از ویکه) : ۹۲ ن ، ۱۰۷ ، ۱۲۱ ن ،
 ۳۰۲ ن ، ۳۰۵ ، ۳۰۷ .

شماره	فهرست انتشارات انجمن آثار ملی	تاریخ انتشار
۱	فهرست مختصری از آثار وابسته تاریخی ایران	شهریور ماه ۱۳۰۴
۲	آثار ملی ایران (کنفرانس پرفسور هرتسفلد)	مهرماه
۳	شاهنامه و تاریخ (کنفرانس پرفسور هرتسفلد)	شهریور ماه ۱۳۰۵
۴	کشف دولوح تاریخی در همدان (تحقیق پرفسور هرتسفلد) ترجمه آقای مجتبی مینوی	اسفند ماه
۵	سه خطابه درباره آثار ملی و تاریخی ایران (از آقایان فروغی، هرتسفلد و هانی بال)	مهر ماه ۱۳۰۶
۶	کشف الواح تاریخی تخت جمشید (پرفسور هرتسفلد)	بهمن ماه ۱۳۱۲
۷	کنفرانس آقای فروغی راجع به فردوسی	بهمن ماه ۱۳۱۳
۸	تحقیق مختصر در احوال وزندگانای فردوسی (بقلم فاطمه خانم سیاح)	۱۳۱۳
۹	تجلیل ابوعلی سینا در پنجمین دوره اجلاسیه یونسکو در فلورانس	اسفند ماه ۱۳۲۹
۱۰	رساله جودیه ابن سینا (بتصحیح آقای دکتر محمود نجم آبادی)	۱۳۳۰
۱۱	رساله نبض ابن سینا (بتصحیح آقای سید محمد مشکوه استاد دانشگاه)	۱۳۳۰
۱۲	منطق دانشنامه علائی ابن سینا (بتصحیح آقایان دکتر محمد معین وسید محمد مشکوه استادان دانشگاه)	۳۱۳۱
۱۳	طبیعیات دانشنامه علائی ابن سینا (بتصحیح آقای سید محمد مشکوه استاد دانشگاه)	۱۳۳۰
۱۴	ریاضیات دانشنامه علائی ابن سینا (بتصحیح آقای مجتبی مینوی استاد دانشگاه)	
۱۵	الهیات دانشنامه علائی ابن سینا (بتصحیح آقای دکتر محمد معین استاد دانشگاه)	۱۳۳۱
۱۶	رساله نفس ابن سینا (بتصحیح آقای دکتر موسی عمید استاد دانشگاه)	
۱۷	رساله درحقیقت و کیفیت سلسله موجودات (بتصحیح آقای دکتر موسی عمید استاد دانشگاه)	۱۳۳۱
۱۸	ترجمه رساله سرگذشت ابن سینا (از آقای دکتر غلامحسین صدیقی استاد دانشگاه)	-
۱۹	معراج نامه ابن سینا (بتصحیح آقای دکتر غلامحسین صدیقی)	-
۲۰	رساله تشریح اعضاء ابن سینا (بتصحیح آقای دکتر غلامحسین صدیقی استاد دانشگاه)	-

شماره	فهرست انتشارات انجمن آثار ملی	تاریخ انتشار
۲۱	رساله فراضه طبیعیات منسوب باین سینا (بتصحیح آقای دکتر غلامحسین صدیقی استاد دانشگاه)	۱۳۳۲
۲۲	ظفرنامه منسوب باین سینا (بتصحیح آقای دکتر غلامحسین صدیقی استاد دانشگاه)	-
۲۳	رساله کنوز المعزمین ابن سینا (بتصحیح آقای جلال الدین همائی استاد دانشگاه)	۱۳۳۱
۲۴	رساله معیار العقول - جرثقیل - ابن سینا (بتصحیح آقای جلال الدین همائی استاد دانشگاه)	د
۲۵	رساله حی بن یقطان ابن سینا با ترجمه و شرح فارسی آن از یکی از معاصران ابن سینا (بتصحیح آقای هانری کربن)	د
۲۶	جشن نامه ابن سینا (مجلد اول - سرگذشت و تألیفات و اشعار و آراء ابن سینا) تألیف آقای دکتر ذبیح الله صفا استاد دانشگاه	۱۳۳۲
۲۷	ترجمه مجلد اول جشن نامه بفرانسه (بوسیله آقای سعید نفیسی استاد دانشگاه)	د
۲۸	ترجمه اشارات و تنبیهات (بتصحیح آقای دکتر احسان یارشاطر استاد دانشگاه)	د
۲۹	پنج رساله فارسی و عربی از ابن سینا (بتصحیح آقای دکتر احسان یارشاطر استاد دانشگاه)	۱۳۳۳
۳۰	آثار تاریخی کلات و سرخس (تألیف آقای مهدی بامداد)	
۳۱	جشن نامه ابن سینا مجلد دوم (حاوی نطقهای فارسی اعضاء کنگره ابن سینا)	۱۳۳۴
۳۲	جشن نامه ابن سینا مجلد سوم (کتاب المهر جان لابن سینا) حاوی نطقهای عربی اعضاء کنگره ابن سینا	۱۳۳۵ شمسی
۳۳	جشن نامه ابن سینا مجلد چهارم (شامل خطابه های اعضاء کنگره ابن سینا بزبانهای آلمانی و انگلیسی و فرانسوی)	د ۱۳۳۴
۳۴	نبردهای نادر تألیف تیمسار سرلشکر غلامحسین مقتدر	د ۱۳۳۹
۳۵	جبر و مقابله خیام (تصحیح و تحشیه آقای دکتر جلال مصطفوی)	د ۱۳۳۹
۳۶	شاهنامه نادری تألیف مونا محمد علی فردوسی ثانی (بتصحیح و تحشیه آقای احمد سهیلی خوانساری)	د ۱۳۳۹
۳۷	اشترنامه شیخ فریدالدین عطار (بتصحیح و تحشیه آقای دکتر مهدی محقق)	د ۱۳۳۹
۳۸	حکیم عمر خیام بعنوان عالم جبر تألیف آقای دکتر غلامحسین مصاحب	د ۱۳۳۹

**Society for the Appreciation of
Cultural Works and Dignitaries**

**with the collaboration
of Iranian National Commission
for UNESCO**

HAKIM OMARE KHAYYAM

AS AN

ALGEBRAIST

*Texts and Persian translation of
Khayyam's Works on Algebra, with
introductory chapters and commentaries*

by

G. H. Mossaheb



Second Edition
Tehran, 2000