سلسله‌ی انتشارات انجمن آثار ملی
(۳۸)

به یادبود بنای آرامگاه خیام

حکیم عمر خیام

بعنوان

عالم جبر

مشتمل بر متون و ترجمه‌ی فارسی آثار خیام در علم جبر و تحلیل کارهای جبری وی ، با مقدمات و حواشی

باهتمام

غلامحسین مصاحب

چاپخانه‌ی بهمن

تهران ۱۳۳۹ ه ش

Anjomane Asare Melli Publications, No. 38
Khayyam Commemorative Series

HAKIM OMARE KHAYYAM

AS AN

ALGEBRAIST

Texts and Persian translation of Khayyam's Works on Algebra, with introductory chapters and commentaries

by

G. H. Mossaheb

Bahman Printing
Teheran, 1960

سلسله‌ی انتشارات انجمن آثار ملی به یادبود بنای آرامگاه خیام
(۳۸)

حکیم عمر خیام

بعنوان

عالم جبر

مشتمل بر متون و ترجمه‌ی فارسی آثار خیام در علم جبر و تحلیل کارهای جبری وی ، با مقدمات و حواشی

باهتمام
غلامحسین مصاحب

تهران ۱۳۳۹ ه ش

مقدمه

موضوع کتاب حاضر معرفی آثار و تحقیقات حکیم عمر خیام است درعلم‌جبر.

از خیام فعلا دو رساله در این باب در دست داریم ، یکی رساله‌ی او درعلم جبر، و دیگری رساله‌ای در تحلیل یك مسئله‌ی هندسی به معادله‌ی درجه‌ی سوم و حل این معادله بوسیله‌ی قطوع مخروطی .

محققین تاریخ علوم دقیقه رساله‌ی خیام را در جبر از شاهکارهای علمی قرون وسطی شمرده‌اند ، و این نه از آنست که این رساله در بسط علم جبر تأثیری داشته ، بلکه اهمیت رساله از اینست که در آن برای اول دفعه قسمتی از یکی از مباحث عمده‌ی جبر یعنی مبحث معادلات درجات اول و دوم و سوم ، فی حد ذاته و قطع نظر از فواید عملی آن ، منظماً مورد بحث قرار میگیرد ، و بعبارت مختصر و مفید ج . سارتن ، محقق معروف تاریخ علوم ، « **خیام اول کسی است که به تحقیق منظم علمی در معادلات درجات اول و دوم و سوم پرداخته وطبقه‌بندی تحسین ـ آوری از این معادلات آورده است . . . و رساله‌ی وی در علم جبر ، که مشتمل بر این تحقیقات است ، معرف یك فکر منظم علمی است ؛ و این رساله یکی از برجسته‌ترین آثار قرون وسطائی و احتمالا برجسته‌ترین آنها دراین علم است .** »

نگارنده که همواره شوقی به مطالعه‌ی‌تاریخ ریاضیات در دوره‌ی‌اسلامی‌داشته‌ام ، چندین سال پیش ، در صدد معرفی رساله‌ی خیام در جبر به فارسی زبانان برآمدم(✿) ، و بدین منظور کتابی بنام **جبر و مقابلهٔ خیام** پرداختم که مشتمل بود بر متن رساله‌ی خیام و ترجمه‌ی ملخصی از آن ونیز مقدماتی که در فهم جبر خیام و شناسانیدن ارزش

(✿) جا دارد که این صفحه را به ذکر جمیل استاد بزرگوار خود مرحوم غلامحسین رهنما مزین کنم . اولین آشنائی من باکارهای جبری خیام بوسیله‌ی نسخه‌ای بود که از روی کتاب **جبر عمر خیام** وپکه برای آن مرحوم استنساخ شده بود .

علمی آن مفید و بلکه ضروری مینمود . این کتاب در سال ۱۳۱۷ ه ش به همت آقای نصرالله سبّوحی ، مدیر کتابفروشی وچاپخانه‌ی مرکزی، چاپ ونشر شد ، وبدین‌ترتیب ، برای نخستین بار رساله‌ی گرانبهای خیام در دسترس فارسی زبانان قرار گرفت . این کتاب ظاهراً فعلا کمیاب است ، و در هر صورت ، در سراسر آن ، آثار خامیهای ایام جوانی مؤلف هویدا است ، و بعضی مطالب آن شدیداً محتاج تنقیح وتجدید نظر است.

در تابستان سال ۱۳۳۸ ، از طرف انجمن محترم آثار ملی به نگارنده تکلیف شد که کتابی در معرفی کارهای جبری خیام و بالاخص مشتمل بر متون آثار او و ترجمه‌ی فارسی آنها تهیه کنم ، ولی بنده با اینکه سخت مشتاق انجام چنین خدمتی بودم ، ابتداء بجهاتی در قبول آن تردید داشتم ، ولی در این امر چنان شور و خلوص نیتی در آن انجمن دیدم که دریغم آمد باین خدمت تن درندهم . پس انجام این‌تکلیف را که فرصت مناسبی برای معرفی صفحات درخشانی از تاریخ علوم در دوره‌ی اسلامی بود بعهده گرفتم ، و به تهیه‌ی کتاب حاضر پرداختم .

☆ ☆ ☆

رؤوس مطالب کتاب را با نظری به فهرست مندرجات آن میتوان دریافت . بعلاوه **فهرست عمومی الفبائی** آخر کتاب (صص ۳۰۹ ـ ۳۲۴) راهنمای جامعی به مطالب کتاب است . معذلك ، ذکر نکاتی چند در این مقام مفید بنظر میرسد .

(۱) متون آثار خیام . آنچه از آثار خیام که در این کتاب آمده‌است یکی رساله‌ی اوست در علم جبر ، و دیگری رساله‌ای از وی که در نسخه‌ی موجود آن عنوان خاصی ندارد ، و ما برای تسهیل آنرا **رساله درتحلیل یك مسئله** و گاهی باختصار **رساله‌ی تحلیل** نامیده‌ایم ، و تا حدی که اطلاع داریم اولین بار است که این رساله طبع میشود .

متن رساله‌ی خیام از روی متن وپکه ، که تفصیل آن در صفحات ۱۴۱-۱۴۲ کتاب حاضر آمده است ، چاپ شده است .

از **رساله‌ی تحلیل** تنها نسخه‌ای که بهنگام چاپ کتاب در دسترس نگارنده بود

همان بود که چندین سال پیش‌از روی نسخه‌ای متعلق به عباس اقبال آشتیانی استنساخ نموده بود (رجوع کنید به صفحات ۱۵۱ ـ ۱۵۲ کتاب حاضر) ، و چون با تمام کوششی که برای یافتن نسخه‌ی اصلی بعمل آمد از آن خبری نیافت ، به چاپ نسخه‌ای که خود استنساخ کرده بود مبادرت نمود . خوشبختانه در جریان طبع کتاب بتوسط آقای محمد تقی دانش پژوه اطلاع حاصل شد که نسخه‌ی اصلی رساله در کتابخانه‌ی مرکزی دانشگاه تهران مخزون است . پس به همت انجمن آثار ملی و مساعدت فضلای محترم ، آقایان دکتر ذبیح‌الله صفاومحمد تقی‌دانش پژوه ودیگر اولیاءِ کتابخانه‌ی مرکزی دانشگاه تهران عکسی‌از آن نسخه فراهم شد ، و برای‌تتمیم‌فایده در کتاب حاضر درج گردید (صص ۲۸۲ ـ ۲۹۲) ، تا خوانندگان اصل کلام منسوب به خیام را نیز در دست داشته باشند ، و بعلاوه بدین ترتیب میتوان انحرافاتی را که ممکن است بین متن چاپی رساله‌ی تحلیل با متن اصلی موجود باشد کشف کرد .

مطالب خارج از سخن خیام را ، که به جهتی در متون یا ترجمه‌های فارسی آنهادرج شده، در داخل علامت «[ ]» قرار داده‌ایم. در متون رسایل خیام این‌اضافات تقریباً منحصر است به شماره‌هایی که بمنظور طبقه‌بندی مطالب مورد بحث خیام‌درج کرده‌ایم . در باب طبقه‌بندی مطالب اشاراتی در بند (۴) همین مقدمه آمده است . در این جا کافی است گفته شود که شماره گذاری در متون و ترجمه های آنها بنحوی است که فقط اولین رقم سمت چپ ، که نماینده‌ی قسمتی از قسمتهای کتاب است ، تفاوت میپذیرد ، و بدین ترتیب ، خواننده به آسانی میتواند ترجمه‌ی هر فصل یا جزئی از متون خیام را به آسانی پیدا کند . مثلا مطلبی که در قسمت اول تحت شماره‌ی ۱۰۸۰۴۰۱ آمده ترجمه‌ی آن در قسمت پنجم تحت شماره‌ی ۵۰۸۰۴۰۱ مضبوط است .

در شکلهای رسائل خیام ، برای تسهیل کار ، هم حروف عربی را بر طبق متون وی قرار داده‌ایم ، وهم حروف الفبای لاتینی را . تناظر حروف دو الفبا مستخرج است

از تناظری که ریاضیون دوره‌ی اسلامی‌در نقل شکلهای آثار یونانی به عربی‌تثبیت کرده بودند ، از این قرار

ا	ب	ج	د	ه	و	ز	ح
A	B	C	D	E	W	Z	H

ط	ی	ك	ل	م	ن	س	ع	ف
T	I	K	L	M	N	S	O	F

(۲) ترجمه‌ی فارسی رسائل‌خیام . برای‌اینکه خوانندگان ناآشنا به‌زبان عربی از استفاده از رسائل خیام محروم نمانند ، ترجمه‌ی فارسی هردو رساله‌ی جبری وی در کتاب حاضر آمده است (صص ۱۵۹–۲۵۰ و ۲۵۲–۲۷۹) .

در این باب باید به اطلاع خوانندگان برساند که در کتاب **جبر و مقابلهٔ خیام** که سابقاً بتوسط نگارنده تهیه شده بود ، از ترجمه کردن تمام جبر خیام خودداری کرده بودیم ، و فقط قسمتهای اساسی آنرا که مبین فکر ریاضی خیام‌است به فارسی بر گردانیده بودیم ، و مباحث حل معادلات که در رساله‌ی خیام بسیار طولانی است با استفاده از زبان امروز جبر تلخیص شده بود . حسن این طریقه اینست که خواننده ، بی‌آنکه گرفتار بحثهای خیام – که بعلت بیخبری وی از فواید استعمال حروف و علامات بسیار طولانی و ملال انگیز است – شود ، روش عمومی او را در حل و بحث معادلات درمی‌یابد . از طرف دیگر ، طریقه‌ی مذکور مشکلاتی را که خیام و دیگر ریاضیون قدیم با آنها مواجه بوده‌اند پوشیده میدارد ، و در نتیجه، ممکن است ارزش پیشرفتها و موفقیتهای ایشان را کمتر از آنچه هست جلوه دهد . بنابراین ، در کتاب حاضر ، هر دو اثرخیام را تماماً به فارسی نقل کرده‌ایم (قسمتهای پنجم وششم کتاب).

در ترجمه‌ی رسائل‌خیام به فارسی ، منتهای کوشش بعمل آمده‌است که عبارات فارسیْ معانی متون را – آنچنانکه مترجم فهمیده است – برساند ، و هرجا مطلبی بر وی مبهم بوده یا آنچه اوفهمیده با ترجمه‌های فرانسوی و انگلیسی جبرخیام‌اختلافی دارد صریحاً ذکر کرده است . خلاصه اینکه در نقل متون خیام به‌فارسی ، تاآنجا که

بر مترجم ممکن بوده امانت را رعایت کرده است ، ولی از ترجمه‌ی تحت اللفظ احتراز نموده .

در مواردی ، برای آسان کردن فهم مطالب یا طبقه بندی آنها ، عباراتی به ترجمه‌ی کلام خیام اضافه نموده است ، ولی این اضافات را در داخل علامت «[ ]» درج کرده است . بالاخص، عناوین مطالب در ترجمه‌ها از این جمله است ، وچنانکه گفته شد ، تناظر شماره های مطالب متون و ترجمه‌های آثار خیام موجب تسهیل کار مراجعه کننده خواهد بود . و البته اضافات مختصر مذکور غیر از حواشی‌مفصلی‌است که در ذیل قسمتهای پنجم و ششم کتاب برای توضیح مطالب خیام آورده است .

بالاخره ، چون ممکن است کسانی فقط خواستار اطلاع مجملی از کارهای جبری خیام و ارزش آنها باشند ، ولی مجال‌مطالعه‌ی آثار اورا نداشته باشند،درقسمت چهارم کتاب تحلیلی‌از کارهای خیام درجبر واز رسائل وی به زبان کنونی ریاضیات آورده‌ایم که از شاخ و برگهای ملال انگیز و درازی سخن که لازمه‌ی جبر لفظی است پیراسته است .

(۳) مطالب تاریخی کتاب . برای‌اینکه اهمیت تحقیقات خیام درحل‌معادلات جبری چنانکه شاید معلوم شود ، کافی نیست که تنها کتاب او مورد تحلیل و بررسی قرار گیرد ، بلکه باید محل وی وکارهای او در تاریخ ریاضیات ، و بالاخص در تاریخ علم جبر ، معلوم شود ، و این امر مستلزم اینست که نظری به بسط این علم تا زمان خیام بیفکنیم ، و اگر طالب تحقیق جامعتری باشیم ، اقتصار به زمان خیام هم کافی نیست ، و باید لااقل‌به آغاز پیدایش روشهای جدید جبر، که این علم را بکلی‌ازحالت رکود و سترونی‌خارج ساخته به یك علم بالان (یا ، باصطلاح فرنگی ، **دینامیك**) ارتقا داد نیز نظر افکند .

استقصاء در تاریخ جبرخود موضوع کتابها است، و طالبین آن بایدبه کتابهایی که محققین و متخصصین فن در این باب تألیف و تصنیف کرده‌اند مراجعه نمایند . آنچه از این موضوع جالب که برای معرفی‌مقام خیام در علم جبر مفید وشاید ضروری

است با کمال ایجاز در قسمت سوم کتاب حـاضر (صص ۷۷ - ۱۲۸) آمده است . ضمناً در این‌باب توجه خوانندگان را باین‌نکته جلب میکنیم که ، درقسمت مذکور، هدف نوشتن تراجم احوال اشخاص نبوده است ، و چون در این باب در اول صفحه‌ی ۹۶ کتاب توضیحی داده‌ایم مطلب را مکرر نمیکنیم .

(۴) طبقه‌بندی وشماره‌گذاری . برای تسهیل ارجاع ، مطالب کتاب را بر حسب تقسیمات جزء آنها طبقه‌بندی وشماره‌گذاری کرده‌ایم . به قسمتهای ششگانه‌ی کتاب بترتیب شماره‌های ۱ و ۲ و ۳ و ٤ و ٥ و ٦ داده شده است . هریك ازقسمتهای ششگانه ، در تقسیم اول ، به چند قسمت جزء اصلی (مثلا « فصول ») تقسیم میشود ، و این قسمتهای‌جزء با افزودن رقمی در سمت راست رقم نماینده‌ی قسمت‌اولیه مشخص میگردد ، و هکذا . مثلا قسمت سوم کتاب (شماره‌ی ۳) مشتمل برهفت قسمت جزءِ است ، که ششمین آنها (شماره‌ی ۳۰٦) در بـاب معـادلات جبری است (صفحات ۱۱۰ - ۱۲۱) ، و این قسمت جزءِ (یعنی ۳۰٦) خـود مشتمل بر چند قسمت جزء است ، که فی‌المثل چهارمین‌آنها (شماره‌ی ۳۰٦۰٤) در باب جمل معادله (ص ۱۱۲) و هشتمین آنها (شماره‌ی ۳۰٦۰۸) در باب دستگاههای چند مجهولی‌است ، وهکذا.

چنانکه در بند (۱) این مقدمه گفته شد ، تناظر تقسیمات متون آثـار خیام و ترجمه‌های آنها کار مراجعه کننده را بسیار آسان میکند .

(۵) توجه به نکات ذیل برای تسهیل کار نقادان - هم آنانکه با سعه‌ی صدر و اطلاع کافی بخود زحمت بررسی موضوعی را که نقادی میکنند میدهند ، و هم‌نقادان مزدور و حرفه‌ای - خالی از فایده نیست .

(الف) در متن و حواشی کتاب (نه در شماره‌های ترتیب صفحـات) رقم صفر به صورت o (و گاهی بعلت نبودن وسیله ، به علامات 0 و 0) ضبط شده است تا از نقطه متمایز باشد . ضرورت استعمال علامات متمایز برای صفر و نقطه و پنج بر هر کس که با رقم سر وکار دارد ، یا لااقل از مفهوم عدد و مقدار خبری دارد ، آشکار است ، و برای ریاضیدان از بدیهیات اولیه .

(ب) کلمه‌ی «ابن» در این کتاب همه‌جا بهمین صورت ضبط شده مگر استثناءً در نقل عبارت دیگران .

(ج) در این کتاب « کسره‌ی اضافه » بعد از هاء غیر ملفوظ همانطور که تلفظ میشود نوشته شده (مانند « کسره‌ی» بجای « کسرهٔ » و « بوسیله‌ی » بجای «بوسیلهٔ»). در این باب نگارنده با عده‌ای که برهانی جز فحش و ناسزا دارند صحبت کرده است، ودلیلی جز اینکه چون صورت « بوسیلهٔ » وامثال آن رسم‌الخط معمول بوده ولهذا باید آنرا حفظ کرد نشنیده است ، ولی کسانی که این عقیده را دارند نتوانسته‌اند بگویند که چرا در مورد « خانه‌ای » یا « خانه‌یی » احترام رسم‌الخط قدیم رعایت نمیشود ، و نتوانسته‌اند بگویند که چرا از بین‌تمام علامات صرف کلمات فارسی فقط باید گردن این یاءِ بیچاره را شکست . اگر سری‌به مدارس ابتدائی بزنند ملاحظه خواهندفرمود که اطفال ما« خانه‌ی‌حسن » را « **خانهِ** حسن » میخوانند ، واگرهم مواجه باعلامت « ء » فوقانی شوند متحیر میشوند که چرا این علامت «همزه» را باید «ی» بخوانند . و نیز اگر دقیقترین و صحیحترین کتابها را از حیث چاپ ملاحظه فرمایند مشاهده خواهند فرمود که در کمتر موردی علامت «ء» فوقانی ضبط میشود. البته میشود گفت که چشم معلم و شاگرد و حروف‌چین و مصحح و خواننده همه کور شود ، ودرست‌یاد بدهند و درست یاد بگیرند و درست بچینند و درست تصحیح کنند و درست بخوانند، ولی آیا سزاوار نیست که بجای کور کردن این همه چشم از دیگران ، چشمهای خود را باز کنیم و انصاف‌را حکم قرار دهیم ، و « کسره‌ی اضافه» را درمورد مورد بحث همانطور که تلفظ میشود بنویسیم ؟

(د) ما را از استعمال ارقام رومی‌به همان طریق که در نزد مردم مغرب زمین مرسوم است هیچگونه باکی‌نیست ، و مثلا بجای «صلاح‌الدین یوسف اول » نوشته‌ایم « صلاح‌الدین یوسف I » (ذیل صفحه‌ی ۱۵۵) .

(ه) علامات اختصاری که در کتاب حاضر بکار رفته به شرح ذیل است :

ص	صفحه	صص	صفحات				
ه ق	هجری قمری	ق م	قبل از میلاد (مسیح)				
ه ش	هجری شمسی	ب م	بعد از میلاد (مسیح) .				

✩ ✩ ✩

امیدواریم مقدمات وحواشی وتعلیقاتی که در این کتاب آورده‌ایم خوانندگان‌را در شناختن مقام خیام و ارزش تحقیقات او در علم جبر و مبانی کارهای وی در این علم یاری کند .

در تهیه‌ی این کتاب جمعی از بزرگان و دوستان پیوسته مشوق نگارنده بوده‌اند یا از جهاتی وی را یاری کرده‌اند ، و تشکر از مساعدتهای ایشان بر بنده فرض است.

در تمام مدت تهیه و چاپ کتاب ، انجمن آثار ملی در فراهم ساختن وسایل کار با کمال خلوص نیت اقدام نمود ، و نگارنده ، علاوه بر عرض تشکر از سهمی که از مزایای کومکهای آن انجمن برده‌ام ، از خداوند متعال مسئلت میکنم که انجمن را در زنده کردن **آثار علمی** گذشتگان ما ، که بقول تیمسار سپهبد فرج‌الله آق‌اولی ، رئیس محترم هیئت مدیره‌ی انجمن ، بیش‌ازپیش مورد توجه انجمن واقع شده است ، موفق فرماید .

استاد علامه ، جناب آقای سید حسن تقی‌زاده ، که همواره مشوق بنده در کارهای علمی بوده‌اند ، قسمتهای سوم و چهارم کتاب را از نظر گذرانیده نکات‌مهمی‌را به نگارنده تذکردادند که درتنقیح مطالب کتاب بسیار مؤثر بوده است ، وبدین وسیله تشکرات خالصانه‌ی خود را به محضر دانشپرور ایشان تقدیم میکنم .

از مساعدتهای برادر ارجمند آقای محمود مصاحب و دوست گرام آقای احمد بطحائی در مقابله‌ی کتاب صمیمانه تشکر میکنم . بالاخره ، از متصدیان چاپخانه‌ی

بهمن ـ مخصوصاً آقای محمود مطیر ، مدیر چاپخانه ، و آقای عباس تقی زادگان ، مسئول شعبه‌ی حروفچینی ـ که در حدود وسایل موجود در خوبی چاپ کتاب بذل جهد نموده‌اند سپاسگزاری مینمایم .

غلامحسین مصاحب

تهران

آذرماه ۱۳۳۹ هجری شمسی

فهرست مندرجات

۱ . قسمت اول

صفحه

۲ . قسمت دوم

۳ . قسمت سوم

نظر اجمالی به تاریخ علم جبر از ایام قدیم تا زمان خیام

٤ . قسمت چهارم

ملاحظات کلی در باب کارهای جبری خیام

۵ . قسمت پنجم

رسالهٔ جبر خیام (ترجمهٔ فارسی)

۶ . قسمت ششم

رساله در تحلیل یك مسئله (ترجمهٔ فارسی)

☆ ☆ ☆

غلطنامه

رقم واقع در طرف راست علامت « : » شماره‌ی صفحه و رقم طرف چپ شماره‌ی سطور است. شماره‌ی سطور اگر با « ـ » همراه باشد از سطر آخر متن صفحه ببالا و اگر با « ـ ذ » همراه باشد از سطر آخر ذیل ببالا و اگر با «ذ» همراه باشد از سطر اول ذیل بپائین شمرده میشود.

عبارت طرف راست علامت «/» غلط و عبارت طرف چپ صحیح است.

۷ : ۳ـ نبع/نبغ

۱۶ : ۳ـ الزویا / الزوایا

۱۸ : ۱ـ الاحذار / الاجذار

۳٤ : ۲ **بهج / بهح**

۵٦ : ۱ ذ رجوك / رجوع

۷۲ : ۹ **ك م / ب م**

۷۳ : ۵ـ العاتیه / العایقة

۱۰۱/٤ ذ کوتس / کوچ که در آنجا نامش « کوتش » ضبط شده

۱۲۲ : ٤ـذ تاریخ ۱۳۱۸ تاریخ اتمام تحریر کتاب است، و تاریخ چاپ ظاهراً ۱۳۲۱ هق میباشد.

۱۲۳ : ٤ـ **کره/ کره**

۱۳٤ : ۱ذ ۸۳۰ / ۸۳۲

۱۹۳ : ٤ **دوم / سوم**

۲۲۵ : ۱ـذ $-\frac{a}{q}$ / $-\frac{a}{b}$

۲٤۹ : ٦ـذ ابوالجو / ابوالجود

۲۹۹ : ٤ ذ فاصله‌ی اول سطر زاید است.

قسمت اول

رساله‌ی جبر خیام

(متن)

شرکت چاپ بهمن
تهران ، ۱۳۳۹

رسالة

فى براهين الجبر و المقابلة

لعمر الخيامى

مقالة
فى الجبر و المقابلة
للحكيم الاوحد
ابى الفتح عمر بن ابراهيم
الخيامى

رسالة الحكيم الفاضل

غياث الدين ابى الفتح عمر بن ابراهيم الخيامى النيشابورى

قدس الله روحه العزيز

فى البراهين على مسائل الجبر و المقابلة

بسم الله الرحمن الرحيم

الحمد لله رب العالمين والعاقبة للمتقين و لا عدوان الا على الظالمين والصلوة على الانبياء و خصوصاً على محمد و آله الطاهرين اجمعين ان احد المعانى التعليميّة المحتاج اليها فى جزء الحكمة المعروف بالرياضى هو صناعة الجبر والمقابلة الموضوعة لاستخراج المجهولات العددية و المساحيه و ان فيها اصنافا يحتاج فيها الى اصناف من المقدمات معتاصة جدّا فتعذّر حلّها على اكثر الناظرين فيها اما المتقدمون فلم يصل الينا منهم كلام فيها لعلهم لم يتفطنوا لها بعد الطلب و النظر او لم يضطرّ البحث اياهم الى النظر فيها اولم ينقل الى لساننا كلامهم فيها و اما المتأخرون فقد عنّ للماهانى منهم تحليل المقدمة التى استعملها ارشميدس مسلمة فى الشكل الرابع من المقالة الثانية من كتابه فى الكرة والاسطوانة بالجبر فتأدّى الى كعاب و اموال و اعداد متعادلة فلم يتفق له حلّها بعد ان افكر فيها مليّا فجزم القضاء بانه ممتنع حتى نبع ابو جعفر الخازن و حلها بالقطوع المخروطية ثم افتقر بعده جماعة من المهندسين الى عدّة اصناف منها فبعضهم حل البعض و ليس لواحد منهم فى تعديد اصنافها و تحصيل انواع كل صنف

منها والبرهان عليها كلام يُعتدّ به الا على صنفين ساذكرهما و انى لم ازل كنت شديد الحرص على تحقيق جميع اصنافها و تمييز الممكن من الممتنع فى انواع كل صنف ببراهين لمعرفتى بان الحاجة اليها فى مشكلات المسائل ماسّة جدّاً و لم اتمكن من التجرد لتحصيل هذا الخبر والمواظبة على الفكر فيه لاعتراض ما كان يعوقنى عنه من صروف الزمان فانا قد منينا بانقراض اهل العلم الا عصابة قليلى العدد كثيرى المحن همّهم افتراص(*) غفلات الزمان ليتفرغوا فى اثنائها الى تحقيق و ايقان علم و اكثر المتشبهين بالحكماء فى زماننا هذا يلبسون الحق بالباطل و لا يتجاوزون حدّ التدليس و الترائى بالمعرفة ولا ينفقون القدر الذى يعرفونه من العلوم الا فى اغراض بدنية خسيسة و ان شاهدوا انساناً معيّنا بطلب الحق و ايثار الصدق مجتهدا فى رفض الباطل و الزور و ترك المراياة والخداع استخفّوه و سخروا منه والله المستعان على كل حال و اليه المفزع

و لما منّ الله تعالى علىّ بالانقطاع الى جناب سيدنا الاجلّ الاوحد قاضى القضاة الامام السيد ابى طاهر ادام الله علاءه و كبت حسدته واعداءه بعد اليأس من مشاهدة كامل مثله فى كل فضيلة عملية ونظرية و جمع بين انفاذ فى العلوم وتثبّت فى الاعمال و طلب الخير لكل واحد من ذى جنسه فانشرح بمشاهدته صدرى و ارتفع بمصاحبته ذكرى وعظم بالاقتباس من انواره امرى واشتدّ بآلائه ونعمه ازرى فلم اجد بدا من ان انحو نحو تلافى ما فوّتنيه ريب الزمان من تلخيص ما اتحققه من لباب المعانى الحكميّة تقربا الى مجلسه الرفيع و ابتدأت بتعديد هذه الاصناف من المقدمات الجبرية اذ الرياضيات اولى بالتقديم واعتصمت بحبل التوفيق من الله تعالى راجيا منه ان يوفقنى لاتباع هذا بتحقيق ما انتهى اليه بحثى وبحث من تقدمنى من العلوم التى هى اهم من غيرها متمسكا بالعروة الوثقى من عصمته انه ولى الاجابة و عليه التكلان فى كل حال

[§۱۰۱۰۱] اقول بعون الله و حسن توفيقه ان صناعة الجبر و المقابلة صناعة علمية موضوعها العدد المطلق و المقادير الممسوحة من حيث هى مجهولة و مضافة الى

(*) درنسخه‌ی لیدن (§۴۰۳۰۲۰۱) چنین است . در متن ویکه (§۴۰۳۰۲۰۱) بجای «همهم افتراص» عبارت «فعمهم افتراض» انتخاب شده است .

شيء معلوم به يمكن استخراجها و ذلك الشيء اما كميّة واما نسبة على وجه لايشاركها فيه غيرها و يدلك عليه تصفحها و مطلوبها العوارض التى تلحق موضوعها بما هو موضوع لها بالصفة المذكورة و تمامها الوقوف على الطرق التعليمية التى تتفطن بها لهذا النوع المذكور من استخراج المجهولات العددية او المساحية [§ ١٠١٠٢] و المقادير هى الكمية المتصلة و هى اربعة الخط و السطح و الجسم و الزمان على ما هو مذكور مجملا فى قاطيغورياس و مفصلا فى الحكمة الاولى و قوم يعدون المكان نوعاً قسيماً للسطح تحت جنس المتصل و التحقيق يبطل عليهم هذا الرأى و تصحح ان المكان هو سطح بحال و موضع تحقيقه غير ما نحن فيه ولم تجر العادة بذكر الزمان فى موضوعات مسائل الجبر و لو ذكر لجاز

[§ ١٠١٠٣] و عادة الجبريين ان يسموا فى صناعتهم المجهول الذى يراد استخراجه شيئا و مضروبه فى مثله مالا و مضروب ماله فيه كعبا و مضروب ماله فى مثله مال مال و مضروب كعبه فى ماله مال كعب و مضروب كعبه فى مثله كعب كعب و على هذا القياس بالغا ما بلغ و معلوم من كتاب اقليدس فى الاصول ان هذه المراتب كلها متناسبة اعنى نسبة الواحد الى الجذر كنسبة الجذر الى المال و كنسبة المال الى الكعب فيكون نسبة العدد الى الجذور كنسبة الجذور الى الاموال و كنسبة الاموال الى الكعاب و كنسبة الكعاب الى اموال المال بالغا ما بلغ

[§ ١٠١٠٤] و يجب ان يتحقق ان هذه الرسالة لا يفهمها الا من يكون متقنا لكتاب اقليدس فى الاصول و كتابه فى المعطيات و مقالتين من كتاب ابلونيوس فى المخروطات وان من سدّ عنه معرفة واحد من هذه الثلاثة فلا سبيل له الى تحققها ولقد تكلفت الّا احيل فى هذه الرسالة الا على هذه الكتب الثلاثة

[§ ١٠١٠٥] و استخراجات الجبر انما تتم بالمعادلة اعنى بمعادلة هذه المراتب بعضها ببعض على ما هو مشهور و اذا استعمل الجبرى مال المال فى المساحات فان ذلك على سبيل المجاز لا على سبيل التحقيق اذ محال ان يكون فى المقادير مال المال والذى يقع فى المقادير هو البعد الواحد و هو الجذر او الضلع اذا اضيف الى مربّعه

ثم البعدان و هو السطح و المال فی المقادیر هو السطح المربع ثم الثلاثة الابعاد و هو الجسم و المكعّب فی المقادیر هو المجسّم الذی یحیط به ستّ مربعات واذ لا بعد آخر فلا یقع فیها مال المال فضلا عما فوقه و اذا قیل مال المال فی المقادیر فانما یقال ذلك لعدد اجزائها عند المساحة لا لذواتها ممسوحة و بینهما فرق فمال المال لا یقع فی المقادیر لا بالذات و لا بالعرض ولیس كالزوج و الفرد فانهما یقعان فیها بالعرض بحسب العدد الذی ینفصل به اتصالها

[§۱۰۱۰٦] والذی فی كتب الجبریین من هذه المعادلات الاربع الهندسیه اعنی الاعداد المطلقه و الاضلاع و المربعات و المكعبات هو ثلاث معادلات بین العدد و الاضلاع و الاموال و اما نحن فسنأتی بالطرق التی بها یمكن ان یستخرج المجهول بالمعادلة بین اربع مراتب التی قلنا انها لا یمكن ان یقع اكثر منها فی المقادیر اعنی العدد و الشیء و المال و الكعب

ومایمكن ان یبرهن علیه بخواص الدائرة اعنی بكتابی اقلیدس فی‌الاصول و فی المعطیات یبرهن علیه و یبالغ فی‌التسهیل و مالایمكن الا بخواص القطوع المخروطیة فیبرهن علیه بما فی مقالتین من المخروطات و اما البرهان علی هذه الاصناف اذا كان موضوع المسئلة عددا مطلقا فلا یمكننا و لا لواحد من اصحاب الصناعة و لعل غیرنا ممن یأتی بعدنا یعرفه الا فی الثلاثة المراتب الاولی و هی العدد و الشیء و المال وربّما اشیرالی براهین عددیة علی ما یمكن البرهان علیه من كتاب اقلیدس و اعلم ان البرهان علی هذه الطرق بالهندسة لایجزی عن البرهان علیها بالعدد اذا كان الموضوع عددا لا مقدارا ممسوحا ألاتری ان اقلیدس قد برهن علی مطلوبات نسبیة مقداریة فی خامسة كتابه ثم استأنف البرهان علی تلك المطلوبات النسبیة بعینها اذا كان موضوعها عددا فی سابعة كتابه

[§۱۰۲۰۱] و المعادلات بین هذه الاربعة اما مفردات واما مقترنات [§۱۰۲۰۲] والمفردات ستة اصناف

آ عدد یعدل جذرا   دَ جذور تعدل مالا

بَ عدد يعدل مالا — هَ اموال تعدل كعبا
جَ عدد يعدل كعبا — وَ جذور تعدل كعبا

و ثلاثة من هذه الاصناف الستة مذكورة فـى كتب الجبريين قالوا نسبة الشىء الى المال كنسبة المال الى الكعب فيلزم ان يكون معادلة المال للكعب كمعادلة الشىء للمال و كذلك نسبة العدد الى المال كنسبة الجذر الـى الكعب ولم يبرهنوا عليه من الهندسة و اما العدد الذى يكون عديلا للمكعب فلا سبيل لنا الى استخراج ضلعه الا بالا ستقرآء من حيث العدد و اما من حيث الهندسه فلاينحل الا بالقطوع المخروطية .

[§ ١٠٢٠٣] واما المقترنات فمنها ثلاثية و منها رباعية [§ ١٠٢٠٣٠١] اما الثلاثية فاثنا عشر صنفا فالثلاثة الاولى منها

آ مال و جذر يعدل عددا — بَ مال و عدد يعدل جذرا
جَ جذر و عدد يعدل مالا

و هذه الثلاثة مذكورة فى كتب الجبريين و مبرهن عليها من جهة الهندسة واما من جهة العدد فلا [§ ١٠٢٠٣٠٢] والثلاثة الثانية منها

آ كعب ومال يعدل جذرا — بَ كعب وجذر يعدل مالا
جَ جذر و مال يعدل كعبا

فالجبريون قالوا ان هذه الثلاثة الثانية مناسبة للثلاثة الاولى كل واحد لنظيره اعنى ان يكون كعب و جذر يعدل مالا فى قوة مال و عدد يعدل جذرا و الباقيان كذلك و لم يبرهنوا عليها اذا كان موضوع المسائل ممسوحات و اما اذا كان موضوع المسائل عددا فذلك ظاهر من كتاب الاصول و سابرهن على الهندسى منها [§ ١٠٢٠٣٠٣] و الستة الباقية من الاصناف الاثناعشر

آ كعب و جذر يعدل عددا — دَ كعب و مال يعدل عددا
بَ كعب وعدد يعدل جذرا — هَ كعب و عدد يعدل مالا
جَ عدد و جذر يعدل كعبا — وَ عدد و مال يعدل كعبا

وهذه الستة الاصناف لم يوجد فى كتبهم منها شىء الا الكلام فى واحد منها

مبترّا و سابيّنها و ابرهن عليها من جهة الهندسة لا من جهة العدد و البرهان على هذه الستة لا يمكن الا بخواص القطوع المخروطية [١٠٢٠٤ §] و اما المقترنات الرباعية فقسمان [١٠٢٠٤٠١ §] احد هما و هو الاول ما يكون فيه ثلاث مراتب معادلة لواحدة و هو اربعة اصناف

آ كعب و مال وجذر يعدل عددا   جـ كعب وجذر و عدد يعدل مالا

ب كعب ومال و عدد يعدل جذرا   د كعب يعدل جذرا و مالا و عددا

[١٠٢٠٤٠٢§] و القسم الثانى هوما يكون فيه مرتبتان معادلتين للاثنتين و هو ثلاثة اصناف

آ كعب ومال يعدل جذرا و عددا   ب كعب وجذر يعدل مالا وعددا

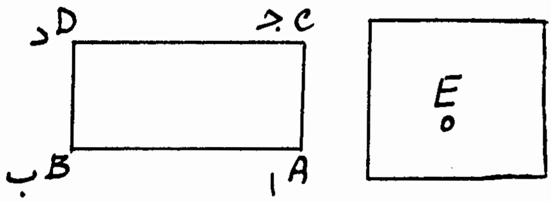
جـ كعب و عدد يعدل جذرا و مالا

[١٠٢٠٤٠٣§] فهذه هى الاصناف السبعة الرباعية و لا سبيل لنا الى تحليل شيء منها بالهندسة اما من تقدمنا فقد اضطر واحد منهم الى نوع من انواع صنف واحد سا ذكره و البرهان على هذه الاصناف لا يتم الابخواص القطوع المخروطية [١٠٢٠٥ §] وسنأتى بواحد واحد من هذه الاصناف الخمسة والعشرين ونبرهن عليه مستعينين بالله انه من توكل عليه مخلصا هداه و كفاه

[١٠٣٠١ §] فالصنف الاول من المفردات **جذر يعدل عددا** فيكون الجذر معلوما باضطرار و حكمها فى العدد و المساحات واحد

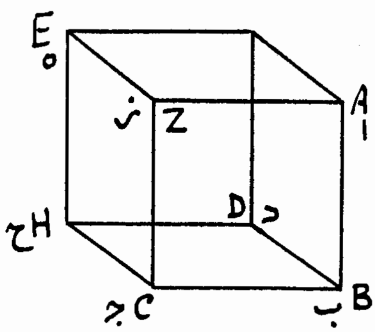
[١٠٣٠٢ §] و الصنف الثانى **عدد يعدل مالا** فيكون المال العددى معلوما لمعادلته العدد المعلوم و لا سبيل الى معرفة جذره بالعدد الا بالاستقرآء فان من يعلم ان جذر خمسة و عشرين هو خمسة فانما يعلمه بالاستقرآء لا بالقانون الصناعى فلا نلتفت فيه الى قول المتخلفين من اهل هذه الصناعة و للهند طرق فى استخراج اضلاع المربعات و المكعبات مبنية على استقرآء قليل و هو معرفة مربعات الصور التسعة اعنى مربع الواحد والا ثنين و الثلاثة و كذلك مضروب بعضها فى بعض اعنى مضروب الاثنين فى الثلاثة و نحوها و لنا كتاب فى البرهان على صحة تلك الطرق و تأديتها

الى المطلوبات و قد غزرنا انواعها اعنى من استخراج اضلاع مال المال و مال الكعب و كعب الكعب بالغا ما بلغ و لم يسبق اليه و تلك البراهين انما هى براهين عددية مبنية على عدديات كتاب الا سطقسات و البرهان على الصنف الثانى بالهندسة هو هكذا نضع خط **اب** مفروضا مساويا للعدد المفروض و **اج** واحدا و يكون عمودا على



اب و نتمم سطح **اد** فمعلوم ان مساحة سطح **اد** يكون ذلك العدد المفروض فنعمل سطحا مربعا مساويا لسطح **اد** و هو مربع **ه** كما بينه اقليدس فى شكل يدَ من مقالة بَ من كتابه فمربع **ه** يكون مثل العدد المفروض و يكون معلوما وضلعه ايضا يكون معلوما تأمل البرهان الذى أتى به عليه اقليدس و ذلك المراد [§١٠٣٠٣] و كلما قلنا عدد يساوى سطحا فى هذه الرسالة فانا نعنى بالعدد هناك سطحا قائم الزوايا احد ضلعيه واحد والثانى خط مساو للعدد المفروض بالمساحة و كل واحد من اجزآء مساحته مساو للضلع الثانى اعنى به الذى فرضناه واحد

[§ ١٠٣٠٤] و الصنف الثالث **عدد يعدل مكعبا** فاذا كان الموضوع عددا

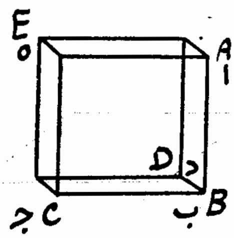


فيكون المكعب معلوما و لا سبيل الى استخراج ضلعه الا بالاستقرآء و كذلك فى

جميع المراتب العددية من مال المال و مال الكعب و كعب الكعب كما ذكرناه آنفا و اما بالهندسة فانا نضع مربع **اد** مربع الواحد اعنى ان يكون **اب** مثل **بد** وكل واحد منهما يفرض واحدا ثم نقيم على سطح **اد** على نقطة **ب** منه عمود **بج** و نجعله مساويا للعدد المفروض كمابينه اقليدس فى القول الحادى عشر من كتابه ونتمم مجسم **ابجدهزح** فمعلوم ان مساحة هذا المجسم يكون مساوية للعدد المفروض فنعمل مكعبا مساويا لهذا المجسم و عمله لا يتم الا بخواص القطوع المخروطية فأخرناه الى ان نأتى بمقدمات لها [§١٠٣٠٥] وكلما قلنا عدد يساوى مجسما فانا نعنى بالعدد هناك مجسما متوازى الاضلاع قائم الزوايا يكون قاعدته مربع الواحد و ارتفاعه مساويا للعدد المفروض

[§١٠٣٠٦] و الصنف الرابع **مال يعدل خمسة اجذاره** فيكون عدة الاجذار هو جذر المال و برهانه با العدد هو ان الجذر اذا ضرب فى مثله حصل المال و هذا جذر اذا ضرب فى خمسة حصل المال فهو خمسة و برهانه بالهندسة شبيه هذا اذا وضعت سطحا مربعا عديلا لخمسة الاضلاعه

[§١٠٣٠٧] و الصنف الخامس **اشياء تعدل كعبا** فبالعدد بين انه يكون مثل عدد يعدل مالا مثاله اربعة اجذار يعدل كعبا يكون كانه قال اربعة اعداد يعدل مالا لمكان

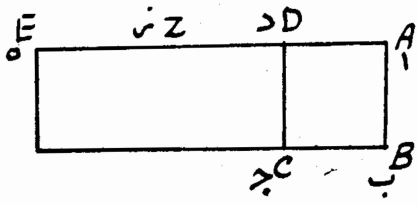


التناسب المذكور و اما بالهندسة نضع مكعب **ابجده** و مساحته عديلة لمساحة اربعة اضلاعه وضلعه **اب** فيكون ضلعه الذى هو **اب** اذا ضرب فى اربعة يحصل مكعب **ابجده** الا ان ضلعه اذا ضرب فى مربعه اعنى مربع **اج** حصل المكعب فيكون مربع **اج** اربعة

[§١٠٣٠٨] والصنف السادس **اموال تعدل كعبا** يكون فى قوة عدد يعدل جذرا

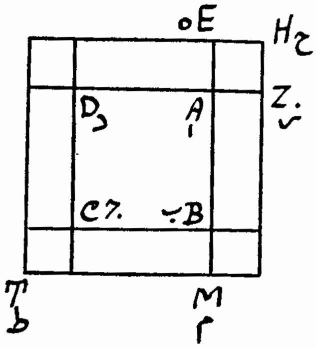
برهانه بالعدد ان نسبة العدد الى الجذر كنسبة المال الى الكعب كما بين فى ثامنة الاصول و اما بالهندسة فانا نضع مكعب **ابجده** عديل عدة امواله مثلا عديل مالين و مربع ضلعه **اج** فسطح **اج** اذا ضرب فى اثنين حصل مكعب **ابجده** الا انه اذا ضرب فى **بد** الذى هو ضلعه حصل مكعب **ابجده** فيكون **بد** الذى هو ضلعه مثل اثنين و ذلك المراد [١٠٣٠٨٠١ §] و كلما قلنا فى هذه الرسالة اموال المكعب فانا نعنى بها مربعات اضلاعه

[١٠٤٠١§] فاذ قد أتينا على المفردات فلنقل على الثلاثة الاولى من الاصناف الاثنى عشر الثلاثية [١٠٤٠٢§] و الصنف الاول منها **مال وعشرة اجذار يعدل تسعة و ثلاثين عددا** فاضرب نصف الاجذار فى مثله و زد الحاصل على العدد و انقص من جذر المبلغ نصف الاجذار فالباقى هو جذر المال اما العدد فيحتاج الى هذين الشرطين واحدهما ان يكون عدة الاجذار عددا زوجا ليكون له نصف والثانى ان يكون مربع نصف الاجذار و العدد مجموعين عددا مربعا و الا فالمسئلة مستحيلة من حيث العدد و اما بالهندسة فلا يستحيل شيء من مسائلها اصلا و البرهان عليه من جهة العدد سهل عند تصوّر برهانه الهندسى و برهانه الهندسى هكذا نضع مربع **اج** مع عشرة اجذاره عديل

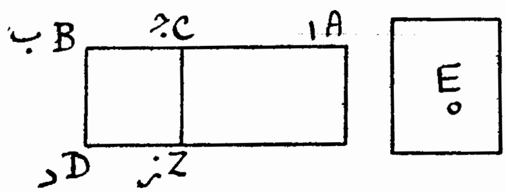


تسعة وثلاثين من العدد وعشرة اجذاره هو سطح **جه** فيكون خط **ده** عشرة و ننصفه على **ز** فلان خط **ده** قسم بنصفين على **ز** و زيد فيه على استقامته **اد** فيكون ضرب **ها** فى **اد** الذى هو مثل سطح **هب** مع مربع **دز** مساويا لمربع **زا** و مربع **دز** الذى هو نصف الاجذار معلوم و سطح **به** الذى هو العدد المفروض معلوم فيكون مربع **زا** معلوما و خط **زا** معلوما و اذا نقص منه **زد** يبقى **اد** معلوما [١٠٤٠٢٠١§] و لذلك برهان آخر نضع

ابجد مربعا و نخرج **با** الى **ه** و نجعل **ها** ربع الا جذار و هو اثنان و نصف و نخرج **دا** الى **ز** و نجعل **زا** مثل ربع الاجذار وكذلك نخرج من جميع زوايا المربع خطوطا على هذه الصفة و نتمم سطح **حط** فيكون مربعا لان **زه** مربع و **اج** مربع و **جط** مربع على ماتبين فى سادسة الاصول و المربعات الاربعة التى فى زوايا المربع الكبير كل



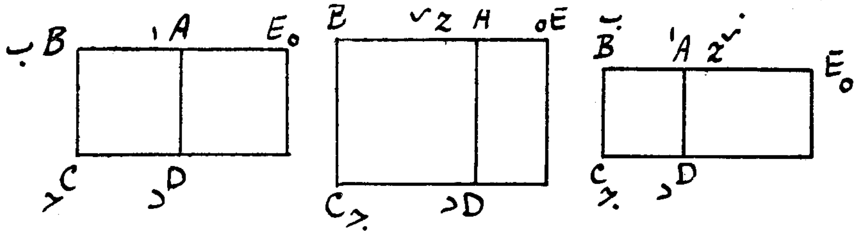
واحد منها مربع الاثنين و النصف فيكون جميعا خمسة و عشرين الذى هو مربع نصف الاجذار و سطح **زب** جذرين و نصف من اجذار مربع **اج** لان **زا** اثنان ونصف فيكون السطوح الاربعة عشرة اجذار مربع **اج** و قد فرض مربع **اج** مع عشرة اجذاره تسعة و ثلاثين من العدد فيكون مربـع **حط** اربعة و ستين يؤخذ جذره و ينقص منه خمسة يبقى **اب** [١٠٤٠٢٠٢§] و اما ان فرض خط **اب** عشرة و اريد مربع يكون مع ضرب ضلعه فـى **اب** مساويا للعدد المفروض فنضع العدد المفروض سطح **ه** و هو متوازى



الاضلاع قائم الزوايا على ما قدمناه و نضيف الى خط **اب** سطحا متوازى الاضلاع مساويا لسطح **ه** و نزيد على تمامه سطحا مربعا كما بينه اقليدس فى سادسة الاصول وليـكن سطح **بد** و المربـع الزائد **اد** و ضلعه **اج** يكون معلوما علـى ماتبين

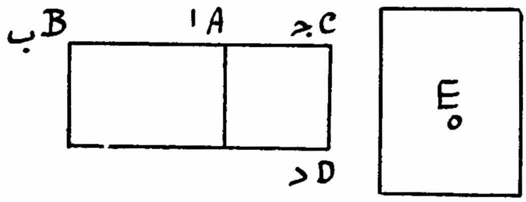
فی المعطیات .

[§١٠٤٠٣] و الصنف الثانی منها **مال وعدد یعدل جذرا** هذا یجب ان یکون العدد فیه لیس باعظم من مربع نصف الاجذار و الا فالمسئلة مستحیلة فان کان مثل مربع نصف الاجذار فنصف الاجذار هو جذر المال و ان کان اقل منه نقص العدد من مربع نصف الا جذار و مابقی یؤخذ جذره و یزاد علی نصف الا جذار او ینقص



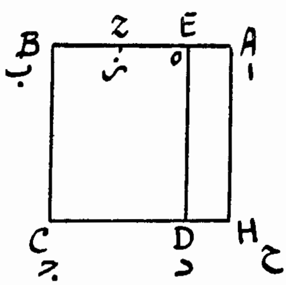
منه فما بلغ من الزیادة و مابقی من النقصان کان جذر المال و برهانه بالعدد یتصور عند تصور برهانه الهندسی نضع مربع **ابجد** و نضع **هد** العدد علی سمت **اد** فیکون سطح **هج** مثلا یعدل عشرة اضلاع مربع **اج** فیکون **هب** عشرة و فی الاول یکون **اب** نصف **هب** و فی الثانی اعظم من نصفه و فی الثالث اصغر من نصفه ففی الاول یکون **اب** خمسة و فی الثانی نقسم **هب** علی **ز** و کذلك فی الثالث فخط **هب** قسم بنصفین علی **ز** و بقسمین غیر متساویین علی **ا** فیکون سطح **ها** فی **اب** مع مربع **زا** مساویا لمربع **زب** کما تبین فی ثانیة الاسطقسات و سطح **ها** فی **اب** هو العدد و هو معلوم و اذا نقص من مربع **زب** الذی هو نصف الاجذار یبقی مربع **زا** معلوما و ینقص فی الثالث من **زب** و فی الثانی یزاد علیه یبلغ او یبقی **اب** و ذلك المراد و ان شئت امکنك البرهان علیه من وجوه اخری و لکنا اقتصرنا علی هذا مخافة التطویل [§١٠٤٠٣٠١] و اما ان فرض خط **اب** عشرة مثلا و ارید ان یفصل منه خط یکون ضرب **اب** فی ذلك الخط مساویا لمربع ذلك الخط مع سطح آخر غیر اعظم من مربع نصف **اب** اعنی العدد المفروض و هو سطح **ه** و نرید ان نفصل من **اب** خطا یکون مربعه مع سطح **ه** مساویا لضرب **ا ب** فی ذلك الخط فنضیف الی خط **اب** المعلوم سطحا مساویا

لسطح **ه** المعلوم ينقص عن تمامه سطحا مربعا و هو ممكن لان سطح **ه** ليس باعظم



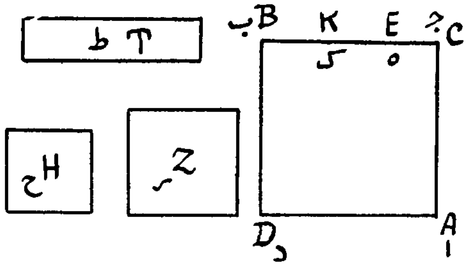
من مربع نصف **اب** وليكن سطح **از** و المربع الناقص سطح **جد** كمابينه اقليدس في سادسة الاسطقسات فيكون ضلع **جب** معلوما كما تبين في المعطيات و ذلك ما أردنا ان نبيّن [§١٠٤٠٣٠٢] فقد لاح ان لهذا الصنف انواعا و يقع فيها ما يستحيل و يمكنك ان تعلم شرائط صحته في العدد على ما بيناه في الصنف الاول

[§ ١٠٤٠٤] و الصنف الثالث **عدد و جذر يعدل مالا** يزاد مربع نصف الاجذار على العدد و يؤخذ جذر المبلغ و يزاد على نصف الاجذار فما يحصل هو جذر المال برهانه مربع **ابجح** يعدل خمسة اجذاره و ستة من العدد فنفصل العدد منه و هو سطح **اد** يبقى سطح **هج** عدة الاجذار و هو خمسة فيكون خط **هب** خمسة نقسمه بنصفين على **ز** فخط **هب** قسم بنصفين على **ز** و زيد فيه **ها** على استقامته يكون سطح **با** في **اه** الذى هو سطح **اد** المعلوم مع مربع **هز** المعلوم مثل مربع **زا** فمربع **زا** معلوم و **زا** معلوم و **زب** معلوم فيكون **اب** معلوما و له



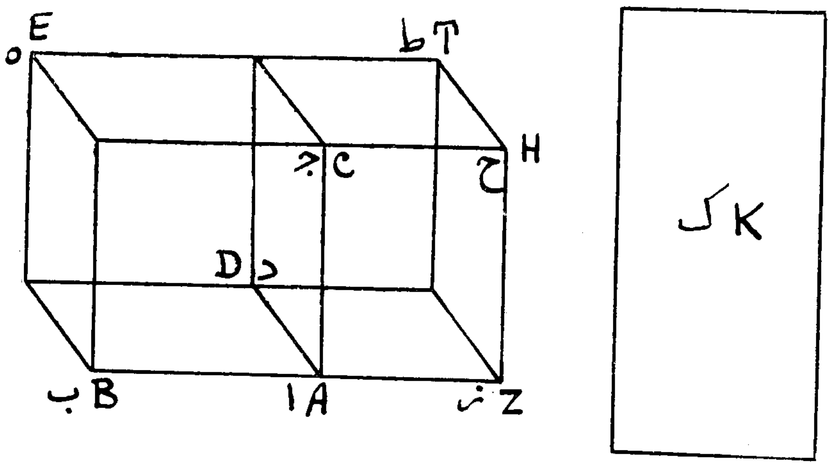
وجوه أخرى من البراهين فارتض بها [§١٠٤٠٤٠١] و اما ان فرض **به** الذى هو عدة الاجذار و طلب المربع و ضلعه كى يكون مساويا لعدة اضلاعه مع العدد

المفروض فليكن العدد المفروض سطح **ط** و المربع المساوى له **ح** و نعمل مربعا



مساويا لمربع **ح** مع مربع **هك** الذى هو نصف عدة الاضلاع وليكن مربع **ز** و نجعل **كج** مساويا لضلع **ز** و نتمم مربع **ابجد** فيكون مربع **ابجد** هو المطلوب[§١٠٤٠٥] و تبين ان فى هذا الصنف الثالث ليس شىء يستحيل و كذا فى الاول و اما فى الثانى ففيه ما يستحيل و له اختلاف وقوعات و ليس لهذين

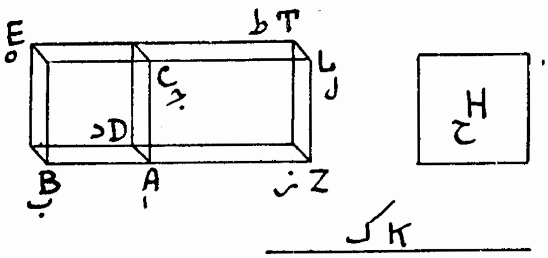
[§١٠٥٠١] و اما البرهان على ان الثلاثة الثانية من هذه الاصناف مناسبة للثلاثة الاولى [§١٠٥٠٢] فالصنف الاول منها **مكعب و اموال تعدل جذرا** نضع مكعب **ابجده** و نخرج **اب** على استقامة الى **ز** و نجعل **از** مثل عدة الاموال و



نتمم مجسم **ازحطجد** على استقامة مكعب **اه** على ماجرت به العادة فمجسم **اط** مثل عدة الاموال فيكون مجسم **بط** الذى هو المكعب و عدة الاموال المفروضة

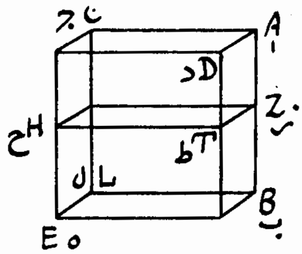
كعدة الاجذار المفروضة و نعمل سطح **ك** كعدة الا جذار المفروضة و الجذر هو ضلع المكعب و هو **اد** فسطح **ك** اذا ضرب فى **اد** يكون مثل عدة الاضلاع المفروضة و سطح **حب** اذا ضرب فى **اد** يكون منه المكعب مع عدة امواله المفروضة و هما متساويان اعنى مجسم **بط** و المجسم المعمول على **ك** الذى ارتفاعه **اد** فقاعدتاهما يكونان مكافئتين لارتفاعيهما و ارتفاعاهما متساويان فقاعدتاهما يكونـان اذن متساويتين و قاعدة **حب** هو مربع **جب** مع **حا** الذى هو عدة اجذاره التى فرضت للاموال فيكون **ك** الذى هـو العدد المفروض للاجذار مثل مال و عدة الاجذار المفروضة للاموال و ذلك ما اردنا ان نبين و مثاله مكعب و ثلاثة اموال يعدل عشرة اجذار يكون مال و ثلاثه اجذار يعدل عشرة اعداد

[§١٠٥٠٣] و الصنف الثانـى منها **مكعب مع جذرين يعدل ثلاثة اموال** يكون مالا مع اثنين يعدل ثلاثة اجذار برهانه نضع مكعب **ابجده** و هو مع جذريه



يعدل ثلاثة اموال و نضع **ح** مربعا مثل **جب** و نضع **ك** ثلاثة فيكون ضرب **ح** فى **ك** ثلاثة اموال مكعب **اه** و نعمل على **اج** سطحا مساويا لا ثنين و نتمم مجسم **ازجطد** فيكون مثل عدة الجذور ولكن خط **زب** اذا ضرب فـى مربع **اج** حصل مجسم **بط** و مجسم **اط** مثل عدة الاضلاع فمجسم **بط** مثل المكعب مع مثل عدة اضلاعه فيكون مجسم **بط** مساويا لعدة الا موال فيكون خط **زب** علـى ما تبين فى الشكل المتقدم ثلاثة و سطح **بل** هو مال و اثنان فمال و اثنان يعدل ثلاثة اجذار لان سطح **بل** هو من ضرب **اب** فى ثلاثة و ذلك ما اردنا ان نبين

[§١٠٥٠٤] و الصنف الثالث منها هو **مكعب يعدل مالا وثلاثة اجذار** فيكون مال يعدل جذرا و ثلاثة اعداد نضع مكعب **ابجده** الذى يعدل ماله و ثلاثة اضلاعه و

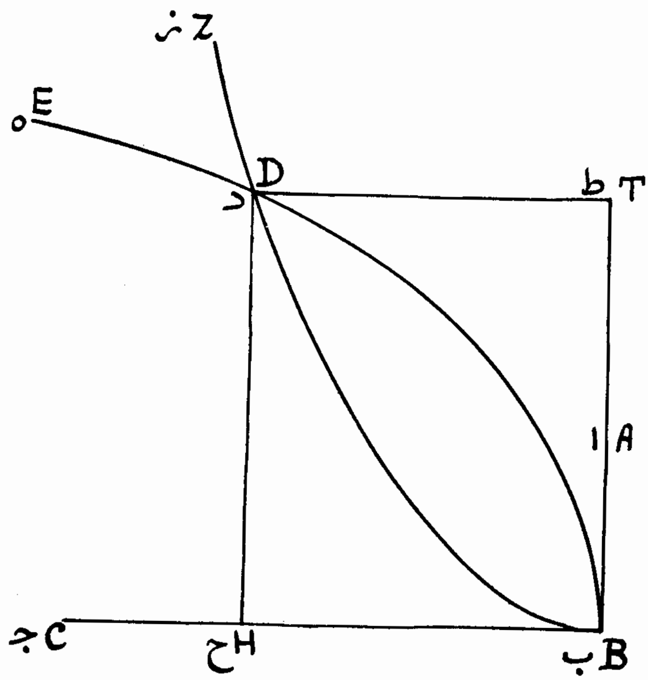


نفصل من خط **اب** الذى هو ضلعه خط **از** مثل عدة الاموال و هو واحد و نتمم مجسم **ازطحج** فيكون مجسم **ازطحج** مثل عدة الاموال المفروضة فيبقى مجسم **زه** مساويا لعدّة الاضلاع المفروضة و نسبة المجسمين احدهما الى الآخر كنسبة قاعدة **زج** الى قاعدة **زل** كما تبين فى الحادية عشرة من الا صول اذ الارتفاعان متساويان و لكن سطح **زج** هو جذر واحد لمربع **جب** وسطح **زل** هو عدد الاجذار و هو ثلاثة فمربع **جب** مثل جذر واحد و ثلاثة اعداد و ذلك ما اردنا ان نبين [§ ١٠٥٠٥] و هذه البراهين مالم تفهم على هذا النمط لا يكون الصناعة حكمية و ان كان فيه تجشّم مصاعب

[§١٠٦٠١] و من بعد تقديم هذه الاصناف التى امكن البرهان عليها من خواص الدائرة اعنى من كتاب اقليدس فلنقل الآن على الاصناف التى لايمكن البرهان عليها الا بخواص القطوع و هى اربعة عشرصنفا واحد مفرد و هو عدد يعدل مكعبا و ستة ثلاثية باقية و سبعة رباعية و لنقدم مقدمات مبنية على كتاب المخروطات ليكون شبه تمهيد للمتعلم ولا تكون رسالتنا هذه مفتقرة الى اكثر من الثلاثة الكتب المذكورة اعنى كتابى اقليدس فى الاصول و فى المعطيات و مقالتين من كتاب المخروطات .

[§١٠٦٠٢] نريد ان نجد خطين بين خطين ليتوالى الاربعة متناسبة فليكن الخطان المستقيمان **اب بج** و نجعلهما محيطين بزاوية **ب** القائمة و نعمل قطعا

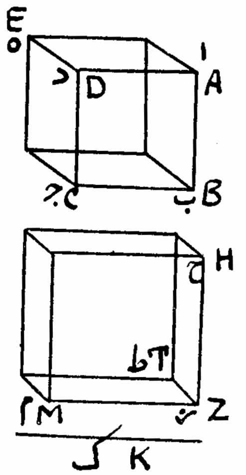
مکافیا رأسه نقطة **ب** و سهمه **بج** و ضلعه القائم **بج** و هو قطع **بده** فیکون قطع **بده**



معلوم الوضع لان رأسه و سهمه معلوما الوضع و ضلعه القائم معلوم القدر و یکون مماسا لخط **با** لان زاویة **ب** قائمة و هی مساویة لزاویة الترتیب کما تبین فی شکل لج من مقالة آ من المخروطات و کذلك نعمل قطعا آخر مکافیا رأسه نقطة **ب** و سهمه **اب** و ضلعه القائم **اب** و هو قطع **بدز** کما بینه ابلونیوس فی شکل نو من مقالة آ یکون قطع **بدز** مماسا لخط **بج** فهما یتقاطعان باضطرار فلیتقاطعا علی نقطة **د** فنقطة **د** معلومة الوضع لان القطعین معلوما الوضع و نخرج منها عمودی **دح دط** علی **اب بج** فیکونان معلومی القدر کمابین فی المعطیات فاقول ان خطوط **اب بح بط بج** الاربعة متناسبة برهانه ان مربع **حد** مساو لضرب **بح** فی **بج** لان خط **دح** من خطوط الترتیب فی قطع **بده** فیکون نسبة **بج** الی **حد** المساوی لخط **بط** کنسبة **بط** الی **حب** و خط **دط** من خطوط الترتیب فی قطع **بدز** یکون مربع **دط** الذی

هو مثل **بح** مساويا لضرب **با** فى **بط** فنسبة **بط** الى **بح** كنسبة **بح** الى **با** فالخطوط الاربعة متناسبة متوالية و خط **دح** معلوم القدر لانه خرج من نقطة معلومة الوضع الـى خط معلوم الوضع على زاوية معلومة القدر و كذلك **دط** معلوم القدر فخطا **بح بط** معلوما القدر و هما وسطان فى النسبة بين خطى **اب بج** اعنى نسبة **اب** الى **بح** كنسبة **بح** الى **بط** و كنسبة **بط** الى **بج** و ذلك ما اردنا ان نبين

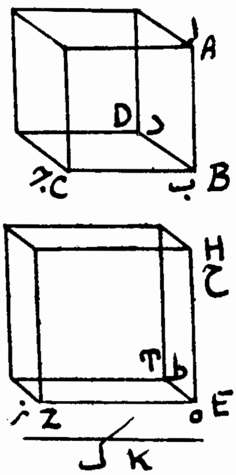
[§١٠٦٠٣] مربع **ابجد** مفروض و هو قاعدة مجسم **ابجده** المتوازى السطوح القائم الزوايا و مربع **مح** مفروض و نريد ان نعمل على قاعدة **مح** مجسما متوازى



السطوح قائم الزوايا مساويا لمجسم **ابجده** المفروض فنجعل نسبة **اب** الى **مز** كنسبة **مز** الى **ك** ثم نجعل نسبة **اب** الى **ك** كنسبة **زط** الى **هد** و نجعل **زط** عمودا علـى سطح **مح** على نقطة **ز** و نتمم مجسم **مزطح** فاقول ان هـذا المجسم مساو للمجسم المفروض برهانه نسبة مربع **اج** الى مربع **مح** كنسبة **اب** الى **ك** فيـكون نسبة مربع **اج** الى مربع **مح** كنسبة **زط** الذى هو ارتفاع مجسم **مطح** الى **هد** الذى هو ارتفاع مجسم **به** فيـكون المجسمان متساويين لان قواعدهما مكافية لارتفاعيهما كما تبين فـى مقالة يآ من الاصول [§١٠٦٠٣٠١] و كلما قلنا مجسم فانا نعنى به المجسم المتوازى السطوح القائم الزوايا و كذلك كلما قلنا سطح فانا نعنى بـه السطح

المتوازی الاضلاع القائم الزوايا

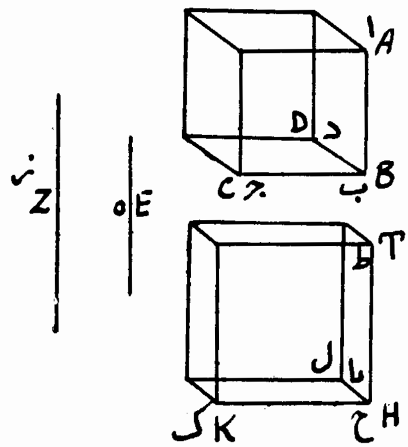
[§١٠٦٠٤] مجسم **ابجد** مفروض و قاعدته **اج** مربعة و نريد ان نعمل مجسماً قاعدته مربع و ارتفاعه مثل **هط** المفروض و يكون مساويا لمجسم **اجد** فنجعل نسبة **هط** الى **بد** كنسبة **اب** الى **ك** و نأخذ بين **اب** و **ك** خطا وسطا فی النسبة و هو **هز** و نجعل **هز** عمودا على **هط** و نتمم **طز** و نجعل **هح** عمودا على سطح **طز** و



يكون مثل **هز** و نتمم مجسم **حهطز** فاقول ان مجسم **ط** الذى قاعدته مربع **حز** و ارتفاعه **هط** المفروض مثل مجسم **د** المفروض برهانه ان نسبة مربع **اج** الى مربع **حز** كنسبة **اب** الى **ك** فيكون نسبة مربع **اج** الى مربع **حز** كنسبة **هط** الى **بد** فقاعدتا المجسمين مكافيتان لارتفاعيهما فهما متساويان و ذلك ما اردنا ان نبين

[§١٠٦٠٥] و من بعد ذلك فانا نأتى بالصنف الثالث من المفردات و هو **كعب يعدل عددا** نضع العدد مجسم **ابجد** و قاعدته **اج** و هو مربع الواحد كما قلنا و طوله مثل العدد المفروض و نريد ان نعمل مكعبا مساويا له فنأخذ بين خطى **اب بد** خطين وسطين فی النسبة فيكونان معلومی القدر كما بيناه و هما **ه ز** و نجعل **حط** مساويا لخط **ه** و نعمل عليه مكعب **طحكل** فيكون هذا المكعب

معلوم القدر و ضلعه معلوم القدر فاقول انه مساو لمجسم **د** برهانه نسبة مربع **اج**

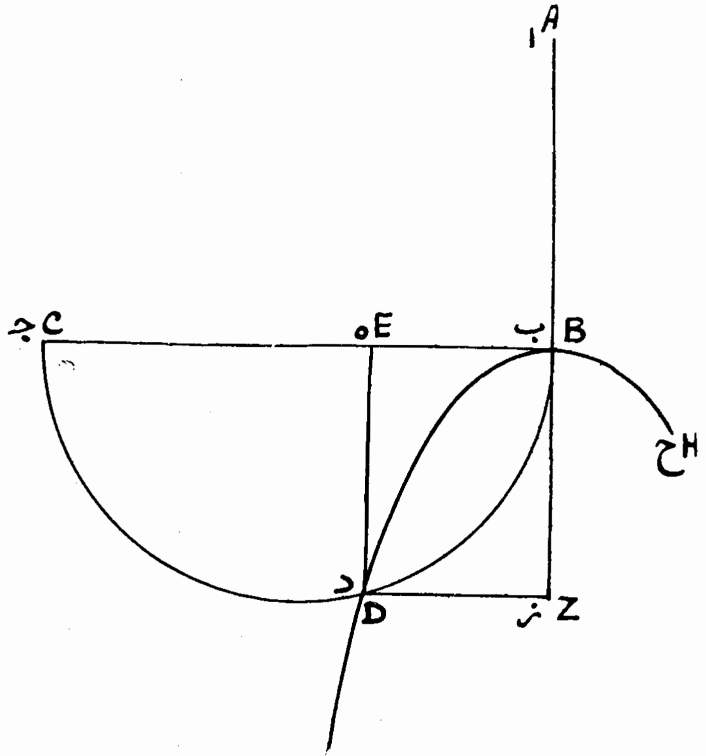


الى مربع **طك** كنسبة **اب** الى **حك** مثناة و نسبة **اب** الى **حك** مثناة كنسبة **اب** الى **ز** الاول الى الثالث من الخطوط الاربعة بل كنسبة **حك** الثانى الى **بد** الرابع فقاعدتا مكعب **ل** و مجسم **د** مكافيتان لارتفاعيهما فهما متساويان و ذلك ما اردنا ان نبين

[§١٠٧٠١] و من بعـد ذلك فانا نشتغل بالاصناف الستة الباقية الثلاثية

[§١٠٧٠٢] الصنف الاول هو **مكعب واضلاع تعدل عددا** نضـع **اب** ضلع مربع مساو لعدة الجذور و هو مفروض و نعمل مجسما يكون قاعدته مثل مربع **اب** و يكون ارتفاعه مثل **بج** و يكون مساويا للعدد المفروض كما بينا عمله فيما تقدم و نجعل **بج** عمودا على **اب** و قد علمت ما معنى العدد المجسم فى كلا منا و هو مجسم يكون قاعدته مربع الواحد و ارتفاعه مثل العدد المفروض اعنى خطا نسبته الى ضلع قاعدة المجسم كنسبة العدد المفروض الـى الواحد ونخرج **اب** على استقامة الى **ز** و نعمل قطعا مكافيا رأسه نقطة **ب** و سهمه **بز** و ضلعه القائم **اب** و هو قطع **حبد** فيكون قطع **حبد** معلوم الوضع كمابينا آنفا و يكون مماسا لخط **بج** و نعمل على **بج** نصف دائرة فانها باضطرار يقطع القطع فليقطعه على **د** و

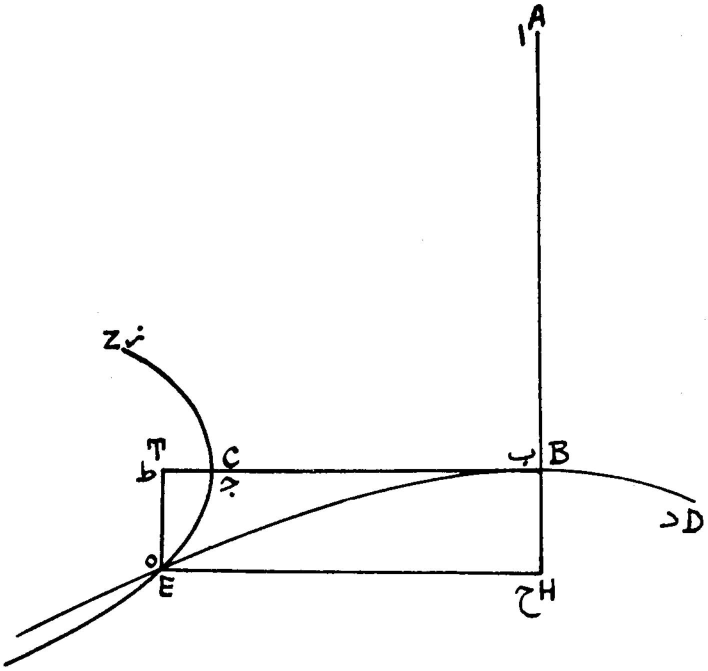
نخرج من **د** التى هى معلومة الوضع كما عرفته عمودى **دز ده** على **بز بج** فيكونان معلومى الوضع والقدر فخط **دز** من خطوط الترتيب فى القطع فيكون مربعه مساويا لضرب **بز** فى **اب** فيكون نسبة **اب** الى **دز** الذى هو مثل **به** كنسبة **به** الى **هد** الذى



هو مثل **زب** لكن نسبة **به** الى **هد** كنسبة **هد** الى **هج** فالخطوط الاربعة متناسبة **اب به هد هج** فنسبة مربع **اب** الاول الى مربع **به** الثانى كنسبة **به** الثانى الى **هج** الرابع فالمجسم الذى قاعدته مربع **اب** و ارتفاعه **هج** مساو لمكعب **به** لان ارتفاعيهما مكافيان لقاعدتيهما و نجعل المجسم الذى قاعدته مربع **اب** و ارتفاعه **هب** مشتركا فيكون مكعب **به** مع هذا المجسم مثل المجسم الذى قاعدته مربع **اب** و ارتفاعه **بج** الذى فرضناه مساويا للعدد المفروض لكن المجسم الذى قاعدته مربع **اب** الذى هو مثل عدة الجذور و ارتفاعه **هب** الـذى هو ضلع المكعب مساو لعدة اضلاع مكعب

هب المفروضة فمكعب **هب** مع عدة اضلاعه المفروضة (٭) مساو للعدد المفروض و ذلك المراد و ليس لهذا الصنف اختلاف وقوع ولا يستحيل من مسائله شيء و قد خرج بخواص الدائرة مع خواص القطع المكافى

[§۱۰۷۰۳] الصنف الثانى من الاصناف الستة الثلاثية هو**مكعب وعدد يعدل اضلاعا** فنفرض **اب** ضلع مربع مساو لعدة الجذور و نعمل مجسما يكون قاعدته مربع

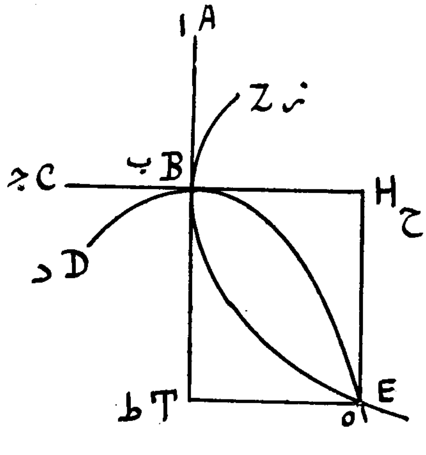


اب و يكون مساويا للعدد المفروض وليكن ارتفاعه **بج** و هو عمود على **اب** و نعمل قطعا مكافيا رأسه نقطة **ب** و سهمه علـى استقامة **اب** و ضلعه القائم **اب** و هو **دبه** و يكون معلوم الوضع و نعمل قطعا آخر زائدا رأسه نقطة **ج** و سهمه على استقامة **بج** و كل واحد من ضلعيه القائم والمائل مثل **بج** و هو **هجز** و يكون معلوم الوضع كما بينه ابلونيوس فـى شكل نح من مقالة آ فهذان القطعان اما ان يتلاقيا و اما ان

(٭) نسخه‌ی B (§۴۰۳۰۲۰۱) به اینجا ختم می‌شود .

لا يتلاقيا فان لم يتلاقيا فالمسئلة مستحيلة و ان تلاقيا بالتماس على نقطة او بالتقاطع على نقطتين فيكون النقطة معلومة الوضع فليتلاقيا على نقطة **ه** و نخرج منها عمودى **هط هح** على خطى **بط بح** فيكون العمودان لامحالة معلومى الوضع و القدر و خط **هط** من خطوط الترتيب فيكون نسبة مربع **هط** الى ضرب **بط** فى **طج** كنسبة الضلع القائم الى الضلع المائل كما بينه ابلوينوس فى شكل كـَ من مقالة آ و الضلعان القائم و هو المنتصب و المائل متساويان فمربع **هط** مساو لضرب **بط** فى **طج** فنسبة **بط** الى **طه** كنسبة **طه** الى **طج** و لكن مربع **هح** الذى هو مثل **بط** مساو لضرب **بح** فى **با** كما تبين فى شكل يبَ من مقالة آ من كتاب المخروطات فنسبة **اب** الى **بط** كنسبة **بط** الى **بح** و كنسبة **بح** الذى هو مثل **هط** الى **طج** فالخطوط الاربعة متناسبة فنسبة مربع **اب** الاول الى مربع **بط** الثانى كنسبة **بط** الثانى الى **طج** الرابع فمكعب **بط** مساو للمجسم الذى قاعدته مربع **اب** و ارتفاعه **جط** و نجعل المجسم الذى قاعدته مربع **اب** و ارتفاعه **بج** الذى عملناه مساويا للعدد المفروض مشتركا فيكون مكعب **بط** مع العدد المفروض مساويا للمجسم الذى قاعدته مربع **اب** و ارتفاعه **بط** و هوعدة اضلاع المكعب و قد تبين ان لهذا الصنف اختلاف وقوع و يقع من مسائله ما يستحيل و قد خرج بخواص قطعين مكاف و زائد

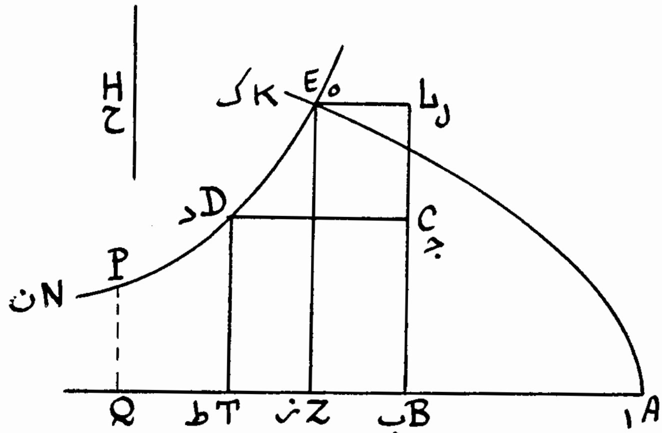
[§١٠٧٠٤] الصنف الثالث **مكعب يعدل اضلاعا وعددا** نضع **اب** ضلع مربع



مثل عدة الاضلاع و نعمل مجسما قاعدته مربع **اب** و يكون مساويا للعدد المفروض و ليكن ارتفاعه **بج** عمودا على **اب** و نخرج **اب بج** على استقامة و نعمل قطعا مكافيا رأسه نقطة **ب** و سهمه على استقامة **اب** و ضلعه القائم **اب** و هو **د ب ه** و يكون معلوم الوضع و يكون مماسا لخط **بح** على ما بينه ابلوينوس في شكل لجَ من مقالة آ و نعمل قطعا آخر زائدا رأسه نقطة **ب** و سهمه على استقامة **بج** و كل واحد من ضلعيه القائم و المائل مثل **بج** و هو قطع **ز به** و يكون معلوم الوضع و مماسا لخط **اب** فالقطعان لا محالة يتقاطعان فليتقاطعا على نقطه **ه** فتكون معلومة الوضع و نخرج من نقطة **ه** عمودى **هط هح** فهما معلوما الوضع و القدر و خط **هح** من خطوط الترتيب فعلى ما تقدم يكون مربعه مساويا لضرب **جح** في **بح** فنسبة **جح** الى **هح** كنسبة **هح** الى **حب** لكن نسبة **هح** الذى هو مثل **بط** الى **حب** الذى هو مثل **هط** و هو من خطوط الترتيب في القطع الآخر كنسبة **هط** الى **اب** الذى هو الضلع القائم للقطع فالخطوط الاربعة متناسبة نسبة **اب** الى **حب** كنسبة **حب** الى **بط** و كنسبة **بط** الى **جح** فنسبة مربع **اب** الاول الى مربع **حب** الثانى كنسبة **حب** الثانى الى **جح** الرابع فيكون مكعب **حب** مساويا للمجسم الذى قاعدته مربع **اب** و ارتفاعه **جح** لان ارتفاعيهما مكافيان لقاعدتيهما لكن هذا المجسم مساو للمجسم الذى قاعدته مربع **اب** و ارتفاعه **بج** الذى عملناه مساويا للعدد المفروض و المجسم الذى يحيط به قاعدة مساوية لمربع **اب** و ارتفاع **بح** الذى هو مثل عدة الاضلاع المفروضة لمكعب **بح** فمكب **بح** مثل العدد المفروض و مثل عدة اضلاعه المفروضة و ذلك المراد فقد تبين انه ليس لهذا الصنف اختلاف وقوع ولا فيه شيء يستحيل اعنى فى مسائله و قد خرج بخواص قطعين مكاف و زائد معا

[§١٠٧٠٥] الصنف الرابع من الاصناف الستة الثلاثية **مكعب و اموال تعدل عددا** نضع خط **اب** لعدة الاموال و نعمل مكعبا مساويا للعدد المفروض و ليكن ضلعه ح و نخرج **اب** على استقامة و نجعل **بط** مثل ح و نتمم مربع **بطدج** و نعمل على نقطة **د** قطعاً زائدا لا يلقاه **بج بط** و هو قطع **هدن** كما تبين من قوة شكلى دَ و هَ

من مقالة بَ و شكل نطَ من مقالة آ فيكون قطع **هدن** معلوم الوضع لان نقطة **د** معلومة الوضع و خطا **بج بط** معلوما الوضع و نعمل قطعا مكافيا رأسه نقطة **ا** و سهمه

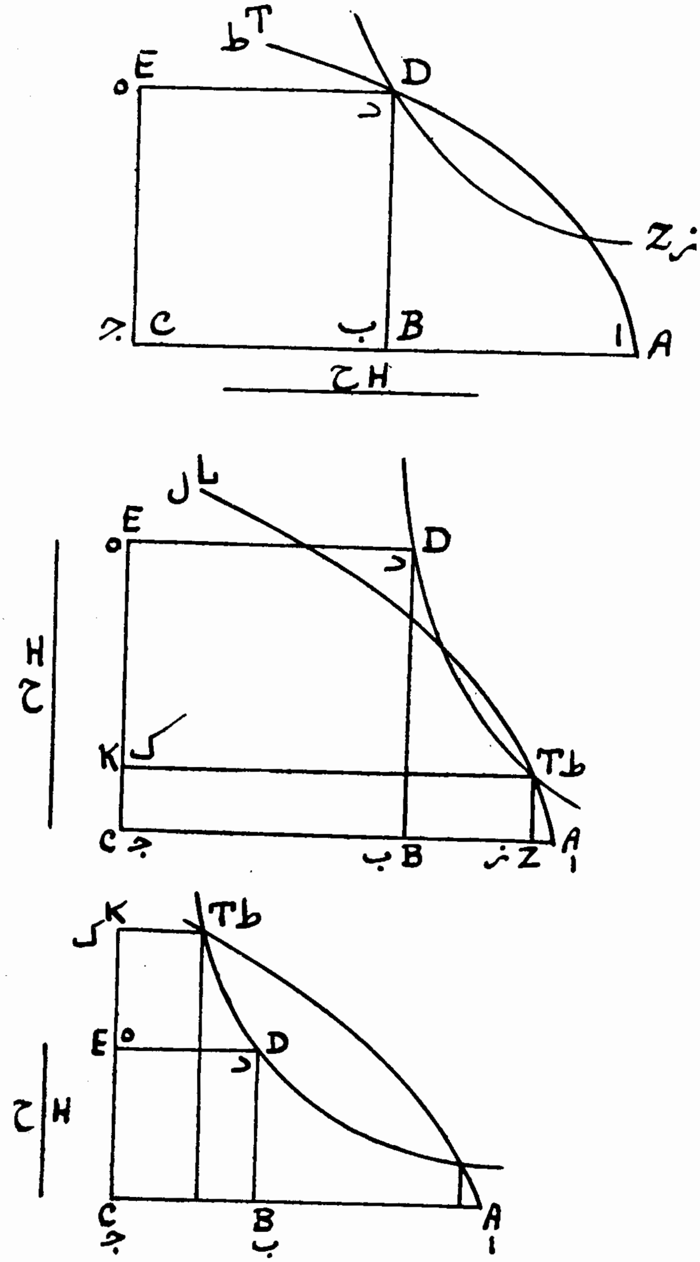


اط و ضلعه القائم **بج** و هو قطع **اك** فيكون قطع **اك** معلوم الوضع و القطعان يتقاطعان باضطرار فليتقاطعا على نقطة **ه** فيكون **ه** معلومة الوضع و نخرج منها عمودى **هز هل** على خطى **اط بج** فيكونان معلومى الوضع و القدر و اقول انه لا يمكن ان يقطع قطع **اهك** قطع **هدن** على نقطة يكون العمود النازل منها الى خط **اط** هو واقعا على **ط** او خارجا منها فليقع على **ط** ان امكن فيكون مربعه مساويا لضرب **اط** فى **طب** الذى هو مثل **بج** لكن ذلك العمود يكون مساويا لعمود **دط** فيكون مربع **طد** مساويا لضرب **اط** فى **طب** و هو ايضا مساو لضرب **بط** فى مثله هذا محال فليس العمود يقع على **ط** و كذلك لا يقع خارجا منه لانه يكون ذلك العمود حينئذ اقصر من **طد** فيكون هذا المحال الزم فباضطرار يقع العمود على نقطة فيما بين **ا ط** مثل **هز** و مربع **هز** مثل ضرب **از** فى **بج** فيكون نسبة **از** الى **هز** كنسبة **هز** الى **بج** و سطح **هب** مثل سطح **دب** كما تبين فى شكل حَ من مقالة بَ من المخروطات يكون نسبة **هز** الى **بج** كنسبة **بج** الى **بز** فالخطوط الاربعة متناسبة **از هز بج بز** فنسبة مربع **بز** الرابع الى مربع **بج** الثالث كنسبة **بج** الثالث الى **از** الاول فيكون مكعب **بج** الذى عملنـاه مساويا للعدد المفروض مساويا

للمجسم الذى قـاعدته مربع **بز** و ارتفاعه **از** لكن هذا المجسم الذى قاعدته مربع **بز** و ارتفاعه **از** مساو لمكعب **بز** و المجسم الذى قاعدته مربع **بز** و ارتفاعه **اب** و هذا المجسم الذى قاعدته مربع **بز** و ارتفاعه **اب** هو مثل عدة الاموال المفروضة فمكعب **بز** مع عدة امواله المفروضة مساو للعدد المفروض و ذلك ما اردنا ان نبين و هذا الصنف ليس فيه اختلاف وقوع و لا يستحيل شيء من مسائله و قد خرج بخواص القطوع المكافى و الزائد معا

[§١٠٧٠٦] الصنف الخامس من الاصناف الستة الثلاثية الباقية **مكعب و عدد يعدل مالا** نفرض **اجـ** لعدة الاموال و نعمل مكعبا مساويا للعدد المفروض و يكـون ضلعه **ح** فخط **ح** لا يخلو اما ان يكون مساويا لخط **اجـ** او اعظم منه او اصغر فان كان مساويا له استحالت المسئلة لانه لا يخلو اما ان يكون ضلع المكعب المطلوب مثل **ح** او اصغر او اكبر فان كان مثله كان ضرب **اجـ** فى مربعه مثل مكعب **ح** فيكون العدد مثل عدة الاموال و لا يحتاج الى زيادة المكعب و ان كان ضلع المطلوب اصغر منه كان ضرب **اجـ** فى مربعه اصغر من العدد المفروض فيكون عدة الاموال اصغر من العدد المفروض فضلا عن الزيادة و ان كان الضلع اكبر من **ح** كان مكعبه اكبر من ضرب **اجـ** فى مربعه فضلا عن زيـادة العدد عليه ثم ان كان **ح** اعظم من **اجـ** يكون المحال فى الوجوه الثلاثة الزم فيجب ان يكون **ح** اصغر من **اجـ** و الا فالمسئلة مستحيلة فنفصل **بجـ** من **اجـ** مثل **ح** فخط **بجـ** اما ان يكـون مثل **اب** او اعظم منه او اصغر فليكن فى الشكل الاول مثله و فى الثانى اعظم منه و فى الثالث اصغر منه و نتمم فى الاشكال الثلاثة مربع **دجـ** و نعمل على نقطة **د** قطعا زائدا لا يلقاه **اجـ جه** و هو فى الاول **دز** و فى الثانى و الثالث **دط** و نعمل قطعا مكافيا رأسه نقطة **ا** و سهمه **اجـ** و ضلعه القائم **بجـ** و هو فى الاول **اط** و فى الثانى **ال** و فى الثالث **اك** و يكون القطعان معلومى الوضع ففى الاول يمر القطع المكافى على نقطة **د** لان مربع **دب** مساو لضرب **اب** فى **بجـ** فيكون **د** على محيط القطع المكافى و يلقاه على نقطة أخرى و يمكنك ان تتفطن له بادنى تأمل و فى الثانى يكون نقطة **د** خارجة من محيط

المكافى لان مربع **دب** اعظم من ضرب **اب** فى **بج** فان التقى القطعان بالتماس على

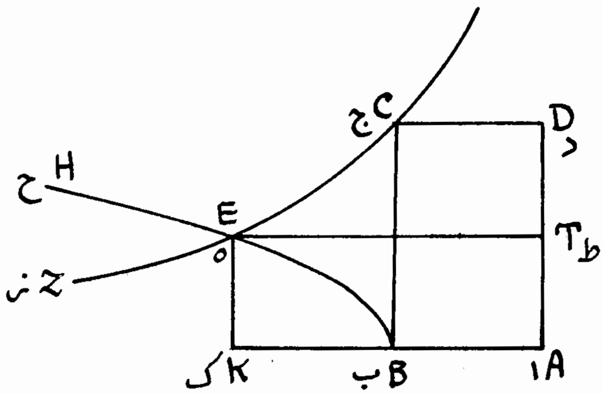


نقطة أخرى او بالتقاطع فيكون العمود النازل منها واقعا لامحالة فيما بين نقطتى

ا ب كانت المسئلة ممكنة و الا فهى مستحيلة و هذا التماس او التقاطع لم يتفطن له ابوالجود المهندس الفاضل حتى جزم القضآء بان **بج** ان كان اعظم من **اب** كانت المسئلة مستحيلة و ابطل فى حكمه هذا و هذا الصنف هو الذى اضطر اليه الماهانى من بين الاصناف الستة حتى تعرف و فى الثالث يكون نقطة **د** داخل القطع المكافى فيتقاطع القطعان على نقطتين و بالجملة فانا نخرج من نقطة الالتقآء عمودا على **اب** فليكن فى الشكل الثانى **طز** و كذلك عمودا آخر منها على **جه** و هو **طك** فسطح **طج** مثل سطح **دج** فيكون نسبة **زج** الى **بج** كنسبة **بج** الى **طز** و **طز** من خطوط الترتيب فى قطع **اطل** يكون مربعه مثل ضرب **از** فى **بج** فيكون نسبة **بج** الى **طز** كنسبة **طز** الى **زا** فالخطوط الاربعة متناسبة نسبة **زج** الى **جب** كنسبة **جب** الى **طز** و كنسبة **طز** الى **زا** فنسبة مربع **زج** الاول الى مربع **بج** الثانى كنسبة **بج** الثانى الى **زا** الرابع فيكون مكعب **بج** الذى هو مثل العدد المفروض مساويا للمجسم الذى قاعدته مربع **زج** و ارتفاعه **زا** و نجعل مكعب **زج** مشتركا فمكعب **زج** مع العدد المفروض مساو للمجسم الذى قاعدته مربع **زج** و ارتفاعه **اج** الذى هو مثل عدة الاموال المفروضة و ذلك المراد و قس عليه الباقيين على ان الثالث يخرج منها مكعبان لا محالة لان كل عمود يفصل ضلع مكعب من **جا** كما تبين فقد تبين ان هذا الصنف له اختلاف وقوعات و قد يقع فيها ما يستحيل و قد خرج بخواص قطعين مكاف و زائد معا

[§ ١٠٧٠٧] الصنف السادس من الاصناف الستة الثلاثية الباقية هو **مكعب يعدل اموالا و اعدادا** نفرض عدة الاموال خط **اب** و نعمل مجسما ارتفاعه **اب** و قاعدته مربع و يكون مساويا للعدد المفروض و ليكن ضلع قاعدته **بج** عمودا على **اب** و نتمم سطح **دب** ونعمل على نقطة **ج** المعلومة الوضع قطعا زائدا لا يلقاه **اب اد** و هو قطع **جهز** و قطعا آخر مكافيا رأسه نقطة **ب** و سهمه على استقامة **اب** و ضلعه القائم **اب** و هو **بهح** فهذان القطعان يتقاطعان باضطرار فليتقاطعا على **ه** فيكون **ه** معلومةالوضع و نخرج منها عمودى **هط هك** على **اب اد** فسطح **ها** مثل سطح **جا** فيكون نسبة **اك**

الى **بج** كنسبة **اب** الى **هك** و يكون مربعاتها ايضا متناسبة لكن مربع **هك** مثل

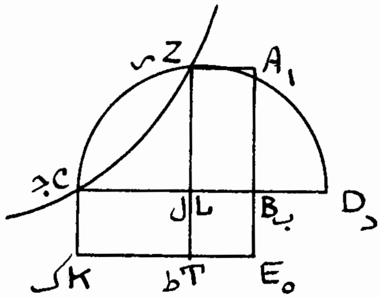


ضرب **كب** فی **اب** لان **هك** خط ترتيب فی قطع **بهج** فيكون نسبة مربع **اب** الى مربع **هك** كنسبة **اب** الى **بك** فنسبة مربع **بج** الى مربع **اك** كنسبة **بك** الى **اب** فيكون المجسم الذی قاعدته مربع **بج** و ارتفاعه **اب** مساويا للمجسم الذی قاعدته مربع **اك** و ارتفاعه **كب** لتكافؤ الارتفاعين و القاعدتين و نجعل المجسم الذی قاعدته مربع **اك** و ارتفاعه **اب** مشتركا فيكون مكعب **اك** مساويا للمجسم الذی قاعدته مربع **بج** و ارتفاعه **اب** الذی عملناه مثل العدد المفروض مع المجسم الذی قاعدته مربع **اك** وارتفاعه **اب** الذی هو عدة الاموال المفروضة فيكون مكعب **اك** مثل عدة امواله المفروضة مع العدد المفروض و ليس لهذا الصنف اختلاف وقوع و لا يستحيل من مسائله شیء و قد خرج بخواص قطعين مكاف و زائد معا

[§١٠٨٠١] و اذ قد أتينا علی الاصناف الثلاثية فلنقل علی الرباعية الاربعة التی كل صنف منها مركب من تعادل ثلاثة و واحد

[§١٠٨٠٢] فالصنف الاول من الاربعة الرباعية هو **مكعب واموال واضلاع تعدل اعدادا** نضع **به** ضلع مربع مساو لعدة الاضلاع المفروضة ونعمل مجسما قاعدته مربع **به** و يكون مساويا للعدد المفروض و ليكن ارتفاعه **بج** عمودا على **به** و نعمل **بد** مثل عدة الاموال المفروضة على استقامة **بج** و نعمل على قطر **دج** نصف دائرة **دزج** و

تتمم سطح **بك** و نعمل على نقطة **جـ** قطعا زائدا* لا يلقاه خطا **به هك** فهو يقطع الدائرة على نقطة **جـ** لانه يقطع الخط المماس لها و هو **جك** فيلزم ان يقطعها

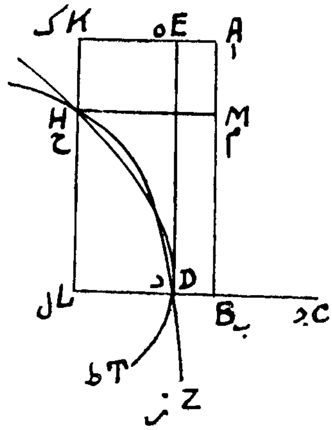


على نقطة أخرى فليقطعها على **ز** فيكون **ز** معلومة الوضع لان الدائرة و القطع معلوما الوضع و نخرج من **ز** عمودى **زط زا** على **هك ها** فسطح **زه** مثل سطح **بك** و يلقى **هل** المشترك يبقى سطح **زب** مثل سطح **لك** يكون نسبة **زل** الى **لج** كنسبة **هب** الى **بل** لان **هب** مثل **طل** و كذلك مربعاتها ايضا متناسبة لكن نسبة مربع **زل** الى مربع **لج** كنسبة **دل** الى **لج** للدائرة فيكون نسبة مربع **هب** الى مربع **بل** كنسبة **دل** الى **لج** فيكون المجسم الذى قاعدته مربع **هب** و ارتفاعه **لج** مثل المجسم الذى قاعدته مربع **بل** و ارتفاعه **دل** لكن هذا المجسم الأخير مثل مكعب **بل** مع المجسم الذى قاعدته مربع **بل** و ارتفاعه **بد** الذى هو مثل عدة الاموال المفروضة و نجعل المجسم الذى قاعدته مربع **هب** و ارتفاعه **بل** الذى هو مثل عدة الجذور مشتركا فيكون المجسم الذى قاعدته مربع **هب** و ارتفاعه **بج** الذى عملناه مساويا للعدد المفروض مثل مكعب **بل** مع مثل عدد اضلاعه المفروض و مع مثل عدة امواله المفروضة و ذلك ما اردنا ان نبين فليس لهذا الصنف اختلاف وقوع و لا يستحيل من مسائله شيء و خرج بخواص القطع الزائد مع خواص الدائرة

[§١٠٨٠٣] الصنف الثانى من الاصناف الاربعة الرباعية هو **مكعب واموال**

(*) درنسخ A و C (§٤٠٣٠٢٠١) عبارت چنين است : «ونعمل قطعا زايدا راسه نقطة **جـ** ولا...»

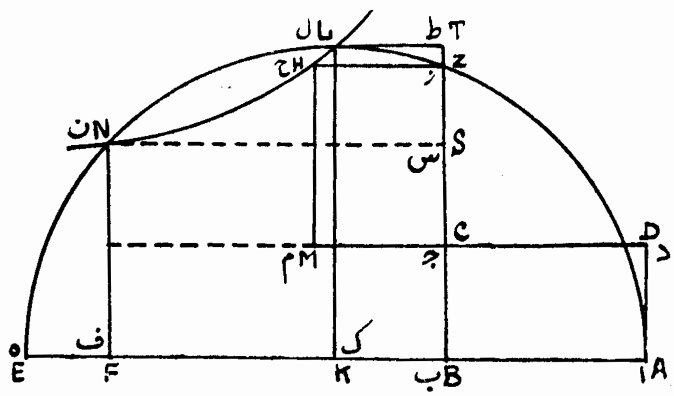
واعداد تعدل اضلاعا نضع **اب** ضلع مربع مساو لعدة الاضلاع و **بج** لعدة الاموال المفروضة و يكون عمودا على **اب** و نعمل مجسما قاعدته مربع **اب** و يكون مساويا للعدد المفروض وليكن ارتفاعه **بد** على استقامة **بج** و نعمل على نقطة **د** قطعا زائدا لا يلقاه **اب اه** بعد ان تممنا سطح **به** و هو قطع **زدح** و نعمل قطعا آخر زائدا رأسه نقطة **د** و سهمه على استقامة **بد** و كل واحد من ضلعيه القائم و المائل مثل **دج** و هو **طدح** ولا محالة ان هذا القطع يقطع الاول على **د** فان امكن ان يلتقيا على نقطة



أخرى فالمسئلة ممكنة و الا فهي مستحيلة هذا الالتقآء بالتماس اوبالتقاطع على نقطتين بنآؤه على المقالة الرابعة من كتاب المخروطات وقد ضمنا ألّا نحيل الا على مقالتين منه و مع هذا فلا يضرنا بعد ان التقا سوآء كان بالتماس او بالتقاطع فافهم و الالتقآء اما ان يكون بالتماس و اما ان يكون بالتقاطع فان قطعه على غيرنقطة **د** فباضطرار يقطعه على نقطتين و بالجملة فانا نخرج من نقطة التقاطع او الالتقآء كيف ما كان وليكن نقطة **ح** عمودى **حم كحل** فيكونان معلومى الوضع و القدر لان نقطة **ح** معلومة الوضع فسطح **اح** مثل سطح **اد** و يلقى **هم** المشترك يبقى **مد** مثل **هح** و نجعل **دح** مشتركا يكون **مل** مثل **هل** فاضلاعهما متكافية و كذلك مربعات اضلاعهما فيكون نسبة مربع **اب** الى مربع **بل** كنسبة مربع **حل** الى مربع **لد** ولكن نسبة

مربع **حل** الى مربع **لد** كنسبة **جل** الى **لد** كما بيناه مرارا فيكون نسبة مربع **اب** الى مربع **بل** كنسبة **جل** الى **لد** فالمجسم الذى ارتفاعه **لد** و قاعدته مربع **اب** مثل المجسم الذى قاعدته مربع **بل** و ارتفاعه **لج** لكن هذا المجسم الأخير مثل مكعب **بل** مع المجسم الذى قاعدته مربع **بل** و ارتفاعه **بج** الذى هو مثل عدة الاموال المفروضة و نجعل المجسم الـذى قاعدته مربع **اب** و ارتفاعه **بد** الذى عملناه مثل العدد المفروض مشتركا فيكون مكعب **بل** مع عدد امواله المفروض و مع العدد المفروض مثل المجسم الذى قاعدته مربع **اب** و ارتفاعه **بل** الذى هو مثل عدة اضلاع مكعب **بل** المفروضة و ذلك المراد فقد تبين ان هذا الصنف له اختلاف وقوعات و ربما يوجد فى مسائله ضلعان لمكعبين و ربمايقع فيها اعنى فـى مسائله مستحيل و قد خرج بخواص قطعين زائدين و ذلك ما اردنا ان نبين

[§١٠٨٠٤] الصنف الثالث من الاصناف الاربعة الرباعية هو **مكعب و اضلاع واعداد تعدل اموالا** نفرض خط **به** لعدة الاموال المفروضة و **بج** ضلع مربع مساو لعدة الاضلاع و يكون عمودا على **به** و نعمل مجسما قاعدته مربع **بج** و يكون مساويا للعدد المفروض وليكن ارتفاعه **اب** و على استقامة **به** و نعمل على **اه** نصف دائرة



ازه فنقطة **ج** اما ان تقع داخل الدائرة او على محيطها او خارجا منها فلتقع اولا داخل الدائرة و نخرج **بج** على استقامة حتى يقطع الدائرة على **ز** و نتمم سطح **اج**

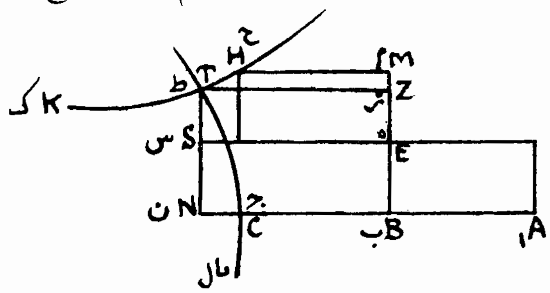
و نعمل على **زج** سطحا مساويا لسطح **اج** و هو **جح** فيكون نقطة **ح** معلومة الوضع لان سطح **جح** معلوم القدر و زواياه ايضا معلومة القدر و خط **زج** معلوم الوضع و القدر و هى اما ان تقع داخل الدايرة او على محيطها او خارجا منها فلتقع اولا داخل الدائرة و نعمل على نقطة **ح** قطعا زائدا لايلقاه **زج جم** فهو يقطع الدائرة على نقطتين باضطرار فى هذا الوضع فليقطعها على نقطتى **ل ن** فتكونان معلومتى الوضع و نخرج منهما عمودى **لك نف** على **اه** و من نقطة **ل** عمود **لط** على **بز** فسطح **لج** مثل سطح **جح** و **جح** مثل **جا** و نجعل **جك** مشتركا يكون **دك** مثل **طك** فاضلاعهما متكافية و كذلك مربعات اضلاعهما لكن نسبة مربع **لك** الى مربع **كا** كنسبة **هك** الى **كا** للدائرة فيلزم ان يكون نسبة مربع **بج** الى مربع **بك** كنسبة **هك** الى **كا** فالمجسم الذى قاعدته مربع **بج** و ارتفاعه **كا** مثل المجسم الذى قاعدته مربع **بك** و ارتفاعه **كه** لكن المجسم الاول مثل عدة اضلاع مكعب **بك** المفروضة و مثل العدد المفروض و نجعل مكعب **بك** مشتركا فيكون المجسم الذى قاعدته مربع **بك** و ارتفاعه **به** الذى هو مثل عدة اموال مكعب **بك** المفروضة مثل مكعب **بك** مع عدة اضلاعه المفروضة و مع العدد المفروض و كذلك يكون مكعب **بف** بهذا البرهان هذا اذا وقع نقطتا **ج ح** داخل الدائرة فان وقع **ح** خارج الدائرة و نعمل القطع فربما لقى الدايرة بالتماس او بالتقاطع [هذا النوع من هذا الصنف هو الذى ذكره ابوالجود فى استخراج المسئلة التى سنذكرها *] و يؤول الامر الى ما قلنا و ان لم يلق القطع الدائرة فلا نزال نعمل السطح على خط اقصر من **زج** او اطول منه فى الوقوع الآخر فان لم يلق القطع الدائرة فالمسئلة مستحيلة و يكون البرهان على استحالتها بعكس ما ذكرناه و ان وقع **ج** على المحيط او خارج الدائرة فنخرج **جز** على استقامة ونعمل سطحا احدى زواياه تكون على **ج** و يكون بحيث لو عمل على الزاوية المقابلة لزاوية **ج** قطع بالصفة المذكورة يلقى الدائرة بالتماس او بالتقاطع و ذلك يعلم بقليل استقرآء مع ضرب من القياس السهل تركته لكى يحصل للناظرين

(*)عبارت داخل علامت[ ] درنسخه‌ی A (§٤.٣.٢.١) درحاشیه‌نوشته شده ودرنسخه‌ی C موجودنیست.

فی رسالتی هذه الارتیاض فان من لایمکنه هذا القدر من الاستنباط لا یتحقق من هذه الرسالة شیئا اذ هذه الرسالة مبنیة على الکتب الثلاثة التی ذکرناها و نبرهن على استحالة المستحیل منها بعکس البرهان الذی ذکرناه على الممکن وذلك ان ضلع المکعب یجب ان یکون اقصر من **هب** الذی هو عدة الاموال المفروضة لانه ان کان مساویا لعدة الاموال المفروضة یکون ذلك المکعب مساویا لعدة امواله المفروضة فاضلا عن زیادة شیء آخرعلیه من العدد او من اضلاعه فان کان ضلع المکعب اعظم من عدة الاموال المفروضة کان المکعب نفسه اعظم من عدة امواله المفروضة فضلا عن زیادة شیء آخر علیه فبین انــه یجب ان یکون اقصر منه فنفصل مثله من **به** ولیکن **بف** و نخرج من **ف** عمودا الى محیط الدائرة و نعکس البرهان الذی ذکرناه فبین ان رأس العمود یکون على محیط القطع الذی قیل انه لایمکن ان یلقى الدائرة وذلك محال و لاجل انا نظن ان هذا الاستقرآء ربما یکون عسرا على بعض الناظرین فی هذه الرسالة فانا نطوی هذه الجملة و نأتی بقانون مغن عن هذا الاستقرآء و هو انا نعمل سطحا على خط کیف ما اردنا یکون على استقامة **بج** کیف مــا وقعت **ج** خارجا او داخلا و یکون احدى زوایاه على نقطة **ج** و یکون مساویا لسطح **اج** فلا بد من ان یصیر اضلاعه معلومة القدر والوضع و نعمل على الزاویة المقابلة لزاویة **ج** قطعا زائدا لا یلقاه خطا **زج** **جم** و هو الخط الذی هو عمود على نقطة **ج** فان لقی القطع الدائرة بالتماس او بالتقاطع فالمسئلة ممکنة و الا فهی مستحیلة و البرهان على الاستحالة ما ذکرت [§١٠٨٠٤٠١] و قد اضطر واحد من المهندسین الــى هذا الصنف وقد اخرجه الا انه لم یبین اختلاف و قوعاته ولم یخطر بباله انه ربما یقع فیه مستحیل کما بیناه فاعرفه و اعرف القانون الآخر فی عمل هذا الصنف و تمییز الممکن من المستحیل و هذا الصنف خرج بخواص الدائرة مع خواص القطع الزائد و ذلك ما اردنا ان نبین و اما المسئلة التی اضطرت واحدا من المتأخرین الى هذا الصنف هی هذه عشرة قسمتها بقسمین فیکون مجموع مربعی القسمین مع الخارج من قسمة الاعظم علــى الاصغر اثنین و سبعین فوضع احد القسمین شیئا و الآخر

عشرة الا شيئا كعادة الجبريين فی امثال هذه القسمات فأدی العمل الی مکعب مع خمسة من العدد و ثلاثة عشر اضلاعه و نصف معادل لعشرة اموال و فی هذه المسئلة بعينها يقع نقطتا ج ح داخل الدائرة فاستخرج المسئلة هذا الفاضل بعد ما اعيت هذه المسئلة جماعة من فضلاء العراق و منهم ابوسهل القوهی رحمهم الله الا ان هذا المستخرج رضی الله عنه مع فضله و عظم قدره فی الرياضيات لم يخطر بباله هذه الاختلافات و فی مسائل هذا الصنف ما يستحيل و هذا الفاضل هو ابوالجود او الشنی و الله اعلم

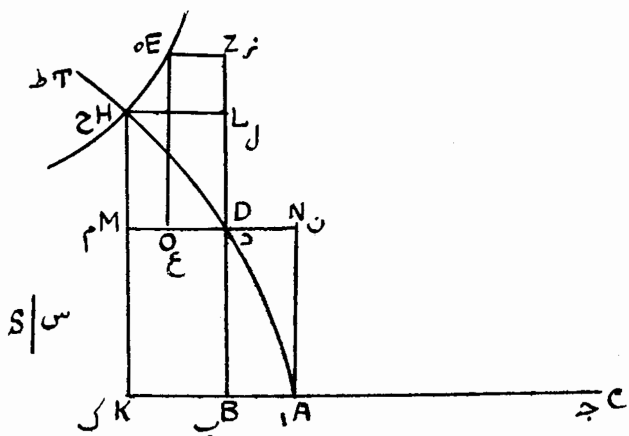
[١٠٨٠٥ §] الصنف الرابع من الاصناف الاربعة الرباعية هو **اعداد و اضلاع و اموال تعدل مکعبا** نفرض **به** ضلع مربع مثل عدة الاضلاع و نعمل مجسما قاعدته مربع **به** و يكون مساويا للعدد المفروض و ليكن ارتفاعه **اب** عمودا على **به** ونفرض **بج** لعدة الاموال المفروضة على استقامة **اب** و نتمم **اه** و نخرج على استقامة **به هم**



كيف ما كان مقداره و نعمل على **هم** المفروض سطحا مثل **اه** و هو سطح **هح** فيكون نقطة ح معلومة الوضع و نعمل على ح قطعا زائدا لا يلقاه **هم هس** و هو **حطك** فيكون معلوم الوضع و نعمل قطعا آخر زائدا رأسه نقطة ج و سهمه على استقامة **بج** و كل واحد من ضلعيه القائم و المائل مثل **اج** و هو قطع **لجط** و يكون معلوم الوضع و يقطع لا محالة قطع **حطك** فليقطعه على نقطة ط فيكون ط معلومة الوضع ونخرج منها عمودی **طز طن** على **بج بم** فيكونان معلومی القدر و الوضع و **طه** مثل **هح** الذی هو مثل **ها** و نجعل **هن** مشتركا فيكون **اس** مثل **طب** فاضلاعهما متكافية و كذلك مربعات اضلاعهما لكن نسبة مربع **طن** الی مربع **ان** كنسبة **نج** الی **ان** كما

بيناه مرارا لمكان قطع **لجط** فنسبة مربع **به** الى مربع **بن** كنسبة **نج** الى **نا** فالمجسم الذى قاعدته مربع **به** و ارتفاعه **ان** مثل المجسم الذى قاعدته مربع **بن** و ارتفاعه **جن** لكن الاول مساو للمجسم الذى يحيط به مربع **به** و ارتفاع **اب** الذى عملناه مساويا للعدد مع المجسم الذى قاعدته مربع **به** و ارتفاعه **بن** الذى هو مثل عدة اضلاع مكعب **بن** المفروضة فنجعل المجسم الذى قاعدته مربع **بن** و ارتفاعه **بج** الذى هو مثل عدة الاموال المفروضة لمكعب **بن** مشتركا فيلزم ان يكون مكعب **بن** مثل عدة امواله المفروضة مع عدة اضلاعه المفروضة و مع العدد المفروض و ذلك ما اردنا ان نبين و ليس لهذا الصنف اختلاف وقوع ولا فى مسائله ما يستحيل

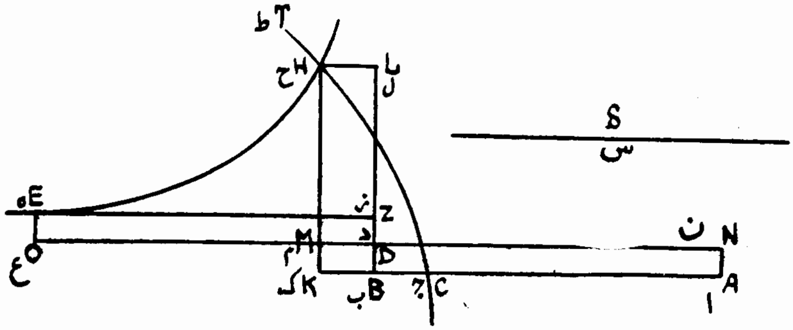
[١٠٩٠١ §] و اذ قد أتينا على الاصناف الاربعة الرباعية فلنقل على الاصناف الثلاثة التى كل واحد منها مركب من اثنين يعادلان اثنين [١٠٩٠٢ §] الصنف الاول من الاصناف الثلاثة الرباعية الباقية هو **مكعب و اموال تعدل اضلاعا و عددا** نضع **بد** ضلع مربع مساو لعدة الاضلاع و **جب** لعدة الاموال المفروضة وهو عمود على **بد** و نعمل مجسما قاعدته مربع **بد** و يكون مساويا للعدد المفروض و ليكن ارتفاعه **س** فخط **س** اما ان يكون اعظم من **بج** او اصغر منه او مساويا له فليكن اولا اصغر منه و نفصل من **بج اب** مثل **س** و نتمم **اد** و لنفرض **دز** على استقامة **بد** كيف ما



وقع و نعمل على **دز** سطحا مثل **اد** و هو **هد** فيكون **ه** معلومة الوضع و اضلاع

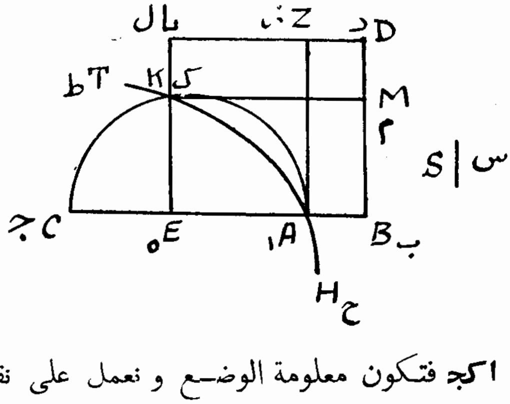
سطح **هد** كلها معلومة الوضع و القدر و نعمل على **ه** قطعا زائدا لا يلقاه **زد دع** و هو قطع **هح** فيكون **هح** معلوم الوضع و نعمل قطعا آخر زائدا رأسه نقطة **ا** و سهمه **اب** و كل واحد من ضلعيه القائم و المائل مثل **اج** و هو قطع **احط** فهو يقطع القطع الآخر باضطرار فليقطعه على **ح** فيكون **ح** معلومة الوضع و نخرج منها عمودى **حك حل** فيكونان معلومى الوضع و القدر و سطح **حد** مثل **هد** الذى هو مثل **اد** و **دك** مشترك فسطح **حب** مثل **ام** و يكون اضلاعهما متكافية و كذلك مربعات اضلاعهما لكن نسبة مربع **حك** الى مربع **كا** كنسبة **جك** الى **اك** لمكان قطع **احط** كما بيناه مرارا فيكون نسبة مربع **بد** الى مربع **كب** كنسبة **جك** الى **اك** فالمجسم الذى قاعدته مربع **بد** و ارتفاعه **اك** مثل المجسم الذى قاعدته مربع **بك** و ارتفاعه **جك** لكن هذا المجسم الاخير مثل مكعب **بك** مع المجسم الذى قاعدته مربع **بك** و ارتفاعه **بج** الذى هو عدة الاموال المفروضة و المجسم الاول مساو للمجسم الذى قاعدته مربع **بد** و ارتفاعه **اب** الذى عملناه مثل العدد المفروض مع المجسم الذى قاعدته مربع **بد** و ارتفاعه **بك** الذى هو عدة اضلاع مكعب **بك** المفروضة فمكعب **بك** مع عدة امواله المفروضة مثل العدد المفروض مع عدة اضلاعه المفروضة و ذلك المراد و اذا كان **س** مثل **بج** فان **بد** هو ضلع المكعب المطلوب برهانه ان المجسم الذى قاعدته مربع **بد** و ارتفاعه ايضا **بد** الذى هو عدة اضلاع مكعب **بد** مساو لمكعب **بد** و المجسم الذى قاعدته مربع **بد** و ارتفاعه **بج** الذى هو عدة اموال مكعب **بد** المفروضة مساو للمجسم الذى قاعدته مربع **بد** و ارتفاعه **س** الذى هو العدد المفروض فيكون مكعب **بد** مع عدة امواله المفروضة مساو للعدد المفروض مع عدة اضلاعه المفروضة و ذلك المراد و معلوم ان مكعب **بد** فى هذا الوقوع مع العدد المفروض مساو لعدة امواله المفروضة مع عدة اضلاعه المفروضة فقد داخل هذا الصنف الصنف الثالث و هو مكعب و اعداد تعدل اموالا و اضلاعا و ان كان **س** اعظم من **بج** فانا نجعل **اب** مثل **س** و نعمل القطع الثانى على نقطة **ج** و كل واحد من ضلعيه مثل **اج** و هو باضطرار يقطع القطع الآخر و يكون ضلع المكعب ايضا

بك و باقى العمل و البرهـان شبيه بما تقدم الا ان نسبة مربع **حك** الى مربع **كا**



كنسبة **اك** الى **كج** فقد تبين ان لهذا الصنف اختلاف و قوعات و انواع و احد انواعه يداخل الصنف الثالث و ليس فى مسائله مستحيل و قد خرج بخواص قطعين زائدين

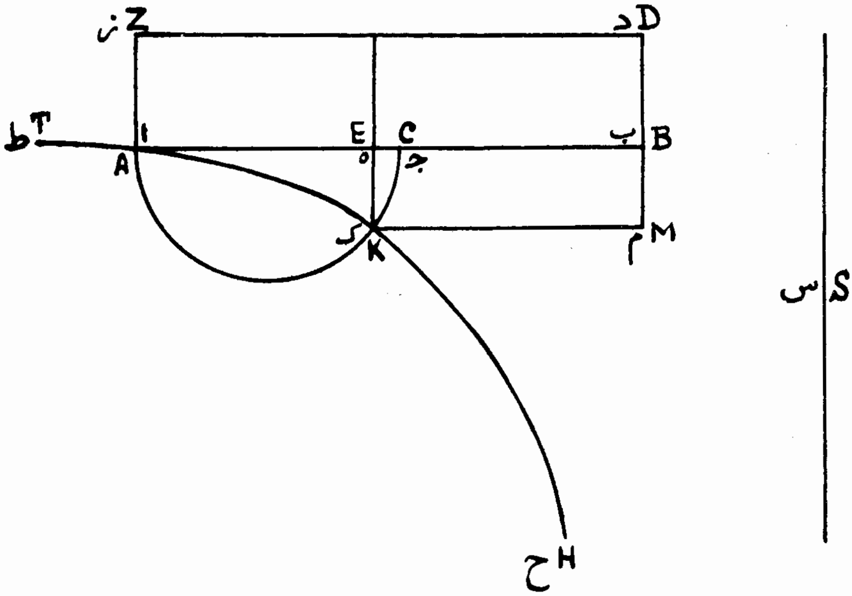
[§١٠٩٠٣] الصنف الثانى من الاصناف الثلاثة الرباعية الباقية هو **مكعب و اضلاع تعدل اموالا واعدادا** نضع **بج** لعدة الاموال المفروضة و **بد** ضلع مربع مثل عدة الاضلاع عمودا على **بج** و نعمل مجسما مساويا للعدد المفروض و يكون قاعدته مربع **بد** وليكن ارتفاعه **س** فخط **س** اما ان يكون اصغر من **بج** او مثله او اعظم منه فليكن اولا اصغـر منه و نفصل من **بج با** مثل **س** و نتمم **اد** و نعمل



على قطر **اج** دائرة **اكج** فتكون معلومة الوضـع و نعمل على نقطة **ا** قطعاً زائدا لا يلقاه **بد دز** و هو قطع **حاط** و يكون معلوم الوضع و **حاط** يقطع **از** المماس للدائرة فهو يقطع الدائرة لانـه لو وقع بينها و بين **از** امكننا ان نخرج من

نقطة **ا** خطا يماس القطع كما بينه ابلونيوس في شكل سَ من مقالة بَ فذلك الخط اما ان يقع بين **از** و الدائرة و ذلك محال و امان ان يقع خارج **از** فيكون **از** خطا مستقيماً واقعا بين القطع و بين ذلك الخط المماس و ذلك محال فليس يقع قطع **طاح** بين الدائرة و بين **از** فهو اذن يقطعها و يقطعها باضطرار على نقطة أخرى فليقطعها على **ك** فيكون **ك** معلومة الوضع و نخرج منها عمودى **كم كه** على **بج بد** فيكونان معلومى الوضع و القدر كما عرفته و نتمم سطح **كد** فسطح **اد** مثل سطح **كد** و نلقى **مز** المشترك و نجعل **اك** مشتركا فيكون **بك** مثل **ال** فاضلاعهما متكافية و كذلك مربعات اضلاعهما لكن نسبة مربع **كه** الى مربع **ها** كنسبة **هج** الى **ها** فيكون نسبة مربع **بد** الى مربع **به** كنسبة **هج** الى **ها** فالمجسم الذى قاعدته مربع **بد** و ارتفاعه **ها** مثل المجسم الذى قاعدته مربع **به** و ارتفاعه **هج** و نجعل مكعب **به** مشتركا فيكون المجسم الذى قاعدته مربع **به** و ارتفاعه **بج** مثل مكعب **به** مع المجسم الذى قاعدته مربع **بد** و ارتفاعه **ها** لكن المجسم الاول مثل عدة اموال مكعب **به** المفروضة و نجعل المجسم الذى قاعدته مربع **بد** و ارتفاعه **با** الذى عملناه مساويا للعدد المفروض مشتركا فيكون مكعب **به** مع المجسم الذى قاعدته مربع **بد** و ارتفاعه **به** الذى هو عدة اضلاع مكعب **به** المفروضة مثل عدة امواله المفروضة مع العدد المفروض و ذلك المراد و ان كان **س** مثل **بج** فان **بج** هو ضلع المكعب المطلوب برهانه ان مكعب **بج** مثل عدة امواله المفروضة والمجسم الذى ارتفاعه **بج** و قاعدته مربع **بد** هو مثل العدد المفروض و هو ايضاً مثل عدة اضلاع مكعب **بج** المفروضة فمكعب **بج** مع عدة اضلاعه المفروضة مساو لعدة امواله المفروضة مع العدد المفروض و كذلك هذا النوع يداخل الصنف الثالث لان عدة اضلاع مكعب **بج** المفروضة هو مثل العدد المفروض فيكون مكعب **بج** مع العدد المفروض مساويا لعدة امواله المفروضة مع عدة اضلاعه المفروضة و ان كان **س** اعظم من **بج** فانا نجعل **با** مثل **س** و نعمل الدائرة على قطر **اج** و القطع على نقطة **ا** يقطع الدائرة على **ك** كما بيناه و نخرج من نقطة **ك** عمودى **كه كم** كما

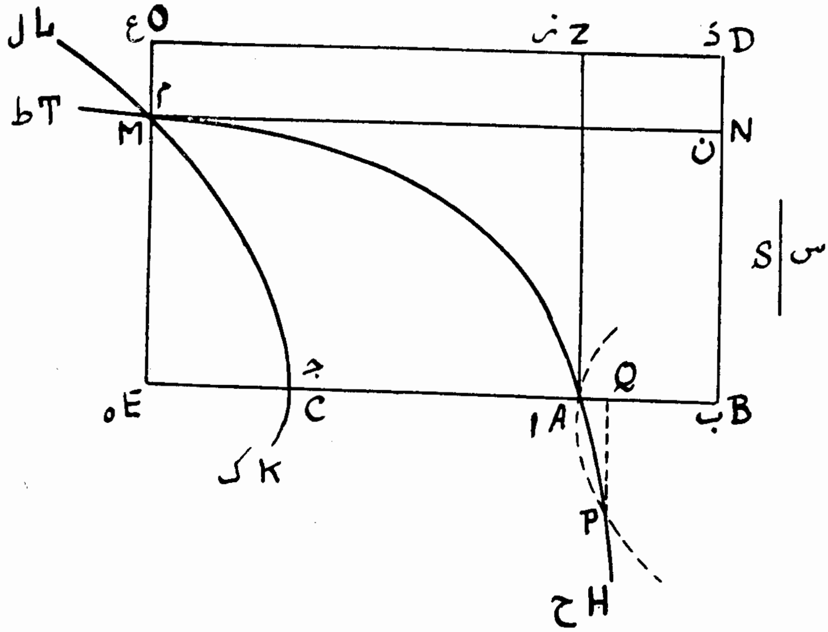
فعلناه فی الشکل المتقدم فیکون **هب** هو ضلع المکعب المطلوب و البرهان علیه کما تقدم نلقی سطح **هد** المشترك فیکون اضلاع **هم هز** متکافیة و کذلك مربعاتها فیکون البرهان بعینه کما تقدم لایتغیر منه شیء فقد تبین ان لهذا الصنف اختلاف



وقوعات و انواع و نوع منها یداخل الصنف الثالث و لیس فی مسائله مستحیل و قد خرج بخواص الدائرة و قطع زائد

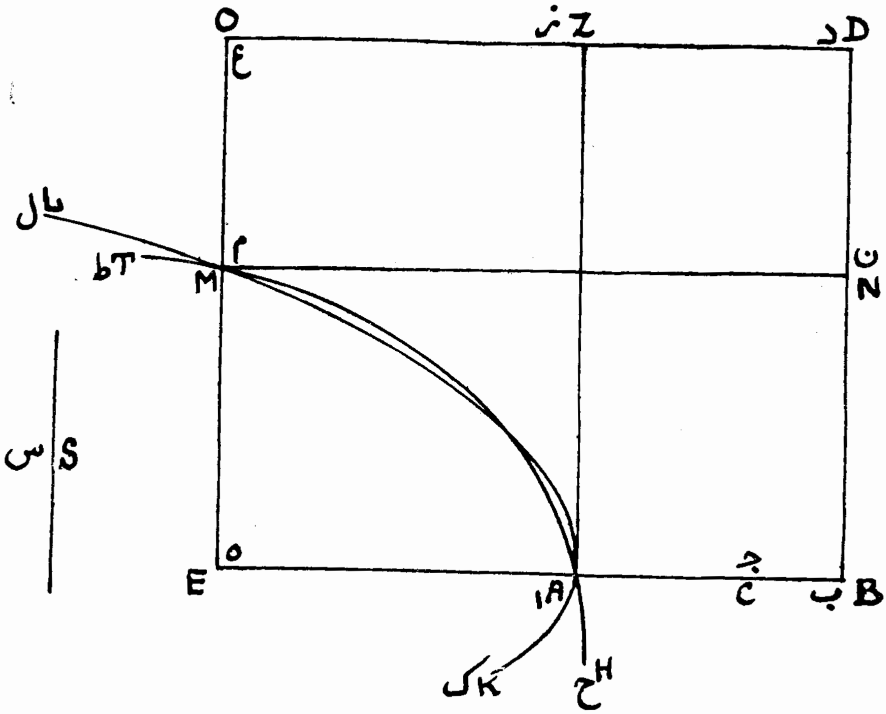
[§١٠٩٠٤] الصنف الثالث من الاصناف الثلاثة الرباعیة الباقیة **هو مکعب و اعداد تعدل اضلاعا و اموالا** نفرض **بج** لعدة الاموال و **بد** عمودا علیه و هو ضلع مربع مساو لعدة الجذور و نعمل مجسما قاعدته مربع **بد** و یکون مساویا للعدد المفروض ولیکن ارتفاعه **س** فخط **س** اما ان یکون اصغر من **بج** او مثله او اعظم منه ولیکن اولا اصغر منه و نفصل من **بج با** مثل **س** و نتمم **بز** و نعمل علی نقطة **ا** قطعا زائدا لا یلقاه **بد دز** و هو قطع **حاط** و نعمل قطعاً آخر زائدا رأسه نقطة **ج** و سهمه علی استقامة **بج** و کل واحد من ضلعیه القائم و المائل مثل **اج** فهو لامحالة یقطع القطع الآخر و هو **کجل** فلیتقاطع قطع **کجل** و قطع **حاط** علی نقطة **م** فیکون

نقطة **م** معلومة الوضع لان القطعين معلوما الوضع و نخرج منها عمودى **من همع** فيكونان معلومى الـوضع و القدر فسطح **دا** مثل سطح **دم** و يكون **نه** مثل **زه** على ما بيناه مرارا فاضلاعهما متكافية و كذلك مربعات اضلاعهما لكن نسبة مربع **مه** الى مربع **ها** كنسبة **جه** الى **ها** لقطع **كجل** فيكون نسبة مربع **بد** الى مربع **به** كنسبة **جه** الى **ها** فالمجسم الذى قاعدته مربع **بد** و ارتفاعه **ها** مثل المجسم الذى



قاعدته مربع **به** و ارتفاعه **جه** و نجعل المجسم الذى قاعدته مربع **به** و ارتفاعه **بج** الذى هو عدة اموال مكعب **به** مشتركا فمكعب **به** مثل عدة امواله المفروضة مع المجسم الذى قاعدته مربع **بد** و ارتفاعه **ها** و نجعل المجسم الذى ارتفاعه **با** و قاعـدته مربع **بد** الذى عملناه مساويا للعدد المفروض مشتركا فيكون المجسم الذى قاعـدته مربع **بد** و ارتفاعه **به** الذى هو مثل عدة اضلاع مكعب **به** المفروضة مع عدة اموال مكعب **به** المفروضة مساويا لمكعب **به** مع العدد المفروض و ان كان **س** مثل **بج** فان **بج** هو ضلع المكعب برهانه ان مكعب **بج** مثل عدة امواله المفروضة و العدد المفروض يكون

مساويا لعدة اضلاع مكعب **بج** المفروضة فمكعب **بج** مع العدد المفروض مثل عـدة امواله المفروضة مع عدة اضلاعه المفروضة و ذلك المراد و يكون ايضا مكعب **بج** مع عدة اضلاعه المفروضة مثل عدة امواله المفروضة مع العدد المفروض فقد داخل هذالنوع الصنف الثاني وان كان **س** اعظم من **بج** فانا نجعل **با** مثل **س** ونتمم السطح ونعمل القطع الاول على **ا** والثاني ايضا على **ا** و هما متقاطعان فان التقيا مرة ثانية اما



بالتماس فعلى نقطة واحدة و اما بالتقاطع فعلى نقطتين كما هو معروف من مقالة دٓ من كتاب المخروطات فالمسئلة ممكنة و الا فهى مستحيلة فان تقاطعا فنخرج من نقطتى التقاطع عمودين يفصل ضلعين لمكعبين و البرهان عليه كما تقـدم لايتغير منه شيء فبين ان لهذا الصنف انواعا و بعضها مستحيل و قد خرج بخواص قطعين زائديـن [§١٠٩٠٥] و تبين ان هذه الثلاثة الاصناف الرباعية متداخلة اى يوجد نوع من الاول يكون هو بعينه نوعا من الثاني و يوجد نوع من الثانى هو نوع من الثالث و يوجد

نوع من الثالث هو بعينه نوع من الثانى كما بيناه

[١٠١٥٠١ §] واذ قد أتينا على الاصناف الخمسة والعشرين من مقدمات الجبر والمقابلة و استوفيناها حق الاستيفآء و حصلنا انواع كل صنف منها و اعطينا القانون فى معرفة الممكن من المستحيل فى مسائل ما يقع فيه المستحيلات و بينا ان اكثرها لا يقع فيه المستحيلات † فلنقل على اجزائها

[١٠١٥٠٢ §] جزء الشيء هو عدد نسبته الى الواحد كنسبة الواحد الى ذلك الشيء فان كان الشيء ثلاثة كان جزؤه ثلثا و ان كان الشيء ثلثا كان جزؤه ثلاثة و كذلك ان كان اربعة كان جزؤه ربعا و ان كان ربعا كان جزؤه اربعة و بالجملة فان جزء كل عدد هو الجزء السمى لذلك العدد كالثلث من الثلاثة ان كان العدد صحيحا و الثلاثة من الثلث ان كان العدد كسورا و كذلك جزء المال هو الجزء السمى لعدده صحيحا كان او كسورا و كذلك جزء الكعب ولكى يكون اظهر للحس فانا نضعها فى لوح

جزء الكعب ☆	جزء المال ☆	جزء الجذر ☆
١	١	١
٨	٤	٢

الواحد ☆	الجذر ☆	المال ☆	الكعب ☆
١	٢	٤	٨

[١٠١٥٠٣ §] فنسبة جزء الكعب الى جزء المال كنسبة جزء المال الى جزء الجذر و كنسبة جزء الجذر الى الواحد و كنسبة الواحد الى الجذر و كنسبة الجذر الى المال و كنسبة المال الى الكعب فهذه سبع مراتب متوالية على نسبة واحدة و نتكلم فى معادلاتها لا غير و اما جزء مال المال و جزء مال الكعب و جزء كعب الكعب بالغا ما بلغ يكون ايضا متناسبة ولا حاجة لنا الى ذكرها اذ لا سبيل الى استنباطها

(†) نسخه‌ى C (١٠٢٠٣٠٤§) اين عبارت را بين « المستحيلات » و« فلنقل » اضافه دارد: « فقد حان لنا ان نختم هذه الرساله حامدين لله تعالى مصليين على خيرالانبياءِ محمد وآله اجمعين و ادن كما اتى هذه الاصناف » . ونيز رجوع شود به ذيل صفحه‌ى ٥١ .

[١٠١٥٠٤] و اعلم انك ان اخذت الثمن الذى هو جزء الكعب كعبا فيكون جزؤه ثمانية الذى هو الكعب بالعكس فقس عليه سائره فجزء الكعب و جزء المال و جزء الجذر و الواحد هذه الاربعة تكون فى حكم الكعب و المال و الجذر و الواحد مثاله اذا قيل جزء مال يعدل نصف جزء جذر فكانه قيل مال يعدل نصف جذر فالمال يكون ربعا و هو جزء المال فالمال المطلوب يكون اربعة و جزؤه الربع و جزء جذره النصف و على هذا القياس فى مفرداته و اما فى المركبات اذا قيل جزء مال و جزءا جذر يعدل واحدا و ربعا فكانه قيل مال و جذران يعدل واحدا و ربعا فبالطريق الذى بيناه نخرج الجذر نصفا و المال ربعا الا انه بموجب السؤال جزء مال و جزءا جذر فيكون الربع الذى هو المال الاول جزء المال المطلوب فيكون المال المطلوب اربعة و كذلك فى الرباعيات اذا قيل جزء كعب وثلاثة اجزاء مال وخمسة اجزاء جذر يعدل ثلاثة و ثلاثة اثمان و كانه قيل كعب وثلاثة اموال وخمسة اجذار يعدل ثلاثة و ثلاثة اثمان فبالطريق الذى بيناه بالقطوع المخروطية يتبين ضلع الكعب فيكون هو جزء الجذر المطلوب فنجعل نسبته الى الواحد المفروض كنسبة الواحد المفروض الى خط آخر فيكون ذلك الخط هو ضلع المكعب المطلوب فقد لاح انه يكون خمسة وعشرون صنفا أخرى من هذه المعادلات بين هذه الاربعة متناسبة للخمسة والعشرين صنفا المتقدمة

[§ ١٠١٥٠٥] و اما ضرب بعضها فى بعض فمعلوم ظاهر من كتب الجبريين و انت يمكنك ان تتفطن له ولا نطول به القول [§ ١٠١٥٠٦] و اما معادلة هذه الاربعة بالاربعة المتقدمة فكما ابين [§١٠١٥٠٦٠١] اذا قيل كعب يعدل عشرة اجزاء كعب اى عشرة اجزاء نفسه فالكعب هو الاول من المراتب السبع و اجزاء الكعب هو السابع منها فاضرب احدهما فى الآخر و خذ جذر المجتمع فما خرج فهو الواسط اعنى الرابع و هو المكعب المطلوب و تفصيل هذا الكلام ان كل عدد اذا ضرب فى جزئه السمى له خرج الواحد و ان ضرب فى جزئيه خرج اثنان و ان ضرب فى عشرة اجزائه يخرج عشرة من العدد فكانه قيل فى مسئلتنا اى كعب اذا ضرب فى مثله كان

عشرة فجذره هو المكعب المطلوب ثم استخراج ضلع ذلك المكعب هوعلى ما بيناه بالقطوع المخروطيه و كذلك اذا قيل اى مال يعدل ستة عشر جزءا مناجزائه السمية له فاضرب الواحد فى ستة عشر و خذ جذر المبلغ و هو اربعة فيكون هو المال المطلوب فكانه قيل اى مال ضربته فى مثله يكون ستة عشر على القياس المتقدم و كذلك اذا قيل اى جذر يعدل اربعة اجزائه فكانه قيل اى عدد اذا ضربته فى مثله حصل اربعة و هو اثنان و اما اذا قيل اى مال يعدل عدة اجزاء مكعب ضلعه فان استخراج ذلك لا يمكن بالطرق التى بيناها اذ هو محتاج الى ايراد اربعة خطوط بين خطين ليتوالى الستة على نسبة واحدة و ذلك قد بينه ابو على بن الهيثم رحمه الله تعالى الا انه صعب جدا لا يمكن ان يلحق بكتابنا هذا و كذلك ان قيل اى مكعب يعدل عدة اجزاء مال ضلعه يحتاج الى المقدمة المذكورة فلايمكن استخراجها بطرقنا و بالجملة فان ضرب الاول فى السادس من هذه السبع المراتب يحتاج الى ايراد اربعة خطوط بين خطين ليتوالى الستة على نسبة واحدة كما بينه ابو على بن الهيثم رحمه الله تعالى و اما اذا قيل اى مكعب يعدل ستة عشر جزء ضلعه فيضرب الاول فى الخامس فيكون جذر جذر المبلغ هو ضلع المكعب المطلوب و على هذا القياس كل ما يعادل من هذه السبع المراتب خامسه فى النسبة [۶۰۲۰۱۵۰۱۰§]

و اما فى المركبات مثل جذر يعدل واحدا و جزءى جذر فهو فى قوة مال يعدل جذرا و اثنين من العدد لان هذه الثلاثة مناسبة للثلاثة المذكورة فنستخرجه بالطريقة المذكورة يخرج المال اربعة و هو يعدل جذره مع اثنين من العدد فجذر هذا هو المطلوب و جذره اثنان و هو يعدل واحدا مع جزءى جذره و كذلك ان قيل مال و جذراه يعدل واحدا و جزءى جذر يكون فى قوة كعب و مالان يعدل جذرا و اثنين فنستخرج ضلع المكعب كما بيناه بالقطوع المخروطية فيكون مربع ذلك الضلع هو المال المطلوب و كذلك ان قيل جذر و اثنان من العدد و عشرة اجزاء جذر يعدل عشرين جزء مال فيكون فى قوة كعب و مالان و عشرة اجذار يعدل عشرين عددا فنستخرج ضلع المكعب بالطريق

المخروطی فیکون هو الجذر المطلوب [§١٠١٥٠٦٠٣] و بالجملة فکل اربع مراتب متوالیة من هذه المراتب السبع یکون حکمها فی حکم الاصناف الخمسة و العشرین المذکورة فاذا تعدی الـی خمس مراتب او ست مراتب او سبع مراتب فان ذلك لا یمکن ان یستخرج بوجه من الوجوه مثاله اذا قیل مال و جذران یعدل اثنین من العدد و جزءی مال فان هذا لایمکن ان یستخرج لان المال هو الثانی و جزء المال هو السادس فقد تعدی الی خمس مراتب فقس علیه سائره

[§١٠١٥٠٧] فجمیع الاصناف المفردة بین هذه السبع المراتب احدا و عشرین منها اثنان لایمکن ان یستخرج بطریقنا بل یحتاج فیها الـی مقدمة ابن الهیثم فیبقی تسعة عشر صنفا یستخرج بطریقنا بعضها بخواص الدائرة و بعضها بخواص القطوع و جمیع المرکبات الثلاثیة المتوالیة خمسة عشر و یستخـرج بخواص الدائرة و جمیع المرکبات الثلاثیة فی کل اربع متوالیة اربعة و عشرین و یستخرج بخواص القطوع و جمیع المرکبات الرباعیة بین کل اربع مراتب متوالیة ثمانیة و عشرین و یستخرج بخواص القطوع فجمیع الاصناف الواقعة بین هذه السبع المراتب التی یمکن استخراجها بالطرق التی بیناها ستة وثمانین لم یذکر فی کتب المتقدمین منها الا ستة اصناف فمن وقف علـی هذه المقدمات المذکورة و اتفق له مع ذلك قوة فی الطبع و دربة فی المسائل ام یکد یخفی علیه من المسائل المعتاصة علی المتقدمین شیء فقد حان لنا ان نختم هـذه الرسالة حامدین لله تعالی و مصلین علی انبیائه اجمعین *

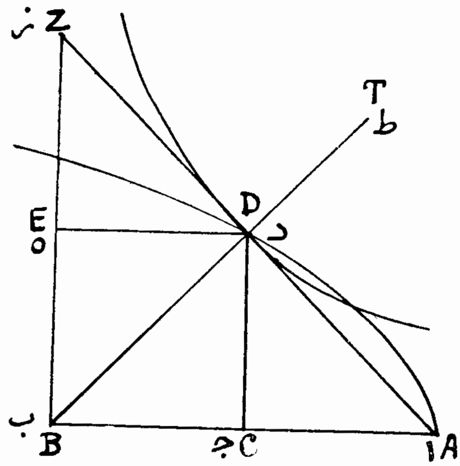
[§١٠١١٠١] هذا و قد حکی لی بعض من شدا شیئا نزرا من الهندسة بعد

(*) عبارت « فقد حان . . . اجمعین » در نسخه‌ی C (§ ٤٠٣٠٢٠١) با اندك تفاوتـی در محلی کـه در ذیل صفحه‌ی ٤٨ کتاب حاضر نشان داده‌ایم ضبط شده . بعلاوه ترتیب بقیه‌ی کتاب در نسخه‌ی C با متن حاضر (که همان متن ویکه است) متفاوت میباشد ، بدین معنی که درنسخه‌ی C توضیح خطای ابوالجود (ازآغاز ١٠١١٠٢ § متن حاضرتا عبارت « بحسب ماقـد بینا لك » درآخر ١٠١١٠٢٠١ § همین متن) بلافاصله بعد از عبارت « لم یکد یخفی . . . علی المتقدمین» مذکور درسطورشانزدهم وهفدهم صفحه‌ی حاضرضبط شده و سپس شرح کار ابوالجود (از عبارت « هذا و قد » که آغاز١٠١١٠١ § متن حاضراست تا عبارت « فی کل‌حال» که‌پایان همین § است) .

تأليفى هذه الرسالة بخمس سنين ان لابى الجود محمد بن الليث المهندس رحمه الله كلاما فى تعديد هذه الاصناف و تحليل اكثرها الى القطوع المخروطية من غير استيفآء جميع انواعها و تمييز الممكن من المستحيل بل بحسب ما تأدى بـه النظر فى المسائل الجزئية اليها فلم استبعد ذلك لان هذين الصنفين الذين نسبتهما الى واحد ممن تقدمنا منسوبان اليه و قد تصفحهما فى جملة تصنيفات ابى الجود بخط الحازمى الخوارزمى و احدهما من الثلاثيات و هو مكعب و عدد يعدل اموالا و له انواع و لانواعه شرائط كما هو مذكور فـى هذه الرسالة و لم يستوف شرائطها ثم ابطل فى حكمه ايضا فى هذا الصنف بقولـه ان كان ضلع المكعب المساوى للعدد اعظم من نصف عدة الاموال استحالت المسئلة و ليس كذلك كما بيناه و ذلك بسبب انه لم يتفطن لتماس القطعين او لتقاطعهما فـى ذلك الجانب الآخر و الثانى من الرباعيات و هو مكعب و عدد و اضلاع تعدل اموالا فلعمرى انه قد احسن فى الوقوف على هذه المسئلة بعد ما اعيت جماعة من المهندسين لكنه مسئلته جزئية و للصنف انواع و شرائط فان فى مسائله ما يستحيل فلم يستوفها حق الاستيفآء و انما ذكرت هذا ليقابل من يصل اليه الرسالتان ان كان ما حكى لى من حال هذا الفاضل حقا بين رسالتى هذه و المنسوبة الى هذا الفاضل فانى اظن لم آل جهدا فـى الاستيفآء مع الانجاز و تجنب التطويل المبرم و لو شئت لأتيت بمثال لكل و احـد من هذه الا صناف و انواعها لكنى خشيت التطويل فاقتصرت على هذه القوانين الكلية تعويلا على ذهن المتعلم لان من يكون ذهنه بحيث يتصور هذه الرسالة لا يقصر عما يرومه من الامثلة الجزئية و استقرآئها و الله الموفق للصواب و عليه المعول فى كل حال

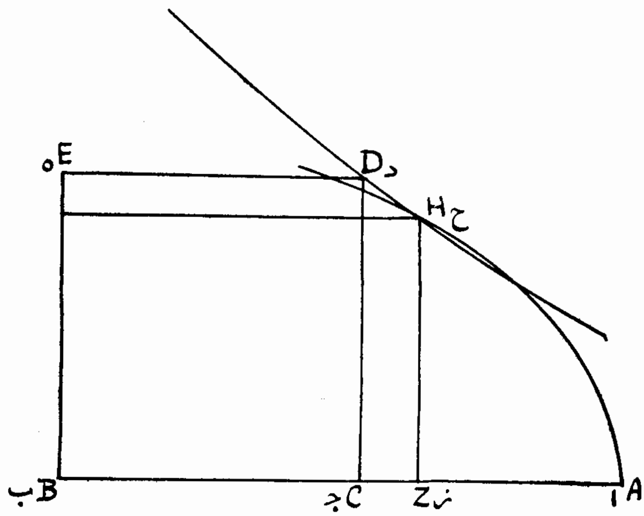
[۱۰۱۱۰۲§] وبعد فان واحدا من اصحابنا اقترح علينا ان نبين خطاء ابى الجود محمد بن الليث فى الصنف الخامس من الاصناف الستة الثلاثية التى تنحل بالقطوع و هو مكعب و عدد يعدل اموالا قال ابو الجود نضع عدة الاموال خط **اب** ونفصل منه ضلع مكعب مساو للعدد و هو **بج** فخط **بج** اما ان يكون مثل **جا** او

اعظم منه او اصغر قال اذا كان مثل **بج** فانا نتمم سطح **جه** و نعمل على **د** قطعا زائدا لا يلقاه **اب به** ونعمل قطعا مكافيا رأسه نقطة **ا** و سهمه **اب** و ضلعه القائم



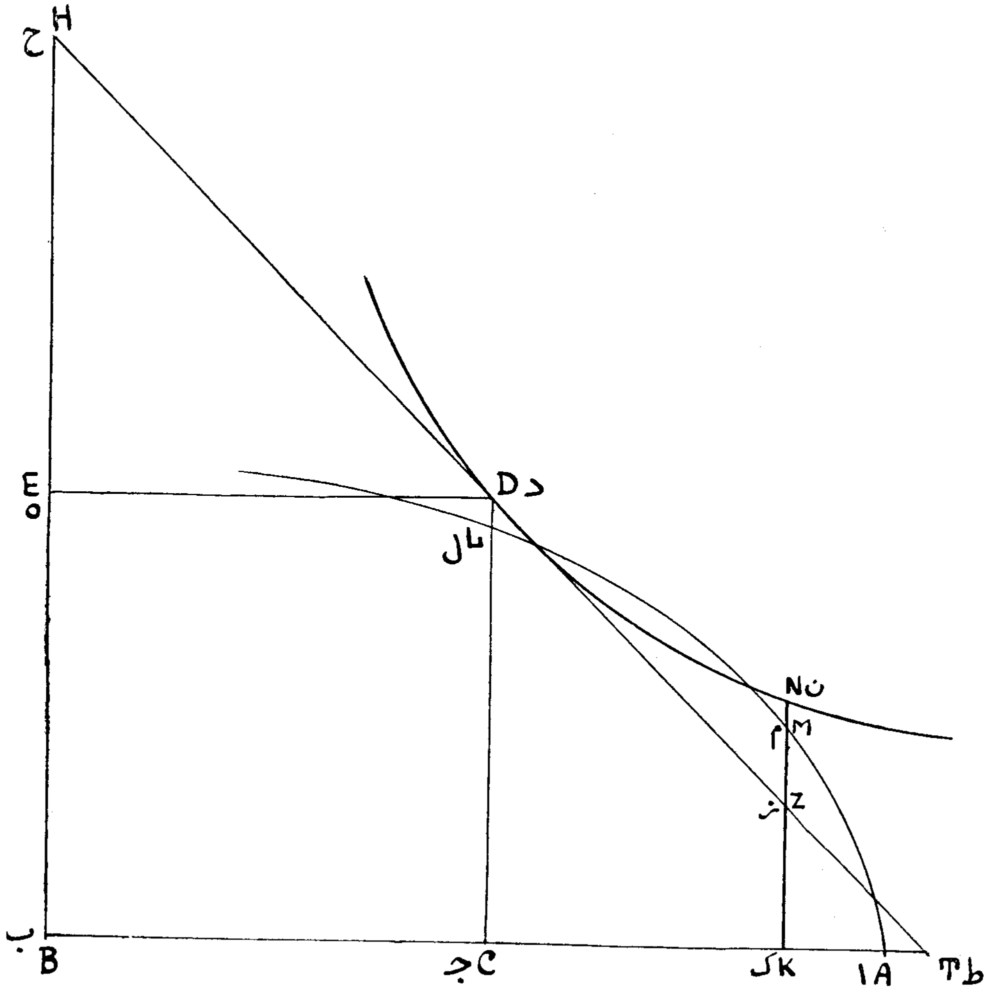
بج فيمر القطع لامحالة على نقطة **د** كما بيناه ثم زعم ان القطعين يتماسان على نقطة **د** و اخطأ لانه يجب ان يكونا متقاطعين برهانه انا نجعل **بز** مثل **با** و نصل **از** فهو يمر على **د** لامحالة و يكون فى داخل القطع المكافى ويكون زاوية **ادب** قائمة و زاوية **ابد** مثل زاوية **زبد** و معلوم ان سهم القطع الزائد يقسم الزاوية المحيطة بالقطع بنصفين فيجب ان يكون خط **بدط** سهم القطع الزائد الذى على **د** و خط **اد** مواز لخطوط الترتيب فهو يماس القطع الزائد فيلزم ان يكون المكافى قاطعاً للزائد لا يجوز ان يكون بينه و بين الخط المماس له لانه لو كان مماسا له لكانت الخطوط الخارجة من نقطه **د** الى اية نقطة فرضت على محيط **اد** واقعة بين القطع و بين الخط المماس له و ذلك محال فباضطرار ان يكون المكافى يقطع الزائد على نقطة أخرى فيما بين **ا د** و ذلك ما اردنا ان نبين فهذا وجه خطاء هذا الفاضل فى قوله ان القطعين يجب ان يكونا متماسين على **د** و اما قوله اذا كان **بج** اعظم من **جا** فان المسئلة مستحيلة و ذلك لان القطعين لا يتلاقيان كلام باطل بل يجوز ان يتلاقيا بالتقاطع او بالتماس على نقطة او نقطتين فيما بين **ا د**

كما بيناه هناك و عليه برهان اعم مما ذكرناه فليكن عدة الاموال **اب** و ضلع المكعب **بج** و هو اعظم من نصف **اب** و نتمم **جه** و نعمل القطعين كما قد عرفته و ليكن **اب** عشرة و **زب** ستة فيكون ضرب مربعه فى **زا** مائة و اربعة و اربعين و هو العدد و ضلعه **بج** و لا محالة ان **بج** اعظم من خمسة لان مكعب خمسة مائة و خمسة



و عشرين فالمجسم الذى قاعدته مربع **زب** و ارتفاعه **زا** مثل مكعب **بج** فقاعدتاهما اذن مكافيتان لارتفاعيهما اعنى يكون نسبة مربع **زب** الى مربع **بج** كنسبة **بج** الى **زا** و نخرج من **ز** عمودا يقطع القطع الزائد على نقطة **ح** و نتمم **حب** فسطح **حب** مثل **جه** فاضلاعهما متكافية اعنى نسبة **زب** الى **بج** كنسبة **بج** الى **زح** فيكون نسبة مربع **زب** الى مربع **بج** كنسبة **زب** الى **زح** و قد كانت تلك النسبة مثل نسبة **بج** الى **زا** فنسبة **زب** الى **زح** كنسبة **بج** الى **زا** و بالتبديل كذلك فالخطوط الاربعة متوالية **زب بج زح زا** فيكون مربع **زح** مثل ضرب **بج** فى **زا** و **بج** هو الضلع القائم للقطع المكافى الذى سهمه **اب** و رأسه **ا** فيكون **زح** من خطوط الترتيب فنقطة **ح** اذن على محيط المكافى لا محالة و قد كانت على محيط الزائد فهما اذن متلاقيان فقد ظهر خطاء ابى الجود فى قوله ان

القطعين لا يتلاقيان و ذلك المراد ولكى يكون اظهر فانا نضع **اب** ثمانين و **بج** الذى هو ضلع المكعب المساوى للعدد احدا واربعين و هو اعظم من **اج** فنقطة **د** تقع من خارج القطع المكافى فليمر المكافى على **ل** فيكون خط **لج** جذر ألف و خمس مائة وتسعة و تسعين و هو اربعون الا شيئا يسيرا و نجعل **طج** مثل **جب** و **بح** مثل **بط** و نصل **طح** فهو يماس القطع الزائد كما بيناه و نفصل **اک** ربع **اج** و نخرج منة عمودا يقطع القطع على نقطة **م** فيكون نسبة مربع **لج** الى مربع **كم** كنسبة



اج الى **اك** لانهما خطان من خطوط ترتيب المكافى و قد بينه ابلونيوس فى شكل يطٓ من مقالة آ فيكون **كم** نصف **لج** و هو عشرون الا شيئا يسيرا و **جط** احدا و اربعين و **اك** تسعة و ثلاثة ارباع و **اط** اثنان فيكون خط **كز** احد عشر و ثلاثة ارباع لان نسبة **كز** الى **كط** كنسبة **حب** الى **بط** و هما متساويان فخط **زم** يكون اعظم من ثمانية و هو فى داخل الخط المماس للزائد فهو فى هذا الوضع يكون فى داخل القطع الزائد لا محالة نعم قد يكون القطعان غيـر متلاقيين اذا كان **بج** اعظم من **جا** لكن ذلك غير واجب فى جميع الانواع فقد ابطل ابو الجود فى هذا الحكم فافهمه و لو اردت ان تجد امثلة عددية لا مكنك ذلك [§ ١٠١١٠٢٠١] و هذه المسئلة هى اضافة مجسم الى خط مفروض ينقص عن تمامه مكعبا و يكون مساويا لمجسم آخر مفروض فان كان ضلع المكعب المساوى للمجسم المساوى مثل نصف الخط او اصغر فان ذلك واجب و ان كان اعظم فانه يمكن ان يقع فيه ما يستحيل بحسب ما بيناه لك * و الله الميسر لحل هذه العويصات بمنه و كرمه

تمت الرسالة ظهيرة يوم الاحد الثالث و العشرين
من شهر ربيع الاول سنة [illegible] و الحمد
لله وحده و كفى فسلامه على عباده الذين اصطفى

---

* رجوك شود به ذيل صفحه ى ٥١ .

قسمت دوم

هـذه

رسالة

لابی الفتح عمر بن ابراهیم الخیامی

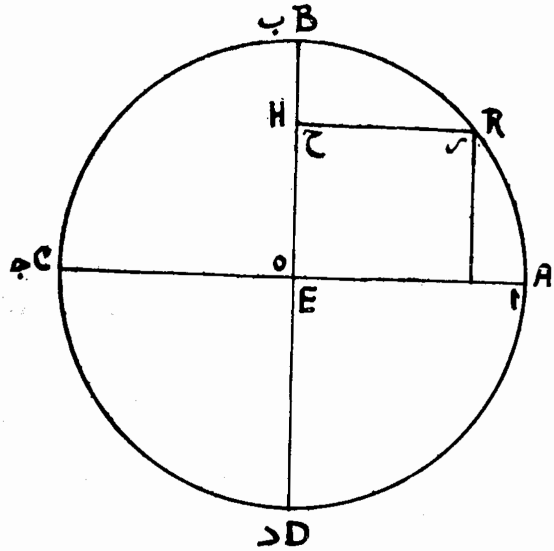
(متن)

بسم‌الله الرحمن‌الرحیم و به نستوثق و علیه نستعین

هذه رسالة

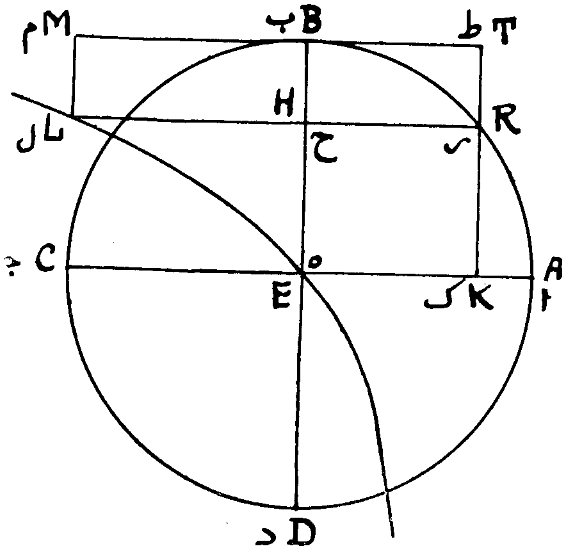
لابی‌الفتح عمر بن ابراهیم الخیامی

[۲۰۱ §] نرید ان نقسم ربع دایـرة **اب** من دایرة **ابجد** بقسمتین علی نقطة مثل **ر** و نخرج عمود **رح** علی قطر **بج** فیکون نسبة **اه** الی **رح** کنسبة **ه ح** الی **ح ب** و **ه** مرکز الدایرة و **اه** نصف القطر



فانا ننزل انا قد فعلنا حتی یؤدی التحلیل الی امر معلوم ثم نرکب علی تلك الصفة **فنعید** دایرة **ابجد** و مرکزها **ه** و نخرج **اج بد** یتقاطعان علی زوایا قائمه و نخرج عمود **رح** یکون نسبة **اه** الیه کنسبة **ه ح** الی **ح ب** و نخرج عمودی **کارط طبم** و نتمم سطح **ط ل** بعد ان جعلنا خط **بم** مثل **اه** فلان نسبة **اه** الی **رح** کنسبة **ه ح** الی **ح ب** و **بم** مثل **اه** یکون ضرب **بم** فی

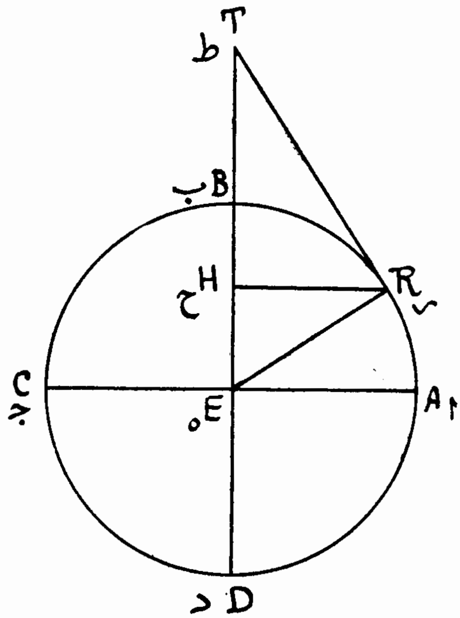
ح ب مساویا لضرب ر ح فی ه ح کما بینه اقلیدس فی یو من و الاصول و ضرب ب م فی ح ب مثل سطح ب ل و ضرب ر ح فی ه ح مثل سطح ح ک فیکون سطح



ب ل مساویا لسطح ح ک و نجعل سطح ح ط مشترکا فیکون سطح ط ه مساویا لسطح ط ل فان عملنا قطعا زایدا لا یلقاه خطا ک ط ط م و یمر علی نقطه ه کما بینه ابلونیوس فی نط من المقالة الاولی من کتاب المخروطات و الشکل و و ه من المقالة الثانیة من هذا الکتاب اذ هذا العمل یتم بهذه الاشکال الثلثة فان ذلك القطع الزاید یمر علی نقطة ل لا محالة کما یتبین من عکس الشکل الثامن من المقالة الثانیة من کتاب المخروطات و نقطة ه معلومة الوضع و خط ب م معلوم الوضع و القدر الا ان نقطة ل عند الترکیب غیر معلومة الوضع لانها لو کانت معلومة الوضع لکانت نقطة ح معلومة الوضع لان خط ح ل معلوم القدر فیکون خط ب ح معلوم القدر و لکان الشکل معلوما و کذلك خط ط ک غیر معلوم الوضع لانه لو کان معلوم الوضع لکانت نقطة ط معلومة الوضع و لو کانت نقطة ط معلومة الوضع لکان خط ط ب معلوم القدر و لو کان خط ط ب معلوم القدر لکان الشکل معلوما و لیس کذلك اذ المقصود علم الشکل فلو کان نقطة ل معلومة الوضع او خط ط ک معلوم الوضع

لكان يمكن ان يعمل الشكل و ينال المقصود عند التركيب بسهولة و ليس المعرفة بواحدة منها سهلة فحسب * . هذه الطريقة للباحث المستبصر بكتاب المخروطات لا يوصل الى المطلوب بطريقة اخرى امكنه التفطن لهذه الطريقة وانما اوردت هذه الطريقة مع صعوبتها ليكون شبه تمهيد للمتعلم و توطية له و لم اتممها و لم اركبها على الوجه الهندسى لصعوبتها و كثرة افتقارها الى عدة مقدمات و غيره من القطوع المخروطية فليتمم من شاء من العالمين بقطوع المخروط بعد ما تحصلت له الطريقة التى اذكرها فانها و ان كانت ايضا مفتقرة الى مقدمات مخروطية فهى اسهل بكثير من الاولى و مقدماتها اعم منفعة

[§ ۲۰۲] **فاقول بعون الله** نعيد الشكل و ننزل بالتحليل انا قد فعلنا ما اردنا و صارت نسبة **اه** الى **رح** كنسبة **هح** الى **حب** و نخرج من نقطة **ر** خطا



يماس الدايرة و هو **رط** على ما بينه اقليدس فى يو من ج و نخرج **هب** على

(*) در اصل چنین بود .

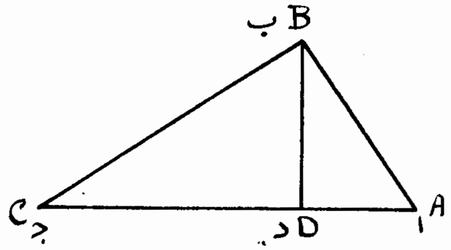
استقامته حتى يقطع الخط المماس على نقطة **ط** و نصل **ره** فلان مثلث **هرط** زاوية **ر** منه قائمة و خرج من زاوية **ر** عمود **رح** الى القاعدة فعلى ما تبين في شكل ح من و يكون نسبة **ه ح** الى **ح ر** كنسبة **ح ر** الى **ح ط** فيكون مربع **ح ر** مساويا لضرب **ه ح** في **ح ط** و لكن مربع **ح ر** مساو لضرب **د ح** في **ح ب** فيكون ضرب **د ح** في **ح ب** مساويا لضرب **ه ح** في **ح ط** فيكون نسبة **ح د** الى **ه ح** كنسبة **ح ط** الى **ح ب** على ما تبين في يو من و فبالتفضيل يكون نسبة **هد** الى **ه ح** كنسبة **بط** الى **ب ح** و قد كانت نسبة **ا ه** الى **ر ح** كنسبة **ه ح** الى **ح ب** فبالتبديلين يكون نسبة **اه** الى **ه ح** كنسبة **ر ح** الى **ح ب** و قد كانت نسبة **د ه** الى **ه ح** كنسبة **بط** الى **ب ح** فيكون نسبة **ر ح** الى **ح ب** كنسبة **ب ط** الى **ح ب** و المقادير التى نسبتها الى شيء واحد بعينه متساوية فانها ايضا متساوية كما تبين في شكل ط من مقالة ه فيكون **ر ح** مساويا **لبط** و **ر ه** مثل **ه ب** فيكون مجموع **هر رح** مساويا لخط **هط** فقد ادى التحليل الى مثلث قائم الزاوية بشرط ان يكون وتر الزاوية القائمة مساويا لاحد الضلعين المحيطين بالزاوية مجموعا الى العمود الخارج منها الى وترها فكلما عملنا مثلثا قائم الزاوية بهذه الصفة امكننا تركيب هذا الشكل على الوجه الهندسي و ان هذه المقدمة اعنى هذا المثلث بهذه الصفة عظيمة المنفعة في امثال هذه الاشكال و له خواص اخرى يذكر بعضها حتى يتفطن الناظر لمنفعتها في اكثر اشباه هذه المسئلة

[۲۰۳۰۱ §] **اقول** ان هذا المثلث لايمكن ان يكون متساوى الساقين لانه لو كان ضلع **ه ر** مثل **رط** لكان **هح** مثل **حط** و لكان العمود مساويا لكل واحد منهما و لكان **ه ط** ضعف العمود و لكان مجموع **هر** والعمود اعظم من الوتر و قد فرضناه مساويا له هذا خلف [۲۰۳۰۲ §] **و اقول** ان **هر** اصغر من **رط** لانه لو كان اعظم منه لكان **ه ح** اعظم من **ح ط** و لكان **ح ر** الذى هو الخط الوسط بين خطى **هح حط** اعظم من **ح ط** و قد فرض **ح ر** مثل **طب** فيكون **طب** اعظم من **طح**

الجزء اعظم من الكل هذا محال فقد تبين ان المثلث على هذه الصفة يكون الضلع الاصغر مع العمود مساويا لضلع الاعظم و ذلك ما اردنا ان نبين

[§ ٢٠٣٠٣] **و من خواصه** ان الضلع الاعظم من الضلعين المحيطين بالزاوية القائمة مساو لمجموع الاصغر مع القطعة التى يفرزها العمود من الوتر من جانب الضلع الاصغر و ليكن مثالنا من الشكل المتقدم اقول ان مجموع **ەز ەح** مساو لضلع **زط** برهانه ان نسبة **ە د** الى **ە ح** كنسبة **طب** الى **ب ح** فبالتركيب يكون نسبة **دح** الى **حە** كنسبة **ط ح** الى **ح ب** و بالتبديل يكون نسبة **دح** الى **ح ط** كنسبة **ەح** الى **ح ب** ولكن نسبة **ەح** الى **ح ب** كنسبة **ە ز** الى **زح** و نسبة **زە** الى **زح** كنسبة **زط** الى **ح ط** لتشابه مثلثى **ەزح زحط** فيكون نسبة **زط** الى **حط** كنسبة **دح** الى **ح ط** فيكون **زط** مساويا **لحد** و **ح د** هو مثل مجموع **ەز زح** مثل **زط** و ذلك ما اردنا ان نبين

[§ ٢٠٣٠٤] **و من بعد ما نقدم هذا** فانا نضع مثلث **ابج** و زاوية **ب** منه قائمة و نخرج من نقطة **ب** عمود **بد** على **اج** و لننزل بالفرض ان ضلع **اب** مع عمود **ب د** جميعا مثل **اج** حتى يؤدى التحليل الى معلوم ثم نركبه حتى يحصل لنا مثلث بالصفة المذكورة و لكن نكون مقتدين بالمتقدمين الافاضل من



اصحاب الصناعة فى تسهيل الطرق الحسية باستعمالهم الفاظ اهل الجبر فى امثال هذه المسائل فنستنهج سبيلهم فى ذلك و ان لم يستعمل الفاظ الجبريين جاز و يكون العمل واحدا الا ان هذه الالفاظ اذا استعملت كان الضرب و القسمة اسهل و نضع

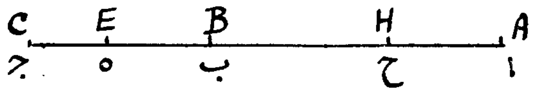
خط **اد** منطقا فی الطول و لیکن عشرة و نضع **بد** شیئا و نضربه فی مثله یکون مالا و نضرب عشرة فی مثلها یکون مائة و نجمعها یکون مائة و مال و هو مربع **اب** کما تبین فی مز من آ و من ان نسبة **اج** الی **اب** کنسبة **اب** الی **اد** لتشابه مثلثی **ابج ابد** یکون ضرب **اج** فی **اد** مساویا لمربع **اب** فاذا قسمنا مربع **اب** الذی هو مائة عدد و مال علی **اد** الذی هو عشرة یخرج من القسمة عشرة عدد و عشر مال و هو **اج** و قد کنا فرضنا ان **اج** مثل مجموع **اب بد** فیکون مجموع **اب بد** عشرة عدد و عشر مال نقصنا منه **بد** الذی هو الشیء یبقی عشرة عدد و عشر مال الا شیء و هو **اب** فنضربه فی مثله یحصل مائة من العدد و ثلثة اموال و عشر عشر مال مال الا عشرین شیئا و الا خمس مکعب یعادل مائة من العدد و مالا فیجبر و یقابل و یقاص یبقی مالان و عشر عشر مال مال یعدل عشرین شیئا و خمس مکعب فیقسم الجمیع علی الشیء لیرجع الی اقل اربعة اجناس علی هذه النسبة فیخرج من القسمة عشر عشر مکعب و شیئان یعدل خمس مال و عشرین من العدد فیکمل عشر عشر مکعب بان یضرب فی مائة و کذلك جمیع الاجناس نضربه فی مائة فیحصل مکعب و مائتا شیی یعدل عشرین مالا و الفین من العدد فقد ادی التحلیل الی معادلة اربعة اجناس و هذا لا یمکن ان یستنبط بالهندسة المسطحة لمکان المکعب و یحتاج فیها الی قطوع المخروطات [§ ٢٠٤٠١] و من قبل ان نخوض فی ابانة مطلوبنا بالقطوع نقدم معنی یکون تحریصا للناظر فی هذه الرسالة علی طلب العلوم و اتقان القدر الذی ننبه علیه و شکرا لنعم الله تعالی علی بعض عباده فان التحدث بالنعم شکر عظیم للمنعم کما انزل و اما بنعمة ربك فحدث فلا یظنن الناظر ان هذا کلام جره الی هذا المقام حب المباهاة فان ذلك من عادات العجزة المتصلفه المعجبه و حق السفلة الاعجاب فان نفوسهم لا تسع الا لتفطن شیء نزر من العلوم فلما ادرکوه ظنوا ان ذلك القدر هوالذی حصر العلوم و جمعها و نعوذ بالله من ان یسوّل لنا انفسنا آراء تتخبطنا و تمنعنا عن درك الحقایق و الفوز و النجاة

[§ ٢٠٤٠٢] **اقول** ان هذا الذی یسمیه الجبریون مال مال امر موهوم فی

المقادير المتصلة ولا وجود لها فى الاعيان بوجه من الوجوه و انما يطلق على المقادير المتصلة لفظة مال المال و مال الكعب و كعب الكعب و ماعدا ها من حيث اطلاق العدد عليها اذا العدد و المقادير يشترك فى جنس الكمية على ما يتولى بيانه صاحب العلم الاعلى فاما الامور التى تستعمله الجبريون و لها وجود فى الاعيان و المقادير المتصلة اربعة العدد و الشيء و المال و المعكب **اما العدد** فهو ان يؤخذ العدد مجردا عن جميع المواد فى العقل ولا يكون له وجود فى الاعيان اذ العدد شيء معقول كلى لايوجد الا متشخصا بالمواد **و اما الشيء** فمنزلته من المقادير المتصلة منزلة الخط المستقيم **و اما المال** فهو بمنزلة المربع المتساوى الاضلاع القائم الزوايا الذى ضلعه ذلك الخط المستقيم المطلق عليه لفظ الشيء **و المكعب** هوالمجسم الذى يحيط به ستة سطوح مربعة و متساوية و متساويةالاضلاع و قائمة الزوايا الذى ضلعه الخط المستقيم المطلق عليه اسم الشيء و احد سطوحه المربع المطلق عليه اسم المال فهو الحاصل من ضرب الشيء فى مثله ثم ضرب المبلغ فى الشيء و قد بين عمله اقليدس و برهن عليه فى يز من مقالة يح من كتابه فى الاصول و اما مال المال الذى هو عند الجبريين حاصل من ضرب المال فى مثله فلا معنى له فى المقادير المتصله لان المربع الذى هو سطح كيف يمكن ان يضرب فى مثله اذ السطح ما له بعدان و بعدان فى بعدين اربعة ابعاد و الجسم لايمكن ان يكون له اكثر من ثلثة ابعاد فجميع الاشياء التى يخرج بالجبر انما يخرج من هذه الاربعة الاجناس و من ظن من الناس ان الجبر حيلة فى استخراج الاعداد المجهولة فقد ظن محالا فلا تلتفت الى الظاهرين المختلفين بل الجبر و المقابلة امور هندسية برهن عليها فى مقالة ب من الاصول فى شكلى ه و ز منه [٢٠٤٠٢٠١§] و اما من قال مال مال و ثلثة اموال يعدل ثمانية و عشرين من العدد فنصف الاموال و ضربه فى مثله و زاده العدد و اخذ جذر المبلغ فكان خمسة و نصف و نقص منه نصف ما لاموال فبقى اربعة و هوالمال و مال المال ستة عشر ثم ظن ان مال المال استنبط بطريق الجبر فهو ضعيف الظن جدا لانه لم يستنبط مال المال بل استنبط

المال فكانه مال و ثلاثة اجذار يعدل ثمانية و عشرين ثم استخرج الجذر بالمقالة الثانية و صادر على ان ذلك الجذر مال مال و هذا سرتطلع منه على اسرار[٢٠٤٠٣§] و نرجع الـى ما كنا فيه **نقول** ان الثلاثة الاجناس الاول اعنى الاعداد و الجذور و الاموال عند المعادلة ترجع الى ست شعب ثلثة مفردة و ثلثة مقترنه و يمكن ان يعلم مجهولاته بالمقالة الثانية على ما هو مذكور مشروح فى كتب الجبريين و اما اذا نظر فى المكعب و عودل بينه و بين سايره احتيج حينئذ الى المجسمات وخاصة المخروطات و قطوعها لكون المكعب مجسما امـا مفرداته فثلاثة **مكعب** يعدل الاموال و هوالجذور يعدل الاعداد **و مكعب** يعدل الجذور و هو اموال يعدل الاعداد **و مكعب** يعدل الاعداد و لا سبيل الى استنباطه الا بالطرق العددية المعدة لاستخراج الكعاب و اما بالطرق الهندسيه التى يعمل فيها مجسم متوازى السطوح مساويا لمجسم آخر متوازى السطوح مفروض و يفتقر فى امثال هذه الاعمال الـى قطوع المخروط باضطرار او الـى آلات عند من لا يعرف المخروطات **واما مقترناته** فهى صنفان اما ثلاثى و اما رباعـى **فالثلاثى مكعب** و اموال يعدل اعدادا ولايخرج الا بالقطوع **و مكعب** و اموال يعدل جذورا و يكون حكمه حكم مال و جذور يعدل اعدادا **و مكعب** و اعداد يعدل جذورا و لا يخرج الا بالقطوع **و مكعب** و اعداد يعدل اموالا و لا يخرج الا بالقطوع **و مكعب** و جذور يعدل اعدادا و لا يخرج الا بالقطوع **و مكعب** و جذور يعدل اموالا و يكون حكمه حكم مال و عدد يعدل جذرا **و اموال** و جذور يعدل مكعبا و يكون حكمه حكم جذور و اعداد يعدل مالا **و اموال** و اعداد يعدل مكعبا و لا يخرج الا بالقطوع **و جذور** و اعداد يعدل مكعبا و لا يخرج الا بالقطوع فهذه تسعة انواع ثلاثية ثلثة منها يخـرج بثانية الاسطقسات و ستة منها لايخرج الا بقطوع المخروط **واما الرباعى مكعب** يعدل اموالا و جذورا و اعدادا **مكعب** و جذور و اعداد يعدل اموالا **مكعب** و اموال و اعداد يعدل جذورا **مكعب** و اموال و جذور يعدل اعدادا **مكعب** و مال يعدل جذورا و اعدادا **مكعب** و جذور يعدل اموالا و اعدادا **مكعب** و اعداد يعدل اموالا و جذورا

فهذه سبعة انواع رباعية لايخرج شيء منها الا بقطوع المخروطات فقد حصل من المركبات ثلثة عشر نوعا لا يخرج الا بقطوع المخروط و نوع من المفردات الا بقطوع المخروط و هو مكعب يعدل اعدادا [٢٠٤٠٤§] و اما المتقدمون الرياضيون من غير اهل لساننا فلم ينبهوا على شيء من هذا ولم يصل الينا ولم ينقل الى لساننا و اما المتأخرون من اهل لساننا فاول من اضطر الى صنف ثلاثى من هذه الاصناف الاربعة عشر هو الماهانى المهندس فانه كان بحل المقدمة التى اخذ ها ارشميدس مسلمة فى شكل دً من مقالة بً من كتاب الكرة و الا سطوانة و هى هذا الذى ذكره **قال ارشميدس** ان خطى **اب** **بج** معلوما القدر و متصلان على استقامة و نسبة **بج** الى **به** معلومة فيكون **جه** معلوما على ما تبين فى المعطيات ثم قال و نجعل نسبة **حج** الى **جه** كنسبة مربع **اب** الى مربع **اح** ولم يقل كيف نعلم هذا لان هذا محتاج الى قطوع المخروط باضطرار ولم يورد فى الكتاب شيئا مبنيا على

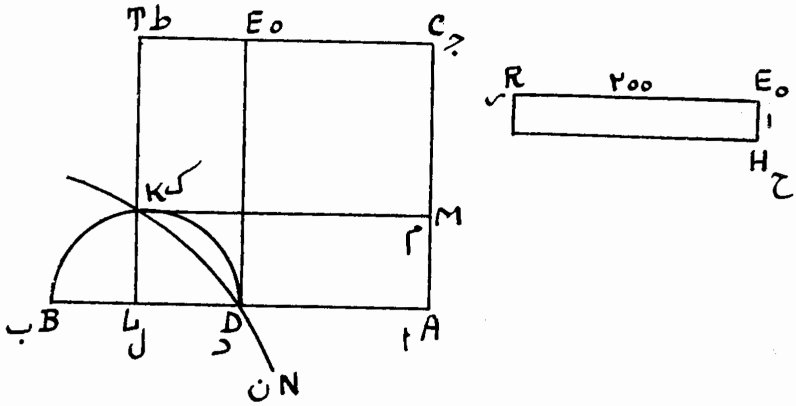


القطوع الا هذا فاخذ هذا ايضا مسلما و الشكل الرابع هو فى قسمة الكرة بسطح مستو على نسبة معلومة وكان الماهانى يستعمل الفاظ الجبريين للتسهيل فلما ادى التحليل الى اعداد و اموال وكعاب متعادلة ولم يمكنه ان يستخرجه بقطوع المخروطات جزم القول بان هذا ممتنع فهذا الفاضل مع فضله و تقدمه فى هذه الصناعة استبهم عليه حل صنف من هذه الاصناف حتى نبغ ابوجعفر الخازن وتنبه على طريقة و اتى به فى رسالة و ابونصر بن عراق مولى اميرالمؤمنين من اهل خوارزمكان بحل المقدمة التى اخذها ارشميدس فىاستخراج ضلع المسبع فىالدايرة و هى المربع بتلك الصفة المذكورة وكان يستعمل الفاظ الجبريين فادى التحليل الى مكعب و اموال يعدل اعدادا فاستخرجه بالقطوع و هذا الرجل لعمرى كان من معالى الطبقة فى الرياضيات و المسئلة التى اعجزت ابا سهل الكوهى و ابا الوفاء

البوزجانى و ابا حامد الصغانى و جماعة من اصحابهم الذين كانوا منقطعين الى جناب عضدالدوله بمدينة السلم هى هذه عشرة قسمتها قسمين فكان مجموع مربعيهما مع الخارج من قسمة الكثير على القليل اثنين و سبعين عددا و كان يؤدى التحليل الى اموال يعدل مكعبا و جذورا و اعدادا و هولاء الافاضل كانوا متحيرين فى هذه المسئلة مدة مديدة حتى استخرجها ابوالجود و خزنوها فى دارالكتب الملوك السامانية فهذه ثلثة اصناف اثنان منها ثلاثيان و واحد رباعى من المركبات و المفردة الواحدة اعنى المكعب الذى يعدل الاعداد فانها قد استخرجها من تقدمنا من الافاضل و لم يصل الينا منهم كلام فى العشر البواقى ولا فى هذا التفصيل فان تراحت المدة و صحبنى التوفيق اودعت هذه الاصناف الاربعة عشر بجميع شعبها و فروعها و تمييز الممكن منها من الممتنع فان بعض اصنافه مفتقر الى شرايط حتى يصح رسالة شاملة على عدة مقدمات لها عظيمة المنفعة فى اصول هذه الصناعة معتصما بحبل التوفيق من الله و متوكلا عليه انه المستعان على جميع الامور و به الحول و القوة جلت عظمته

[§ ٢٠٥] و نرجع الى مسئلتنا هذه بعد تمهيد هذه المقدمات و هى طلب مكعب يكون مع مائتين ضلعه عديلا لعشرين مربع ضلعه مع الفين من العدد نضع خط **اب** مساويا لعدد المربعات و هو عشرون و خط **هر** مائتان و خط **هح** واحدا فيكون سطح **حر** مائتين و نجعل مربعا مساويا لسطح **حر** على ما تبين فى شكل يد من مقالة ب و ليكن ضلع ذلك المربع مثل **اج** و **اج** عمود على **اب** و هو جذر مائتين و **اد** هو خارج القسمة اذا قسم العدد على عدد الجذور و هو عشرة لان العدد الفان و عدد الجذور مائتان و اذا قسم الالفان على مائتين يخرج عشرة و **دب** ايضا عشرة و نعمل على **دب** نصف دايرة **دكب** و نخرج **ده** يوازى **اج** و نتمم سطح **اه** و نعمل قطعا زايدا يمر على نقطه **د** و لا يلقى خطى **اج جه** كما بينه ابلونيوس الفاضل فى الشكل نط من المقالة الاولى من كتاب المخروطات و الشكل ه و و من المقالة الثانية من ذلك الكتاب اذ هذا العمل لا يتم الا بهذه الاشكال الثلثة و هو قطع **ندك** و يقطع الدايرة على نقطه **ك** و نخرج من نقطة **ك** عمود **كل** على **اب** فاقول ان ضلع **ال** هو

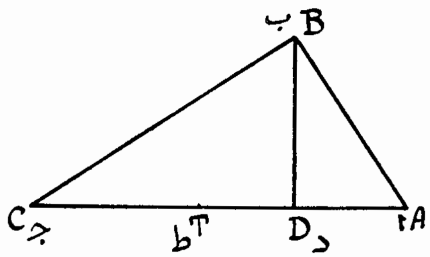
ضلع مكعب يكون مع مائتى ضلعه عديلا لعشرين مربع **ال** مع الفين من العدد برهانه انا نخرج **لك** على استقامة حتى يقطع خط **جه** على نقطة **ط** و نخرج **كم** يوازى **ال** فلان **كط** يوازى **ده** و **كم** يوازى **اد** يكون سطح **اه** القائم الزوايا مساويا لسطح **كج** القائم الزوايا لان نقطتى **ك د** على محيط قطع زايد لا يلقاه خطا **اج جط** و قد



خرج من كل واحدة منها خطان الى الخطين اللذين لا يلقيان موازيين لنظيريهما الخارجين من النقطة الاخرى و قد برهن عليه ابلونيوس الفاضل فى شكل دٓ من مقالة بٓ من كتاب المخروطات و دايره **دكب** معلومة الوضع لان قطرها الذى هو **دب** معلوم الوضع و القدر و خطا **اج جط** معلوما الوضع و نقطة **د** معلومة الوضع فيكون قطع **ندك** معلوم الوضع و دايرة **دكب** معلومة الوضع فيكون نقطة **ك** معلومة الوضع و خط **كل** يكون معلوم الوضع فيكون نقطة **ل** معلومة الوضع و نقطة **ا** معلومة الوضع فيكون خط **ال** معلوم القدر و هذه اشياء ظاهرة من كتاب المعطيات و قد بينا ان سطح **اه** مثل سطح **كج** فيلقى **هم** المشترك يبقى سطح **دم** مثل سطح **كه** و نجعل سطح **دك** مشتركا فيكون سطح **اك** مساويا لسطح **دط** و هما متساويا الزوايا لان زواياهم قوائم فيكون اضلاعهما متكافية فى النسبة كما بينه اقليدس فى الشكل يدٓ من مقالة وٓ يكون نسبة **ال** الى **لط** كنسبة **دل** الى **لك** فيكون مربعاتها ايضا متناسبة و نسبة مربع **ال** الى مربع **لط** كنسبة مربع **دل** الى مربع **لك** و نسبة **دل**

الی **لك** كنسبة **لك** الی **لب** فيكون نسبة مربع **دل** الی مربع **لك** كنسبة **دل** الی **لب** فيلزم ان يكون نسبة مربع **ال** الی مربع **لط** كنسبة **دل** الی **لب** فيكون ضرب مربع **ال** فی خط **لب** مساويا لضرب مربع **لط** فی خط **دل** و نجعل ضرب مربع **لط** فی **اد** مشتركا فيكون ضرب مربع **لط** فی **ال** مساويا لضرب مربع **لط** فی **اد** و ضرب مربع **ال** فی **لب** لكن مربع **لط** هو مثل عدد الاضلاع اعنی مائتين و **ال** هو ضلع المكعب فيكون مائتا ضلع المكعب مساويا لضرب مربع **لط** فی **اد** و ضرب مربع **ال** فی **لب** و ضرب مربع **لط** فی **اد** مساويا للعدد كما قدمنا و هو الفان فيكون الفان من العدد و ضرب مربع **ال** فی **لب** مساويا لمائتی ضلع المكعب و نجعل مكعب **ال** الذی هو ضرب مربع **ال** فی **ال** مشتركا فيكون مكعب **ال** [مع مائتين **ال**] مساويا لالفين من العدد مع ضرب مربع **ال** فی **ال** و ضرب مربع **ال** فی **لب** و ضرب مربع **ال** فی **ال** مع ضرب مربع **ال** فی **لب** هو مساويا لضرب مربع **ال** فی **اب** و **اب** قد فرضناه عشرين فضرب مربع **ال** فی **اب** هو عشرين مربع **ال** فيكون مكعب **ال** مع مائتين خط **ال** مساويا لالفين من العدد مع عشرين مربع ضلع المكعب و ذلك ما اردنا ان نبين

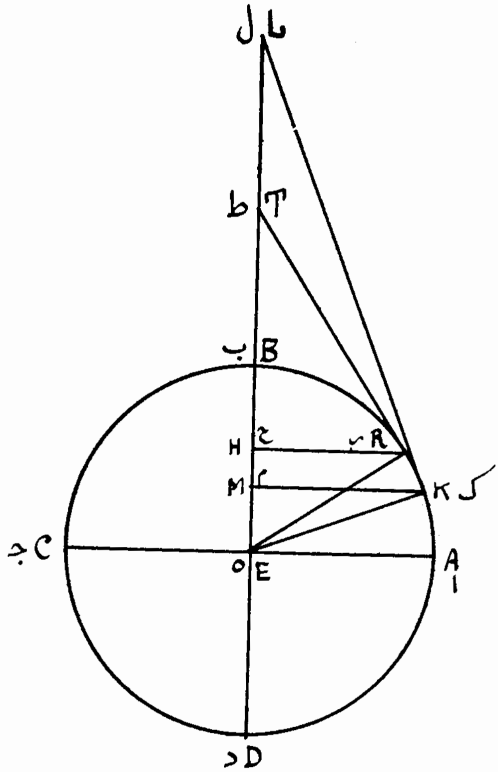
[۲۰۵۰۱ §] و من بعد ما تقدم هذا فانا نعيد مثلث **ابج** و نضع **اد** منطقا و هو عشرة يكون **دب** هو خط **ال** الذی برهنا علی انه معلوم القدر و لست اعنی بقولی معلوم القدر انه معلوم الكمية فان بينهما فرق بل اعنی بقولی معلوم القدر ما عنی به اقليدس فی كتاب المعطيات و هو الذی يمكن ان يوجد مقدار مساو له وبالتركيب



نضع خط **اد** عشره و نضع **بد** قائما علی خط **اد** علی زوايا قائمه و مساويا لخط **ال**

من الشكل المتقدم و نصل **اب** و نقيم على نقطة **ب** عمـود **بج** و نخرج **اد** على استقامته حتى يقطع العمـود على نقطة **ج** فباضطرار يجب ان يكـون مثلث **ابج** قائم الزاوية اعنى زاوية **ب** منه قائمة و يكون خط **اب** مع عمود **بد** مساويا لوتر **اج** و خط **اب** مع خط **اد** مساويا لخط **بج** و ذلك ما اردنا ان نبين

[§ ٢٠٦] و نعيـد ربع دايرة **اب** من دايرة **اب جد** و نخرج فيها قطرى **اج بد** يتقاطعان على زوايا قائمة و مركزالدايرة نقطة **ه** و نفصل من خط **جد** مثلث **اب ج** فى الشكل المتقدم خط **جط** مساويا لعمـود **بد** و نقسم نصف قطر الدايرة الذى هو خط **هب** من هذا الشكل على نسبة **اد** الى **دط** من مثلث **ابج** المتقدم كما



بينه اقليدس فى شكل يجـ من مقاله و على نقطة ح و نخرج عمود حر و نصل هر و

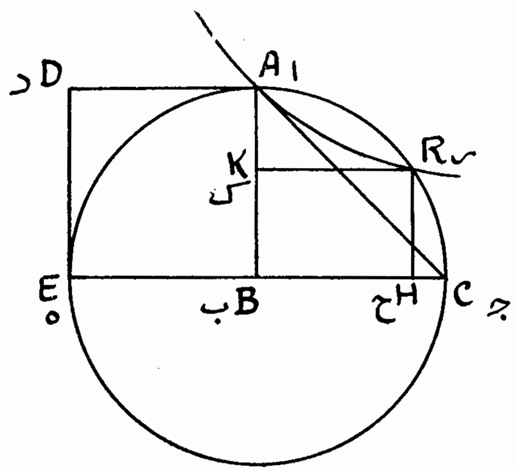
نخرج من نقطة ر خطا یماس الدایرة و هو خط رط و نخرج هب علی استقامة الی ان یقطع خط رط علی نقطة ط فیکون مثلث هرط شبیها بمثلث ابج من الشکل المتقدم برهانه ان زاویة رهح مساویة لزاویة باج فان لم یکن فلیکن احدیهما اعظم مثل باج فنقیم علی نقطة ه من خط هب زاویة مثل زاویة باج و هی كهب و نخرج من نقطة ك خطا یماس الدایرة و هو كل یقطع هط علی نقطة ل فیکون مثلث هكل شبیها بمثلث ابج لان زوایاهما متساویة و نخرج من نقطة ك عمود كم علی هب فیکون هك كم جمیعا مساویا لخط هل و هب مثل هك یکون بل مثل كم و نسبة لم الی كم کنسبة جد الی دب فیکون نسبة مل الی لب کنسبة دج الی بد و بالتفضیل یکون نسبة كم الی بل کنسبة دط الی طج و نسبة طج الذی هو مثل دب الی دا کنسبة بل الذی هو مثل كم الی مه ففی نسبة المساواة یکون نسبة هم الی مب کنسبة اد الی دط و قد کنا جعلنا نسبة هح الی حب کنسبة اد الی دط فیکون نسبة هم الی مب کنسبة هح الی حب و هم الاول اصغر من هح الثالث یلزم ان یکون مب الثانی اصغر من حب الرابع علی ما تبین فی خامسةالاصول فی شکل ید منها الا انه اعظم هذا محال فلیست زاویة رهح باصغر من زاویة باج من مثلث ابج المتقدم و لا اکبرمنها فیکون مثلث رهط شبیها بمثلث ابج المتقدم فیکون هر رح جمیعا مثل هط فیکون بط مثل رح و ضرب دح فی حب مثل مربع حر و کذلك ضرب هح فی حط مساویا لمربع حر فیکون ضرب دح فی حب مثل ضرب هح فی حط فیکون الخطوط الاربعة متناسبة علی تبین فی شکل یو من مقالة و فنسبة دح الاول الی حه الثانی کنسبة حط الثالث الی حب الرابع و بالتفضیل یکون نسبة ده الی هح کنسبة بط الی ب ح و ده مثل اه و بط مثل رح فیکون نسبة اه الی هح کنسبة رح الی ح ب و بالتبدیل یکون نسبة اه الی رح کنسبة هح الی ح ب فقد قسمنا ربع دایرة بقسمین علی نقطه ر و اخرجنا منها عمود رح حتی صارت نسبة اه الذی هو نصف القطر الی رح کنسبة هح الی ح ب و ذلك ما اردنا ان نبین

[§٢٠٧] و من اراد ان يعلم بالحساب فلا سبيل اليه اذا حاول التحقيق فان الاشياء التى يستخرج بقطوع المخروطات لايمكن فيها ان يحلل الى الحساب و ان قنع بالتخمين فعليه بجداول الاوتار من كتاب المجسطى او جداول الجيوب و السهام من زيج معتمد و يطلب فيه قوسا يكون نسبة ستين الذى هو نصف قطر الدايرة فرضا الى جيبها كنسبة حبيب تمامها الى سهمها و نجد ذلك القوس قريبة من نز درجة بالاجزاء التى بها الدايرة شس و جيبها قريب من ن جزوا و سهمها قريب من كز جزوا و ثلث جزء و جيب تمامها قريب من اثنين و ثلثين جزوا و ثلثى جزوا و يمكن ان يبالغ فى التدقيق حتى يقل التفاوت بحيث لا يحس فهذا هو الذى سنح فى هذا المعنى مع تقسم الفكر و توزع الخاطر و افتتان الاشغال العاتية عن امثال هذه الجزئيات ولولا شرف المجلس دام شرفه و حق السائل ادام الله تأييده لكنت عنها فى منحرف واسع اذ عنايتى مقصورة على ما هو اهم من امثال هذه عندى و همتى مصروفة اليه و الله تعالى المحمود و المشكور على كل حال و المأمول منه ان يوفق للخيرات انه ولى الاجابة ـ تمت الرسالة و الصلوة على خاتم الرسالة

مسئلة

ربع دايرة **اج** مفروض على مركز **ب** و نريد ان نقسم **اب** بقسمين كما قد عرفته

فانا نعمل على **اب** مربعا متساوى الاضلاع و الزوايا و هو **اه** فيكون خطا **به** **هد** معلومى الوضع و نقطة **ا** معلومة الوضع فنعمل على نقطة **ا** قطعاً زايدا لا يلقاه خطا **به** **هد** و هو قطع **اد** فيكون معلوم الوضع و نصل **اج** فهو لا محالة



يكون مماسا للقطع و هو فى داخل الدايرة فيلزم ان يقطع القطع الزايد الدايرة فليقطعها على نقطه **ر** و نخرج عمودى **رح** **رك** فاقول قد تم العمل برهانه ان نقطتى **ا** **ر** على محيط القطع و قد اخرج من كل واحد منها خطان الى القطع موازيان للآخرين فيكون سطح **ره** مساويا لسطح **اه** و نلقى **كه** المشترك يبقى **كح** مثل **كد** و هما سطحان متساويا الزوايا فيكون اضلاعهما متكافيه نسبة **اد** الى **كر** كنسبة **بك** الى **كا** تمت ✡

(✡) در اصل شكل نداشت . رجوع كنيد به آخر قسمت ششم .

قسمت سوم

نظر اجمالی به

تاریخ علم جبر

از ایام قدیم تا زمان خیام

قسمت سوم

نظر اجمالی به تاریخ علم جبر از ایام قدیم تا زمان خیام

۳۰۱ - § ملاحظات کلی و مقدماتی

۳۰۱۰۱ § مقدّمه - در دیباچه‌ی کتاب گفتیم که برای دریافتن ارزش کارهای جبری خیّام باید لااقلّ اجمالا نظری به تاریخ بسط علم جبر و مبانی و مقدّمات آن افکند. همین مطلب در این قسمت به خوانندگان عرضه می‌شود.

تاریخچه‌ای که در این قسمت می‌آید، آنچه خارج از دوره‌ی نهضت علمی اسلامی است، تقریباً محدود است به سرزمینهائی که دانش آنها مستقیماً در بسط علوم ریاضی و خاصّه علم جبر درین دوره مؤثّر بوده است، و آن در درجه‌ی اوّل یونان و بعد هند می‌باشد. پس، اگر در صفحات آتیه از مصر قدیم و چین و غیره سخنی بمیان آید بیش از مطالب دیگر مجمل خواهد بود، و ذکر آنها فقط به منظور توطئه‌ی زمینه‌ی نسبةً جامعی است و بس.

۳۰۱۰۲ § ادوار جبر - در بحث از پیدایش جبر و بسط آن باید قبلا دانست که مقصود از علم جبر چیست، چه اگر این علم بمعنائی که حالیّه در ذهن ما است (✡) و استعمال حروف و علامات جزء لاینفك آن می‌باشد گرفته شود، باید تاریخ پیدایش آنرا قرن هفدهم میلادی شمرد. از طرف دیگر اگر «نوعی» استعمال علامات را ملاك قرار دهیم باید پیدایش جبر را در قرن سوّم میلادی در زمان دیوفانتوس (۳۰۲۰۲ §) دانست. امّا اگر حلّ مسائل هندسی را که از نظر جبری به حلّ معادلات باز می‌گردد جزء جبر بشماریم، باید گفت که این علم در زمان فیثاغوریان موجود بوده و شاید در حوزه‌ی فیثاغورس پیدایش یافته است (۳۰۲۰۱ §). بالاخره، اگر هر مسئله‌ای که

(✡) جبر مقدّماتی کنونی را مجملاً میتوان علم به خواصّ اعداد وروابط آنها بوسیله‌ی علامات وبه کومك قواعد عمومی محاسبه تعریف کرد.

امروز به وسایل جبری حل می‌شود ـ قطع نظراز طریق حلّ آن ، که ممکن است صِرفِ حدس و امتحان کمابیش اصولی و علمی باشد ـ جزء جبر بحساب آید ، باید گفت که جبر درحدود ۲۰۰۰ سال قبل‌از میلاد وشاید پیش از آن پیدایش‌یافته است .

یکی از محقّقین تاریخ جبر را به سه دوره تقسیم کرده است ✪ . اوّل دوره‌ی **لفظی** ، که درآن طرح و حلّ مسائل صرفاً بوسیله‌ی الفاظ زبانهای عرفی و بکلّی عاری از هر نوع تلخیص یا استعمال علامات انجام می‌گرفته است . دوّم دوره‌ی **تلخیص** ، که در آن در مواردی ، برای اختصار ، قسمتهائی از کلمات را می‌انداختند . سوّم دوره‌ی **علامتی** ، که درآن استعمال حروف وعلامات پیدایش و رواج یافت . اگرچه حدّ فاصلی بین‌این ادوارنیست ، و مثلا در بعضی‌آثارقدیم هرسه جنبه مشهود است ، تقسیم مذکور در بحث از تاریخ جبر خالی از فایده نیست .

۳۰۱۰۳§ تألیفات جبری قدیم ـ موضوع تألیفات جبری دانشمندان قدیم نیز جالب و در تاریخ ریاضیّات حائز اهمیّت و درعین حال درخور تأمّل است . زیرا ، ازعلمای یونان (خاصه دانشمندان حوزه‌ی اسکندریّه) که بگذریم ، دانشمندان قدیم مباحث مختلف و متنوّعی از ریاضیّات را در آثار خود می‌گنجانیده‌اند ، خاصه آنکه در ایّام قدیم جبر بعنوان علمی مستقلّ مورد نظر نبوده بلکه وسیله‌ی جوابگوئی به معمّاهای عددی یا ، مانند سایر شعب ریاضیّات ، آلتی برای حلّ مسائل عملی شمرده می‌شده و حتّی اسم خاصّی نداشته است . بنابراین ، اگر در بحث از تاریخ جبر مثلا صحبت از آثار نجومی بمیان‌آید ، نباید این امر را خارج شدن از موضوع تلقّی کرد ، بلکه ورود آنها در بحث ازین جهت است که بسیاری از کتابهای نجومی مشتمل بر فصولی در حساب و هندسه و جبر بوده است .

بر طبق اطّلاعات کنونی ، اوّلین کتابی که صرفا به جبر پرداخته از ریاضیدان بزرگ یونانی دیوفانتوس (اواسط قرن سوّم میلادی) است (۳۰۲۰۲§) ، ولی

(✪) سمیث ، تاریخ ، جلد ۲ ، ص ۳۷۹ .

یونانیان تمام مطالب مربوط به خواصّ اعداد را تحت عنوان **آریثْمِتیکه** * می‌آوردند، که می‌توان آنرا **علم حساب** (در مقابل محاسبه) نامید، و باین جهت، مسائل جبری در نزد آنان جزئی از **آریثمتیکه** بوده، و عنوان مستقلّی نداشته، و کتاب جبر دیوفانتوس هم همین عنوان را داشته است.

تا حدی که اطّلاع داریم، اوّل کسی که کتابی به اسم «جبر و مقابله» نوشته محمّد ابن موسی خوارزمی است (§۳۰٤۰٤).

۳۰۱۰۴ § جبر در مصر و چین قدیم ـ قدیمترین اثری در جبر که به ما رسیده از یك ریاضیدان مصری بنام **آحْمِسْ** است که در حدود ۱٥٥٠ یا ۱٦٥٠ قم یا پیش از آن می‌زیسته، و از وی پاپیروسی بجا مانده که تألیف اوست یا آنرا از نسخ قدیمتری استنساخ کرده است.

پاپیروس آحمس، که فعلا در موزه‌ی بریتانیائی است، در حکم کتابی است در ریاضیّات عملی، و مشتمل است بر حساب مساحات، مسائلی که حلّ آنها به معادلات درجه‌ی اوّل باز می‌گردد *، و مسائل مقدّماتی در باب سلسله ها. طرح مسائل عموماً در مرحله‌ی لفظی است (§۳۰۱۰۲)، ولی آحمس عده‌ی قلیلی علامات نیز بکار برده است. حلّ معادلات بوسیله‌ی «امتحان و تصحیح» بعمل می‌آید. مثلا برای حلّ معادله‌ی $x + x/۷ = ۱۹$، آحمس عدد ۷ را امتحان می کند. چون در طرف اوّل معادله بجای x این عدد را قرار دهیم حاصل مساوی هشت می‌شود. سپس آحمس با چند «تصحیح» و «امتحان» معلوم میکند که عدد هفت را در چه عددی باید ضرب کرد تا حاصل، بجای ۸، مساوی ۱۹ گردد.

علاوه بر پاپیروس آحمس، پاپیروسهای دیگری حاکی از اطّلاعات ریاضی مصریان قدیم بدست آمده که متضمّن مسائلی است که به معادلات درجات اوّل و دوّم

(*) از لغت یونانی **آریثْموس**، بمعنی عدد. همین لفظ است که در ترجمه‌ی کتابهای یونانی به عربی بصورت **اَرِثْماطیقی** درآمده است.

* مانند مسئله‌ای که با علامات امروزی به معادله‌ی $x + x/۷ = ۱۹$ باز می گردد.

بر می گردد .

چینیها نیز ظاهراً در هزار سال قبل از میلاد نوعی جبر لفظی داشته‌اند ، و در قرن اوّل میلادی حلّ معادلات درجه‌ی دوّم را می‌دانسته‌اند .

۳۰۲§ - جبر در یونان

۳۰۲۰۱§ - اطّلاع یونانیان از جبر قبل از زمان دیوفانتوس (اواسط قرن سوّم میلادی) در خور تأمّل است ، زیرا آنچه را « جبر هندسی » یونانیان می‌خوانند حلّ هندسی بعضی مسائل هندسی است کـه حلّ جبری آنها به معادلات درجه‌ی دوّم باز می گردد (٭) ، و آنهم صرفاً جنبه‌ی لفظی داشته است .

بقول بعضی محقّقین ، مبنای جبر هندسی یونانیان از **فیثاغورس** (٭٭) یـا از فیثاغوریان است ، و مسئله‌ی اضافه کردن سطحی برخطّی (۳۰۲۰۳۰۱§) ، که از نظر جبری به حلّ معادله‌ی درجه‌ی دوّم باز میگردد ، در حوزه‌ی علمی فیثاغوری پرداخته

(٭) از قبیل مسئله‌ی تقسیم خط به نسبت ذات وسط و طرفین و مسئله اضافه کردن سطحی برخطی (۳۰۲۰۳۰۱§)

توضیحات مقتبس از ویکه که در ۳۰۷۰۲ § آورده‌ایم تا حـدّی کیفیّت این جبر هنـدسی یونانیان را روشن می‌سازد .

(٭٭) ریاضیدان و فیلسوف بزرگ یونانی ، که درحدود ۵۷۲ ق‌م احتمالاً در جزیره‌ی ساموس از جزایر دریای اژه (بحرالجزایر)متولّد شده و در ۵۳۲ برآمده و در ۴۹۷ یا ۴۹۶ ق م و بقولی در حدود ۵۰۱ ق م وفات یافته است .

گویند فیثاغورس به مصر و ایران و هندوستان مسافرت کرده ، و پس از بازگشت ، در شهر کروتونا در ایتالیای جنوبی جمعیتی سرّی تأسیس کرد که بکوشش وی وفیثاغوریان ، یعنی‌پیروان او ، از حوزه‌های علمی معتبر قدیم گردید ، و تا نیمه‌ی دوم قرن چهارم ق‌م دوام داشت . فیثاغورس عدد را اصل وجود می‌دانست ، وهمین فلسفه‌ی وی ازیك طرف منجر به پیدایش اعتقاد به‌خواص‌غریبه برای اعداد و از طرف دیگر منجر به **تحقیق کمی** درطبیعت شد .

کشف بسیاری‌ازقضایای هندسی منسوب به‌حوزه‌ی علمی فیثاغوری است، ولی‌تفکیك‌اکتشافات شخصی فیثاغورس ازآثار پیروان‌اوممکن‌نیست. گویند مفهوم کمیات اصمّ را اوّل‌بارفیثاغوریان‌پرداختند.

شده ، و نیز گویند **بقراط خیوسی** * ، فیلسوف فیثاغوری و ریاضیدان بزرگ یونانی، مسئله‌ی تضعیف مکعّب (۳۰۷۰۱ §) را به مسئله‌ی درج دو واسطه‌ی متناسب بین دو طول مفروض (۳۰۷۰۱ §) بر گردانید ، و طریقی برای حلّ همین مسئله به **افلاطون** (حدود ۴۲۸–۳۴۸ یا ۳۴۷ ق م) منسوب است .

همچنین ، **اِئودوکسوس کنیدوسی** **(حدود ۴۰۸ – حدود ۳۵۵ ق‌م) ، یکی از بزرگترین ریاضیّون جهان ، علاوه بر تحقیقات گرانبهای دیگر که از موضوع بحث ما خارج است ، مسئله‌ی تقسیم خط را به نسبت ذات وسط و طرفین تنقیح و تکمیل کرده است . از شاگردان وی **مِنایِخْمُوس** † (نیمه‌ی قرن چهارم ق م) است که گویند قطوع مخروطی را کشف و مسئله‌ی تضعیف مکعّب (۳۰۷۰۱ §) را بوسیله‌ی آنها حلّ کرده است .

اوّلین ومعروفترین کتابی که درآن دانش ریاضی یونانیان به صورت علمی تنظیم و عرضه شده از **اقلیدس** †† ، ریاضیدان بزرگ حوزه‌ی علمی اسکندریّه است . این کتاب که به **کتاب اصول هندسه** (یا ، بالاختصار ، **اصول**) معروفست ، و تا زمان حاضر مبنای تعلیم هندسه‌ی مقدّماتی است ، اساس کارهای ریاضی دانشمندان دوره‌ی اسلامی بوده است ، و مثلا در رساله‌ی خیّام در جبر پیوسته اشاره به **کتاب اصول** و کتاب دیگر اقلیدس بنام **مُعْطیات** میشود ، و ما از این دو کتاب بعداً با تفصیل بیشتری یاد خواهیم کرد (۳۰۲۰۳۰۱-۳۰۲۰۳۰۲ §§) . هر دو کتاب متضمّن حلّ هندسی مسائلی است که از نظر جبری به معادلات درجه‌ی دوّم باز می گردد .

(*) Hippocrates . با بقراط طبیب که اهل کوس بوده و در حدود ۴۶۵ قم متولّد شده اشتباه نشود . بقراط خیوسی منسوب است به جزیره‌ی خیوس از جزایر دریای اژه . و درحدود ۴۵۵ تا ۴۳۵ قم در آتن رونق داشته است .

(**) Eudoxos . وی منسوبست به شهرقدیم کنیدوس درناحیه‌ی کاریا (آسیای صغیر) .

(†) Menaechmos

(††) از زندگی او اطّلاع درستی نداریم . همین قدر می دانیم که در حدود ۳۰۰ قم ، در زمان سلطنت (۳۲۳ ـ ۲۸۵ ق م) بطلمیوس I ، در اسکندریّه رونق داشته است .

بعضی معتقدند که پس از اقلیدس تحوّلی از طریق هندسی به طریق تحلیلی در جبر آغاز شده ، و احتمال میدهند که **هِرون اِسکَندَرانی** * (حدود نیمه‌ی قرن اوّل میلادی) در حلّ مسئله‌ای از درجه‌ی دوّم طریقه‌ی تحلیلی بکار برده است .

در هرحال ، از زمان دیوفانتوس (۳۰۲۰۲§) است که جبر از مرحله‌ی لفظی هندسی خارج میشود ، و تا حدّی صورت علامتی میگیرد . از این زمان ببعد پیشرفت جبر در یونان متوقّف میگردد .

این بود خلاصه‌ای ازسیرجبردر یونان ، و بقیّه‌ی مطالب مذکور در ۳۰۲۰۲§§ ـ ۳۰۲۰۳۰۳ و نیز مندرجات ۳۰۷۰۲ ـ ۳۰۶۰۱ §§ را میتوان متمّم این ملاحظات اجمالی تلقّی کرد .

۳۰۲۰۲ § دیوفانتوس† ـ دیوفانتوس از بزرگترین ریاضیّون حوزه‌ی اسکندریّه است ، و ظاهراً در اواسط قرن سوّم میلادی برآمده است .

چنانکه اشاره کردیم ، زمان دیوفانتوس را میتوان آغاز خارج شدن جبر از تحت تبعیّت هندسه و از مرحله‌ی لفظی صرف شمرد .

مهمترین آثار دیوفانتوس کتابی است بنام **علم حساب** (۳۰۱۰۳§) که اصلا در سیزده مقاله بوده ، ولی فقط شش مقاله‌ی آن در دست است ، و ظاهراً از ترجمه های عربی موجودِ کتاب اطّلاعاتی درباره‌ی قسمتهای مفقودآن بدست نیامده ، و قدیمترین نسخ یونانی آن که در دست است نسخه‌ی کتابخانه‌ی سلطنتی مادرید میباشد که از قرن سیزدهم یا چهاردهم میلادی یعنی بیش از هزار سال پس از تألیف اصل کتاب است ، و در بحث از تحقیقات جبری این دانشمند یونانی و قضاوت درآنها باید در دست نبودن

(*) همان کس است که در مآخذ اسلامی نامش ایرون اسکندرانی ضبط شده است .

(†) Diophanthos . در مآخذ اسلامی دیوفنطس و ذیوفنطس .

برای اطلاعات مشروح در باب زمان دیوفانتوس و آثار وی رجوع شود به مقدّمه‌ی مفصّل (۹۱ صفحه) پول ور اك (Paul Ver Eecke) در کتاب او بنام **دیوفانت اسکندرانی** (چاپ جدید ، پاریس ، ۱۹۵۹) . این کتاب مشتمل بر ترجمه‌ی فرانسوی شش مقاله‌ی **کتاب حساب** دیوفانتوس و کتاب او در اعداد کثیرالاضلاعی نیز میباشد .

نسخه‌ای قدیمی از اثر وی را در نظر داشت.

کتاب دیوفانتوس در علم حساب مجموعه‌ی کمابیش متشتّتی است از مسائل عددی که بعضی به معادلات درجه‌ی اوّل یك مجهولی تادستگاههای چهار مجهولی و برخی به معادلات درجه ی دوّم بر می‌گردد *، ولی اکثر مسائل آن به معادلات سیّال (§ ۳۰۶۰۹) از درجات دوّم تا چهارم باز می‌گردد**، و دانشمند یونانی در مورد معادلات درجه ی اوّل جوابهای مُنطق را می دهد، و در معادلات دسته‌ی اخیر، حتّی وقتی معادله دو جواب مثبت دارد، فقط یکی را اختیار می کند، و اگر معادله جواب مثبت نداشته باشد آنرا ممتنع می شمارد. باید دانست که دیوفانتوس مسائل مورد بحث را طوری ساخته است که جوابهای مثبت دارند، و بعلاوه وی طریق کلّی برای حلّ این معادلات نمی آورد، بلکه هر معادله را به طریق خاصی حل می کند.

دیوفانتوس اوّل کسی است که در راه وضع یك سلسله علامات در جبر قدم برداشته است، ولی چون نسخه‌ی معتبری از کتاب جبر او در دست نیست، در باب علاماتی که بکار برده نمی‌توان نظر قطعی اظهار کرد. در هر حال، باتوجّه به جهاتی که ذکر شد، دیوفانتوس را اغلب پدر علم جبر می‌خوانند.

کتاب دیوفانتوس را قسطا ابن لوقا البعلبکی (§ ۳۰٤۰۳) بزبان عربی ترجمه نموده و ابوالوفای بوزجانی (§ ۳۰٤۰٥۰۳) آنرا تفسیر کرده و کرخی (§ ۳۰٤۰٥۰۷) فایده‌ی فراوان ازآن برده است. نیز رجوع کنید به §§ ۳۰۶۰۲ - ۳۰۶۰٤ و § ۳۰۶۰۹.

۳۰۲۰۳ § معرّفی چند کتاب - از دانشمندان یونانی چند تن هستند که

(*) یکی از آنها (مسئله‌ی هفدهم مقاله‌ی ششم) بحل معادله $x^{2} + x = 4x^{2} + 4x$ برمیگردد که دیوفانتوس جواب آنرا $x = 4$ می‌دهد، بدون آنکه طریق حل را ذکر کند. احتمالا این جواب را به حدس یافته است. رجوع شود به کتاب سابق‌الذکر پول ور اك (صص ۲٦٥ - ۲٦٦).

(**) بهمین جهت، معادلات سیّال را اغلب معادلات دیوفانتی می‌خوانند.

آثارشان ازهمان اوایل رونق گرفتن حوزه‌ی علمی‌بغداد به عربی ترجمه شد ، ومبنای کارهای ریاضیّون دوره‌ی اسلامی قرار گرفت .

معروفترین این دانشمندان یکی **اقلیدس** (رونقش درحدود ۳۰۰ ق م) است که در ۳۰۲۰۱§ از او اسم بردیم . دیگر **ارشمیدس** (۲۸۷ - ۲۱۲ ق م) است که بزرگترین ریاضیّون وفیزیکدانان ومهندسین قدیم است ، ودرین کتاب بمناسبت مسئله‌ای (۳۰۷۰۱§) اسمش خواهد آمد .

سوّمی **آپولّونیوس پِرْگائی** * است که احتمالا در حدود ۲٦۲ قم متولّد شده و در نیمه‌ی دوّم قرن سوّم قم در اسکندریّه برآمده و بجهت کتابی که در مخروطات پرداخته نام جاودانی یافته است .

چون در رسائل‌جبری خیّام همواره از کتابهای اصول هندسه ومعطیات اقلیدس و مخروطات آپولّونیوس صحبت و بآنها استناد می شود ، و از طرف دیگر ممکن است بعضی از خوانندگان آشنائی کافی با این شاهکارهای علمی نداشته باشند ، مناسب است که شرح مختصری در معرّفی هر یك از سه اثر ریاضی مذکوربیاوریم .

۳۰۲۰۳۰۱§ کتاب «اصول» ـ چنانکه اشاره کردیم ، کتاب اصول هندسه‌ی اقلیدس اوّلین کتابی است که در آن ریاضیّات یونانی تا ۳۰۰ قم به صورت علمی تنظیم وعرضه شده است . این کتاب مشتمل بر ۱۳ مقاله می باشد .

مقاله‌ی اوّل شامل تعریفات و بدیهیّات و اصل موضوع معروف اقلیدس و احکام راجع به تساوی مثلّثات و خطوط متوازی و قضیّه ی معروف به قضیّه‌ی عروس است .

مقاله ی دوّم مشتمل بر قسمت اعظم جبر هندسی یونانیان است ، و در آن

(*) Apollonios . وی منسوبست به شهر پِرْگا از بلاد قدیم ناحیه‌ی پامفولیا در آسیای صغیر . در مآخذ اسلامی وی را ابلونیوس و ابلونیوس نجار خوانده‌اند . برای صور مختلف این نام یونانی درمآخذ اسلامی رجوع شود به **دایرةالمعارف اسلام** (چاپ جدید انگلیسی) ، صص ۹۹٤ - ۹۵ ، در مادّه‌ی **بلینوس** .

عدّه‌ای احکام ثابت شده که معادل بعضی اتّحادهای جبری است . شکل یازدهم این مقاله در تقسیم خطّ است به نسبت ذات وسط و طرفین ، که از نظر جبری معادل‌حلّ معادله‌ی $x^2+ax=a^2$ است ، وشکل چهاردهم مقاله (ساختن مربّعی مساوی مستطیل مفروض) معادل حلّ معادله ی $x^2=ab$ می باشد .

مقاله ی سوّم در خواصّ دایره ومقاله‌ی چهارم در باب کثیر الاضلاعهای محیطی و محاطی و منتظم است .

مقاله‌ی پنجم تخصیص به خواصّ نِسَب دارد ، و ظاهراً مبتنی بر تحقیقات ائودوکسوس (§ ۳۰۲۰۱) می باشد ، ودر هرحال ، درتنظیم وتدوین احکام مربوط به نسب در این کتاب چنان استادی بکار رفته که درآثار ریاضی یونانیان کم‌نظیر است .

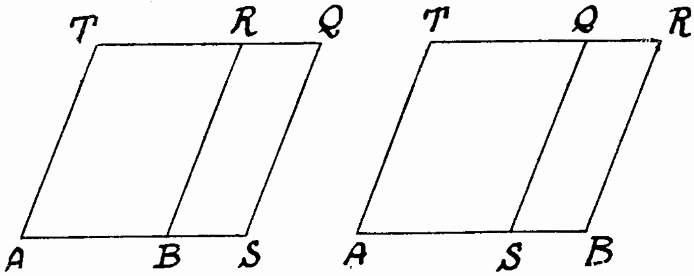
مقاله ی ششم در احکام راجع به سطوح و اشکال متشابه است . درین مقاله دو مسئله آمده است (مسائل ۲۸ و۲۹) که از نظر جبری به حلّ معادلات درجه‌ی دوّم برمی گردد . این مسائل ازجنبه‌ی تاریخی بسیار اهمیّت دارد ، چه روش حلّ آنها همواره مورد استفاده ی ریاضیّون یونانی و اسلامی بوده است * . بنا بر این ، جا دارد که اشاره ای باین مسائل بکنیم .

موضوع هر دو مسئله « قرار دادن متوازی الاضلاعی بر کنار خطّی » است ، که ریاضیّون دوره‌ی اسلامی ازآن به « اضافه کردن » متوازی الاضلاعی برقطعه خط مفروض تعبیر کرده اند . باید دانست که صورت ساده ی مسئله‌ی قراردادن متوازی الاضلاعی بر کنار خط مفروض ، که یونانیان به لفظ پارابوله از آن تعبیر کرده اند ، ساختن متوازی الاضلاعی است† که این خط یکی از اضلاع آن باشد . صورت کلّی تر مسئله اینست که متوازی الاضلاعی مانند ASQT بر قطعه ای (بمعنای اعمّ) مانند AS ازقطعه مستقیم AB ، که با آن یك انتهای مشترك دارد ، ساخته شود . درین صورت ، هر گاه متوازی الاضلاعی برتمام AB بسازیم چنانکه اضلاع مقابل AB از

(*) مثلا رجوع شود به § ۳۰۲۰۳۰۳ ، § ۵۰٤۰۲۰۲ ، § ۵۰٤۰۳۰۱ .

(†) البتّه تابع شرایطی .

دو متوازی الاضلاع دارای یك امتداد باشند ، واضلاع دیگر آنها متوازی باشند ، برحسب اینکه AS کوچکتر یا بزرگتر از AB باشد ، گویند متوازی الاضلاعی که برAB اضافه شده (یعنی ASQT) نسبت به متوازی الاضلاعِ مُضاف بر **تمام** AB (یعنی ABRT) ناقص (به یونانی **اِلّیپْسیس**) یا زاید (به یونانی **هوپِرْبولِه**) ومقدار نقصان یا زیادتی متوازی الاضلاعBSQR میباشد .



بعد از شرح این اصطلاحات ، صورت مسائل ۲۸و۲۹ مقالهٔ ششم را ، قریب به مضمونی که ریاضیّون اسلامی آورده اند ، نقل می کنیم :

می خواهیم برخط مفروضْ متوازی الاضلاعی مساوی سطح مستقیم الاضلاع مفروض C اضافه کنیم که نقصان (مسئلهٔ ۲۸) یازیادتی (مسئلهٔ۲۹) آن نسبت به متوازی الاضلاعِ مُضاف بر تمام خط AB با متوازی الاضلاع مفروض D متشابه باشد * .

هر دو مسئله از نظر جبری معادل معادلاتی از درجهٔ دوّم است† ، چواگر AB و QS را بترتیب به a و x و نسبت اضلاع D را به k نمایش دهیم خواهیمداشت SB = kx . حال اگر m جیب زاویه‌ای از یکی از متوازی الاضلاع ها باشد ، سطح

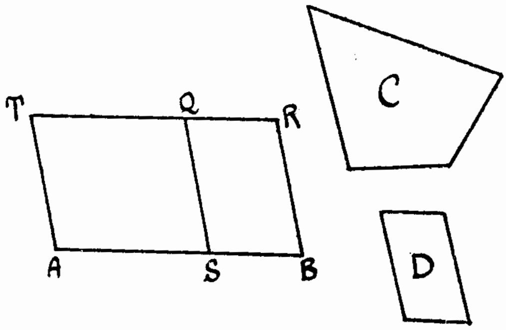
(*) **تحریر اقلیدس** ، صص ۹۵-۹۶؛ هیث ، **سیزده مقاله** ، جلد اوّل ، صص ۳۴۳-۳۴۴ ، و جلد دوم ، صص ۲۵۸-۲۶۷ .

(†) هیث ، **تاریخ** ، جلد اوّل ، ص ۳۹۶

AQ مساوی $m(a-kx)x$ خواهد بـود ، و لهـذا حـلّ مسئله به حلّ معادلـه ی

$$m(a \pm kx)x = c \quad \text{یا} \quad \pm mkx^2 + max - mc = o$$

باز می گردد . در اضافه‌ی زایدْ مسئله همیشه ممکن است ، امّا در اضافه ی ناقص ،



شرط اینکه مسئله جواب حقیقی داشته باشد اینست که $c \leqslant ma^2/4k$. طرف دوّم این نامساوی سطح متوازی الاضلاعی است که بر نصف AB ومتشابه با D ساخته شود ، و همین شرط را اقلیدس مقدّمةً در قضیّه‌ی ۲۷ مقاله‌ی ششم آورده است † .

مقالات هفتم - نهم در خواصّ اعداد و مقاله‌ی دهم در مقادیر اصمّ است .

مقالات یازدهم - سیزدهم درهندسه‌ی مجسّمه یا فضائی است * .

(†) **تحریر اقلیدس** ، ص ۹۵ ؛ هیث ، **سیزده مقاله** ، جلد دوّم ، ص ۳۵۷ .

(*) در پایان هندسه‌ی اقلیدس معمولا دو مقاله‌ی الحاقی (مقالات چهاردهم و پانزدهم) می‌آید ، که اولی از هُوِپسِکْلس (Hypsicles) است که گویا در نیمه‌ی دوّم قرن دوّم قبل از میلاد می‌زیسته ، و دوّمی ظاهراً در قرن ششم میلادی نوشته شده است .

بالاخره در آخر **تحریر اقلیدس** چاپ تهران چهار صفحه (ص ۲۵٦ ـ ۲۵۹) در تحت عنوان « القول فی اقامةالبرهان علیالحکم المذکور فیالشکلالخامس عشر منالمقالة الثانیة عشر من هذاالکتاب » آمده که ظاهراً ازخواجه نصیرالدین طوسی ومشتمل بر دو مقدمه است که اوّلی درحل مسئله‌ی درج دو واسطه‌ی متناسب بین دو طول مفروض (§۳۰۷۰۱) می باشد . اینکه‌بعضی‌عبارت مذکور را آغاز کتاب **معطیات** (§۳۰۲۰۳۰۲) شمرده‌اند (**یادبود هفتصدمین سال‌خواجه نصیرالدین طوسی** ، نشریه‌ی شماره‌ی ۲۵۹ دانشگاه تهران ، خرداد ماه ۱۳۳۵ ، ص ۱۱۲) خطائی فاحش‌است .

کتاب اصول را اوّل بار **حجّاج ابن یوسف ابن مَطَر** (۳۰٤۰۳§) بزبان عربی ترجمه کرد، و پس از او نیز دانشمندان و مترجمین معتبر مانند **اسحاق ابن حنین** (۳۰٤۰۳§) و **قسطا ابن لوقا البعلبکی** (۳۰٤۰۳§) و **ثابت ابن قرّه** (۳۰٤۰۳۰۱§) و دیگران دست به ترجمه‌ی آن و اصلاح ترجمه‌های دیگران زدند، و جمع کثیری از دانشمندان حواشی و شروحی بر آن نوشتند * . از تحریرهای معروف هندسه‌ی اقلیدس کتاب معروف به **تحریر اقلیدس** از خواجه نصیرالدّین‌طوسی (۵۹۷-٦۷۲هق) است، که مبتنی بر ترجمه‌های حجّاج وثابت میباشد، و در۱۲۹۸هق در تهران بچاپ رسیده است. توجّهی که خواجه نصیرالدّین درین کتاب به جزئیّات و حالات خاص مبذول داشته نشانه‌ی بارز انحطاط علوم ریاضی در نزد مسلمین است، و از جهاتی اثر او را مشمول گفته‌ی پاپّوس † قرار میدهد:

«. . . چیزی به نوشته‌ی اصلی اقلیدس اضافه نکردند الّا اینکه بعضی، پیش از زمان من، با الحاق براهین ثانوی به بعضی قضایا بیسلیقگی خود را به اثبات رسانیده‌اند . . .» .

۳۰۲۰۳۰۲§ مُعْطیات ــ دیگراز کتابهای معروف اقلیدس کتاب معطیات‌است که نسخه‌ای از آن، که بتوسّط اسحاق ابن‌حنین (۳۰٤۰۳§) ترجمه شده و ثابت‌ابن قرّه (۳۰٤۰۳۰۱§)آنرا اصلاح کرده، درتحت عنوان **کتاب المعطیات** درجزء مجموعه‌ای در سال ۱۳۰٤ هق درتهران چاپ شده است (صص ۱۲۳-۱٦۳ مجموعه).

این کتاب مربوط به چهارمقاله‌ی اوّل کتاب اصول ودرهندسه‌ی مسطّحه است، و با تعریف معانی مختلف «معلوم بودن» چیزی آغاز میگردد، از این قبیل:

(*) برای تفصیل بیشتررجوع شود به فصل هفتم مقدّمه‌ی کتاب گرانبهای سر تامس ل. هیث، بنام **سیزده مقاله‌ی اصول اقلیدس**، جلد اوّل، صص ۷۵ - ۹۰ .

(†) Pappos . پاپّوس اسکندرانی، ریاضیدان یونانی، احتمالا درسالهای ۲۸٤-۳۰۵ بم رونق داشته .

سطوح و خطوط و زوایا و نِسب وقتی **ازحیث مقدار** معلومند که بتوان مساوی آنها را ساخت.

اشکال مستقیم الخط وقتی **ازحیث صورت** معلومند که زوایای آنها معلوم و نسب اضلاع آنها نیزمعلوم باشد.

دایره وقتی **ازحیث مقدار** معلوم است که مقدار شعاعش معلوم باشد، و وقتی **ازحیث مقدار و وضع** معلوم است که مقدار شعاع و وضع مرکز آن معلوم باشد.

منظور هریك از احکام معطیات اثبات این مطلب است که اگر بعضی اجزای شکلی یا نِسب آنها **معلوم** باشد، اجزای دیگری یا نسب اجزای دیگری از شکل **معلوم** خواهد بود.

اهمیّت مجموعه‌ی منظّمی ازاین قبیل احکام در تسهیل و اختصار **تحلیل** هندسی مستغنی از توضیح است.

از احکام معطیات که با موضوع بحث ما مناسبت دارد احکام ۸۴ و ۸۵ است که میتوان آنها را چنین بیان کرد:

هرگاه سطح و زوایای متوازی الاضلاعی معلوم و تفاضل (حکم ۸۴) یا مجموع (حکم ۸۵) دو ضلع مجاور نیز معلوم باشد اضلاع متوازی الاضلاع معلوم است.

بدیهی است که اگر x و y اضلاع متوازی الاضلاع باشد، تعیین این دو ضلع بحلّ دستگاهی به صورت

$$x \pm y = a, \qquad xy = b^2$$

بر می گردد، و احکام ۸۴ و ۸۵ معطیات را می توان معادل حلّ این دستگاهها شمرد.

۳۰۲۰۳۰۳ § **مخروطات آپولّونیوس** ــ مخروطات مبحثی است ازعلم هندسه که از خواصّ **قُطوعِ مخروطی** (قطعهای مخروطی)، یعنی منحنیات حادث ازتقاطع سطوح مخروطی مستدیر با صفحات قاطع، بحث میکند، و این منحنیات همانهاست که امروز در نزد ما به بیضی و هذلولی و سهمی معروفست.

چنانکه در ۳۰۲۰۱ § اشاره کردیم ، کشف قطوع مخروطی بـه منایخموس منسوب است . پس از وی ، بعضی دیگر از علمای ریاضی ، از جمله آریستایوس * (قرن چهارم ق م) و اقلیدس (حدود ۳۰۰ ق‌م) و کونون † (حدود ۲٦۰ ق‌م) وارشمیدس (۲۸۷-۲۱۲ ق‌م) ، درین مبحث تحقیق کرده‌اند ، ولی اوّلین اثر عمده و مستقلّی که در این باب بما رسیده همان کتاب مخروطات آپولّونیوس (۳۰۲۰۳ §) می‌باشد .

کتاب آپولّونیوس ظاهراً اصلا درهشت مقاله بوده ، و مقاله‌ی هشتم آن تا کنون بدست نیامده ، ولی ترجمه‌های عربی هفت مقاله‌ی دیگر و اصل یونانی چهار مقاله‌ی اوّل دردست می‌باشد . از مترجمین وریاضیّون اوایل دوره‌ی‌اسلامی که کتاب مخروطات را بزبان عربی ترجمه کرده‌اند میتوان هلال ابن هلال حمصی (۳۰٤۰۳ §) ، ثابت ابن قرّه (۳۰٤۰۳۰۱ §) ، و ابوالفتح اصفهانی (۳۰٤۰۳ §) را نام برد . در ادوار بعد نیز شروحی برمخروطات نوشته شده ، وتلخیص‌هائی‌از آن فراهم شده ، که ازجمله میتوان تلخیص ابوالحسین عبدالملك ابن‌محمّد شیرازی †† را ذکر کرد .

احکام علم مخروطات در تحقیقات علمای دوره‌ی اسلامی در حلّ مسائلی که قابل تحویل به معادلات درجه‌ی دوّم نیست‌اهمیّت خاصّی داشته وشاید بی‌مبالغه بتوان گفت که یگانه وسیله بوده است ، و باین جهت در کارهای مربوط به حلّ معادلات درجه‌ی سوّم (مانند رسائل جبری خیّام) همواره اصطلاحات مخروطات پیش می‌آید ، و این اصطلاحـات را مترجمین دانشمند دوره‌ی اسلامی از روی اصطلاحات یونانـی ساخته‌اند . بعنوان نمونه توضیح مختصری در وجد تسمیه‌ی قطوع به **قطع مُکافی** و **قطع زایـد** و **قطع ناقص** می‌آوریم .

این اصطلاحات و نیز اسامی قطوع سه گانه در زبانهای اروپائی از نامهائی کـه آپولّونیوس براین منحنیات نهاده گرفته شده ، و اصطلاحات یونانی آپولّونیوس خود ناشی از اینست که وی خاصیّت اصلی قطوع را بوسیله‌ی اضافه کردن خطّی برسطحی

Aristaeos (*)

Conon (†)

(††) در حدود ۵۵۰ هق زنده بوده وقبل‌از ٦۰۰ ه ق وفات یافته است .

(§۳۰۲۰۳۰۱) بیان میکرده است . برای مزید توضیح فرض کنیم مبداء مختصات یکی از نقاط منحنی و قطر مارّ براین نقطه محورطول و مماس مرسوم برمنحنی ازاین نقطه محور عرض باشد ، و در مورد بیضی و هذلولی طول قطر مذکور را به d نمایش میدهیم . خاصیّت اساسی سه منحنی چنین نوشته میشود :

$$y^{2} = px \qquad \text{(سهمی)}$$

$$y^{2} = px + \frac{p}{d} x^{2} \qquad \text{(هذلولی)}$$

$$y^{2} = px - \frac{p}{d} x^{2} \qquad \text{(بیضی)}$$

در این معادلات p طول مشخّصی است که به قَطعِ مفروض بستگی دارد ، و میتوان آنرا بوسیله‌ی قطعه خطّی مانند D که ابتدا از مبداء مختصّات برقطرمفروض عمود شود نمایش داد ، و ریاضیّون قدیم آنرا **ضلعِ قائم** * منحنی میخوانده‌اند . اینك اگر، برای احتراز از تکرار ، در مستطیلهای مضاف بر D ضلع واقع بر D را قاعده و ضلع عمود برآنرا ارتفاع بنامیم ، دیده میشود که مربع عرض هر نقطه‌ی سهمی معادل مستطیلی است که برتمام D اضافه شود و ارتفاعش مساوی طول نقطه باشد ــ و چنانکه دانستیم ، یونانیان ازاین اضافه بـه لفظ **پارابوله** (مُکافی) تعبیر میکردند . از طرف دیگر، اگر S مستطیلی به قاعده‌ی p و ارتفاع d باشد ، در هذلولـی یا بیضی ، مربّع عرض هرنقطه معادل مستطیلی است مضاف برD که ارتفاعش طول نقطه باشد ، و بقدر مستطیلی متشابه و متشابه الوضع با S نسبت به مستطیل مُضاف بر تمام D ، بترتیب ، زاید (**هوپِرْبولِه**) یا ناقص (**اِلّیپْسیس**) باشد .

البتّه آپولّونیوس معادلات جبری بکار نمیبرده ، بلکه خواص اساسی مندرج در معادلات سابق‌الذّکررا قریب به مضمون اخیرولی با عباراتی بسیارپیچیده‌تر وطولانی‌تر

(*) به لاتینی **لاتوس رکتوم** (latus rectum) . بالاخص اگر محور کانونی‌را محور طول بگیریم ، ضلع قائم مساوی وتر کانونی‌عمود بر محور کانونی خواهد بود ، و ریاضیون انگلیسی زبان هنـوز اصطلاح **لاتوس رکتوم** را باین معنی بکار می‌برند ، و آن مضاعف **پارامتر** منحنی در اصطلاح ریاضیون فرانسه زبان است .

بیان میکرده است ، و برحسب نوع اضافه‌ای که در مورد هر قطع درکار می‌آمده آن قطع را با یکی از الفاظ پارابوله ، هوپربوله ، و الّیپسیس مشخّص می‌نموده است ، و چنانکه اشاره کردیم ، نامهای قطع مکافی و قطع زاید و قطع ناقص که ریاضیّون اسلامی برمنحنیات سه گانه نهاده‌اند ، و نیزنام سه منحنی در زبانهای اروپائی ناشی از همین تسمیه‌ی آپولّونیوس میباشد .

۳۰۳§ جبر درهند

۳۰۳۰۱§ مقدّمه ـ اگرچه نمیدانیم اطّلاعات جبری هندیها در دانشمندان دوره‌ی‌اسلامی تا چه حدّ مؤثر بوده و حتّی به قول وپکه *، در پایان قرن دهم میلادی ریاضیّون اسلامی از طرق هندی حلّ معادلات سیّال بی خبر بوده‌اند ، از جهت اینکه بعضی‌آثار علمی هندی در قرون اولای اسلامی‌به مسلمانان رسیده اطّلاع ازآثار ریاضی هندی درتحقیق تاریخ ریاضیّات در دوره‌ی اسلامی ضروری است .

تاریخ اوایل ریاضیّات در هند روشن نیست . قراینی هست حاکی از اینکه هندیان نیز مانند سایر اقوام مترقی توجّه خاص به نجوم و محاسبات داشته‌اند . قدیمترین آثار علمی هندیان در نجوم کتابهای موسوم به **سِدّهانْتَ** است که بیشتر جنبه‌ی نظری داشته ، و از کتابهای نجومی عملی و جداول و زیجات ممتاز بوده ، واین لفظ سدّهانت در جزء اسم تألیفات بعدی ریاضیّون ومنجّمین هندی نیزمیآید . از سدّهانت‌های نسبةً قدیمی پنج سدّهانت ـ **سُورِیَ سدّهانتَ** ، **پَئِیتامَهَ سدّهانتَ** ، **واسیشْطَهَ سدّهانتَ** ، **پاوْلیسا سدّهانتَ** ، و **رومَکَ سدّهانتَ** ـ معروف است ، که فقط اوّلی بصورت اصلی در دست میباشد ، و محقّق شهیر ، جورج سارتن ، به تخمین و احتمال آنها را از نیمه‌ی اوّل قرن پنجم میلادی میشمارد † ، و درهرحال کتاب **پَنْچَ سدّهانْتیکا** از وَراهَمیهیرَ که

(*) وپکه ، **فخری** ، ص ٤٢ .

(†) سارتن ، **مدخل** ، جلد اوّل ، ص ۳۸۷ .

در حدود ۵۰۵ میلادی تألیف شده مشتمل بر خلاصه‌ای از سدّهانت های پنجگانه می‌باشد .

حادثه‌ای که درتاریخ ریاضیّات درهند اهمیّت خاص دارد هجوم یونانیان به هند در جنگهای کشور گشائی اسکندر مقدونی است (۳۲۷ ق م) ، و اعزام سفرای یونانی در دربار پادشاهان هند ، و اگرچه تأثیر متقابل دانشمندان یونانی وهندی را نمی‌توان بدرستی دانست ، سدّهانت‌های مذکور خالی از تأثیر افکار یونانی نیست † .

در هر حال ، دو خدمت بزرگ هندیان را به بسط ریاضیّات نمی‌توان فراموش کرد . یکی وضع ارقام ، که اوّلین اثر آن در کتیبه‌های دوران پُر فروغ آشوکا ، پادشاه معروف هند در قرن سوّم ق م ، دیده میشود ؛ و بنا برمعروف ، ارقام هندی در قرن دوّم هجری به حوزه‌ی علمی بغداد رسید * ، و سپس به اروپا وارد شده است . و دیگر استعمال جیب است در مثلّثات بجای وتر که در نزد یونانیان بکار می‌رفته است .**

۳۰۳۰۲ § جبر درهند ــ بر طبق آنچه از آثار هندی بر می‌آید ، ریاضیّون

(†) **پاولیسا سدّهانت** را به پاولوس اسکندرانی (قرن چهارم میلادی) ، عالم یونانی احکام نجوم ، نسبت داده‌اند .

(*) درین باب باید توجّه داشت که سوروس سبخت ، اسقف دانشمند مدرسه‌ی قنّسرین(از شهرهای سوریه بر ساحل علیای فرات) در قرن هفتم میلادی ، در ۶۲۲ میلادی از ارقام هندی صحبت می کند . رجوع شود به: سارتن، **مدخل** ، جلد اوّل ، ص ۴۹۳ ؛ سمیث ، **تاریخ** ، جلد اوّل، صص ۱۶۶ ــ ۶۷ .

(**) ظاهراً اول کسی که نام مخصوصی برای تابعی که ما امروز **جیب** و فرنگیها **Sinus** می‌خوانند وضع کرده آریبهط (رجوع شود به صفحه‌ی ۹۴) است ، که آنرا **اردها جیا** (بمعنی نصف وتر) و جیا اردها ، و بعد ، باختصار ، جیا یا جیو (بمعنی وتر) نامیده است ، و همین لفظ است که در نزد ریاضیون اسلامی‌بصورت جیب تحریف شده، و گراردوس کرمونِنسیس (Gerardus Cremonensis) (۱۱۱۴ ــ ۸۴) ، مترجم معروف ایتالیائی ، در ترجمه‌ی آثار عربی‌به‌لاتینی، لفظ **سینوس** را ، که کمابیش هم معنی لفظ عربی جیب (بمعنی گریبان وغیره) است ، بجای‌آن اصطلاح کرده است . رجوع شود به : سمیث ، **تاریخ** ، جلد ۲ ، صص ۶۱۵ ــ ۶۱۶ .

هندی در اوایل قرن هفتم میلادی درتحلیل جبری مسائل مهارتی بهم رسانیده بودند ، و از حلّ معادلات درجه‌ی دوّم با خبر بودند .

ازریاضیّون هندی در دوره‌ی مورد نظرما که درجبرچیزی نوشته‌اند اسامی چهار تن‌قابل ذکر است : آریَبهط (٤٧٥ یا ٤٧٦ ـ حدود ٥٥٠ ب م) ، برهمگُپت (متولّد ٥٩٨ ب م) ، مهاویرَ (رونقش در حدود ۸۳۰ ب م) ، و بهاسکرَ (١١١٤ ـ حدود ١١٨٥ ب م) .

آریبهط همان کسی است که در آثار دوره‌ی اسلامی به ارجبهد و ارجبهر معروف شده † . وی کتابی‌نوشته (٤٩٩ ب م) موسوم‌به **آریبهطیّه** که اساساً مشتمل بر همان مطالب سدّهانت‌هاست منتهی به صورتی منظّم تر ، و قسمتی از آن در ریاضیّات است . بالاخصّ ، حلّ معادلات سیّال درجه‌ی اوّل بطریقی شبیه طریقه‌ی کنونی حلّ‌این معادلات بوسیله‌ی کسور مسلسل درین کتاب آمده است . و نیزمندرجات کتاب حاکی از اینست که مؤلّف از حلّ معادلات درجه‌ی دوّم و خواصّ تصاعد عددی باخبر بوده است . ✿

برهمگپت درحدود سال ٦٢٨ ب م کتابی بنام **براهمسپهط ـ سدّهانت** نوشته که عمدةً مبتنی برسوری **سدّهانت و آریبهطیّه** است ، ولی مطالب تازه‌ای نیز دارد . فصول دوازدهم و هیجدهم کتاب در باب ریاضیّات است ، و در این فصلها مؤلّف به معادلات درجات اوّل و دوّم مُعیّن و سیّال پرداخته است .

مهاویر درحدود ۸۳۰ میلادی کتابی بنام گنیت‌سارسنگره نوشته که جامعتر ولی مقدّماتی‌تراز کتاب برهمگپت است ، و درآن سه نوع ازمعادلات درجه‌ی دوّم را (بدون توجّه به ریشه‌های موهومی) حل کرده و از تصاعدات هندسی نیز سخن گفته است .

(†) تقی زاده ، **دروس** ، ص ۲۱ ؛ نالینو ، **علم‌الفلك** ، ص ١٥٣ .

(✿) این آریبهط را نباید با شخص دیگری به همین نام که ظاهراً در اواسط قرن دهم میلادی می‌زیسته اشتباه کرد .

شاید ذکراین مطلب نیزخالی ازفایده نباشد که کتاب مهاویر اوّلین اثر هندی است که درآن مؤلّف به بیضی پرداخته است (بحث مهاویر دراین باب دقیق نیست).

بهاسکر بزرگترین ریاضیّون هند در فاصله‌ی سالهای ۱۰۰۰ و ۱۵۰۰ میلادی است. وی معنی واقعی تقسیم برصفررا دریافته و معادلات درجه‌ی دوّم را به یك صورت تحویل کرده، و معادلات سیّال درجات اوّل و دوّم را حلّ نموده است.

۳۰۴ § علم جبر در دوره‌ی اسلامی

۳۰۴۰۱ § مقدّمه ـ اگرچه موضوع اصلی این فصل تاریخچه‌ی علم جبر در دوره‌ی اسلامی (تازمان خیّام)است، مناسب دانستیم که مقدّمةً ازچند موضوع دیگر- به شرح ذیل

نهضت علمی اسلامی (§ ۳۰۴۰۲)،

مترجمین (§ ۳۰۴۰۳ و § ۳۰۴۰۳۰۱)،

خوارزمی (§ ۳۰۴۰۴)،

سایر علمای معروف جبر در دوره‌ی اسلامی (§§ ۳۰۴۰۵ - ۳۰۴۰۵۰۸) - صحبت کنیم، چون اطّلاع اجمالی ازین موضوعهادرفهم مبانی‌دانش ریاضی - بالاخصّ علم جبر - در دوره‌ی اسلامی و نیز در فهم مطالبی که بعداً دراین کتاب میآید ضروری است. بنابراین، پس از اشاره به آغاز نهضت علمی اسلامی وبسط آن، ازچند تن از مترجمین و دانشمندان معروف‌اسم می‌بریم. درباب علمای جبر، خوارزمی(محمّد ابن موسی)را بعلّت اهمیّت وشهرت وی درتحت عنوان مستقلّی آورده‌ایم (§۳۰۴۰۴)، واز کارهای جبری خیّام درقسمت چهارم کتاب به تفصیل سخن خواهد رفت. ازبعضی دیگر از علمای معروف جبر در اجزای § ۳۰۴۰۵ سخن میگوئیم.

پس از تمهید مقدّمات مذکور، تاریخچه‌ی علم جبر در دوره‌ی اسلامی خواهد آمد (§ ۳۰۵).

پیش از ختم این مقدّمه، به منظور احتراز از تکرار، باید گفته شود که ما در

این کتاب سر اینکه تراجم احوال اشخاص مورد بحث را بنویسیم نداشته‌ایم ، و در مواردی کـه خواننده مطالبی شبیه به تراجم احوال در کتاب میبیند، نباید برماخرده بگیرد که چرا حق اشخاص را ادا نکرده‌ایم ، و مثلا از متجاوز از۲۷۰ اثرمنسوب به کِندی (۳۰٤۰۳۰۱§) فقط کتاب او را در حساب هندی و از نود یـا بیشتر کتاب منسوب به ابن هیثم (۳۰٤۰۵۰٦§) فقط پنج اثر او را نام برده‌ایم ، چو توجّه ما در کتاب حاضر بیشتر معطوف بوده است بـه آثار جبری یا آنچه مبنای جبر قدیم تلقّی تواند شد .

۳۰۴۰۲§ نهضت علمی اسلامی ـ اگـرچه پس از ظهور دین اسلام درمدّت کوتاهی عربها بربسیاری از مراکز تمدّن آن عصر استیلا یافتند ، و در نتیجه‌ی روابطی کـه خواهی نخواهی بین این قوم و دولتهای متمدّن مغلوب برقرار شد عربها متوجّه علوم و معارف گردیدند ، قریب یك قرن و نیم طول کشید تا نهضت علمی اسلامی ، در زمان خلافت (۱۳٦ ـ ۱۵۸ ه‍ ق) ابو جعفر منصور ، دوّمین خلیفه‌ی عبّاسی ، آغاز شد . و این نهضت در عهد خلافت (۱۷۰ـ۱۹۳ ه‍ ق) هارون الرّشید ادامه یافت ، و درخلافت (۱۹۸ـ۲۱۸ ه‍ ق) مأمون عبّاسی به کمال رسید .

منصور در ۱٤۵ ه‍ ق بغداد را بنا کرد ، وآنجا را دارالخلافه‌ی خود قرار داد ، و علماء و دانشمندان را از اطراف طلبیده به ترجمه‌ی کتب علمی از زبانهای یونانی و سریانی و هندی و فارسی به عربی واداشت .

از وقایعی کـه در تاریخ علوم در دوره‌ی اسلامی اهمیّت دارد اینست که در عهد منصور هیئتی ازهند به دربار وی‌آمد (۱۵٤یا ۱۵٦ ه‍ ق) ، و ـ به نقل از کتب اسلامی تاریخ علوم ـ دربین آنان دانشمندی بود به نام **کَنْکَه** یا **مَنْکَه** کـه کتابی در علم نجوم همراه داشت ، و از روی آن نجوم هندی را به دو نفر از منجّمین دربار منصور ، یـکی **ابراهیم ابن حبیب فَزاری** (*) و دیـگری **یعقوب ابن طارِق** ، آموخت ، و این دو تن

(*) در این بـاب رجوع شود به : تقی زاده ، **دروس** ، صص ۳٦ و۳۸ و ۳۹ و۵۵و۵٦ ؛ سارتن ، **مدخل** ، جلداوّل ، ص ۵۳۰ ؛ **تاریخ‌الحکماء** ، ص ۱۷۷ ؛ نالینو ، **علم الفلك** ،ص۱۵٦ ببعد.

هردو از منجّمین بزرگ دربار منصور بودند .

کتابی که کنکه همراه آورده بود در نزد مسلمین به **سِنْدْ هِنْدْ** معروف شده ، و اصل آن مورد اختلاف است ، وبعضی آنرا همان **سوری سدّهانت** و برخی آنرا **براهمسپهط سدّهانت** تألیف برهمگپت (§ ۳۰۳۰۲) میدانند ، و در هر حال ، ظاهراً لفظ **سند هند** تحریفی ازلفظ سدّهانت است .

فزاری کتاب **سند هند** رابه امرمنصور ترجمه کرد ، واحتمالا همین ترجمه منشاء ورود ارقام هندی به حوزه‌ی علمی بغداد بوده است .

چنانکه قبلا اشاره کردیم ، نهضت علمی اسلامی در عهد خلافت مأمون به اوج رسید . وی دارالعلم معروف به **بیت الحکمه** را ، که مجهّز به کتابخانه و رصدخانه بود در بغداد تأسیس کرد ، و در تهیّه‌ی نسخ یونانی جدّ بلیغ مبذول داشت ، و حتّی هیئتی برای این منظور به دربار لِئوی ارمنی ، امپراطور بیزانس ، اعزام نمود ، و مترجمین زبردست را به ترجمه‌ی این نسخه‌ها گماشت .

خلاصه ، شرح ترجمه‌ها و تألیفات و ارصاد و اندازه گیریها و سایرکارهای علمی که در این دوره‌ی درخشان به عمل آمده ، و ذکرنام دانشمندانی که منشأ این آثار بوده‌اند در این مختصرنمیگنجد ، و ازموضوع بحث ما نیزخارج است ، مگر در بعضی موارد که به آنها اشاره خواهد شد .

☆ ☆ ☆

از جهت کارهای ریاضی ، حوزه‌ی بغداد تااواخرقرن چهارم هجری رونق داشت ، واگرچه از اواخر نیمه‌ی اوّل قرن سوّم متدرّجاً بعضی دانشمندان حوزه‌ی بغداد این شهررا ترك گفته به سایربلاد اسلامی مهاجرت کردند ، قرون سوّم و چهارم هجری را میتوان «عصرطلائی» ریاضیّات دربغداد محسوب داشت .

تاریخ طلوع و غروب حوزه‌های علمی در مراکز مختلف تحت تسلّط دولتهای اسلامی وانحطاط علوم عقلی درممالك اسلامی ازبحث ما خارج است ، وبه همین اشاره

اکتفامیکنیم که از اواخرقرن ششم هجری تحقیقات علمی در این ممالك روبه‌انحطاط گذاشت ، و مثلا درعلوم ریاضی ، اگرازجمعی انگشت شماربگذریم ،کسی که‌بتواند با دانشمندان پیشین برابری کند درسرزمینهای تحت حکومتهای اسلامی‌ظهورنکرد .

۳۰۴۰۳§ مترجمین ـ منابع عمده‌ی دانش ریاضی دوره‌ی اسلامی در درجه‌ی اوّل آثار یونانی و سپس آثار هندی است ، و نظری اجمالی به فهرست مترجمین و مؤلّفین‌حوزه‌ی بغداد کوششی را که دانشمندان این‌حوزه دراخذ وبسط دانش‌خارجیان داشته‌اند بخوبی روشن میسازد .

از یعقوب ابن طارق و ابراهیم ابن حبیب فزاری در ۳۰٤۰۲ § اسم بردیم ، و گفتیم که احتمالا ترجمه‌ی **سند هند** که بتوسّط فزاری بعمل آمد وسیله‌ی ورود ارقام هندی به حوزه‌ی علمی‌بغداد بوده است . وبی‌شك ، زیجهایی که براساس **سند هند** تنظیم شده ــ مانند زیج خوارزمی (۳۰٤۰٤ §) و زیجهای اوّلیه‌ی احمد ابن عبدالله مروزی، معروف به حَبش ِ حاسِب ☆ ــ ممدّ این امر بوده است . بعلاوه در آثار علمای‌اسلامی از کتابهایی با عناوین حساب هندی و امثال آن اسم برده میشود ،که حاکی از ورود ریاضیّات هندی ــ لااقل تا حدّی ــ در نزد ریاضیّون دوره‌ی اسلامی است .

امّا درباب ترجمه‌های آثار یونانی به زبان عربی اطّلاعات ما وسیعتر و قاطع تر است ، و اگرهم از آثار مترجمه‌ی بسیار زیادی که در کتب تاریخ علوم ذکرشده ولی متأسفانه بر اثر تصاریف زمان فقط اسمی‌ازآنها مانده است بگذریم ، آثاری که چاپ شده یا نسخ خطّی آنها با نام ونشان در دست است گواه کافی برشور و ولع دانشمندان حوزه‌ی بغداد به‌کسب دانش یونانی است .

از مترجمین معروف آثار ریاضی یکی **حجّاج ابن یوسف ابن مَطَر** است که در عهد هارون الرّشید (خلافتش ۱۷۰ـ۱۹۳ ه‌ق) و مأمون (خلافتش ۱۹۸ـ۲۱۸ ه‌ق) رونق داشته و کتاب اصول (۳۰۲۰۳۰۱ §) را یك بار به امر هارون و دیگر بار به

(☆) منجّم معروف حوزه‌ی بغداد درعهد مأمون و معتصم . وی مخترع ظلّ در مثلّثات‌است.

امرمأمون به عربی ترجمه کرده، و اوّلی نخستین ترجمه‌ی اصول است به عربی ✡ .

دیگر **اسحاق ابن حُنَین** (متوفّی درربیع الاوّل ۲۹۸ یا ۲۹۹ ه ق)، پسرحنین ابن اسحاق ✡✡ معروف، است که طبیب و ریاضیدان و بزرگترین دستیار پدر بود، و بعضی آثار اقلیدس و ارشمیدس و نیز **مجسطی** بطلمیوس را به عربی ترجمه کرد و بعضی ازین ترجمه ها را ثابت ابن قرّه (۳۰٤۰۳۰۱ §) اصلاح نمود .

دیگر **قُسْطا ابن لُوقا البعلبکی** (متوفّی در ۳۰۰ ه ق)، ریاضیدان و طبیب و فیلسوف ومنجّم مسیحی یونانی الاصل ، است ، که‌آثار بسیاری ازیونانیان را ترجمه و ویاترجمه‌های‌دیگران‌را اصلاح کرد ، که‌از‌آن جمله‌است **اصول** اقلیدس(۳۰۲۰۳۰۱§) و کتاب حساب دیوفانتوس (۳۰۲۰۲§) . و بعضی‌آثار هرون اسکندرانی(۳۰۲۰۱§) . و وی خود صاحب تألیفات عدیده بوده ، ازقبیل **کتاب مدخل هندسه** ، **کتاب شکوك اقلیدس** ، **کتاب اعداد** ، **کتاب استخراج مسائل عددی** ، و **کتاب درحساب تلاقی در جبر و مقابله** .

و دیگر **هلال ابن هِلال حِمْصی** (متوفّی درحدود ۲۷۰ ه ق) است که چهار مقاله‌ی اوّل کتاب مخروطات آپولّونیوس (۳۰۲۰۳۰۳ §) رابرای بنوموسی‌ترجمه کرد.

و دیگر **ابو الفتح اصفهانی** [ابوالفتح محمود ابن محمّد ابن قاسم ابن فضل اصفهانی] است که احتمالا درحدود ۳۷۰ ه ق برآمده ، و وی تحریر نُوی‌ازهمان کتاب مخروطات پرداخته وپنج مقاله‌ی اوّل‌آنراشرح کرده ، و کتاب **تلخیص‌المخروطات** را ، که ملخّصی ازهفت مقاله‌ی‌اوّل مخروطات آپولّونیوس است ، چنانکه در مقدّمه‌ی‌آن کتاب مذکورمیباشد (†) ، بنام علاءالدّوله ابوکالیجار کرشاسف ابن علیّ ابن فرامرز ، ملقّب

(✡) حجّاج از اولین مترجمین **مجسطی** است به عربی .

(✡✡) ابوزید حنین ابن اسحاق‌العبادی (۱۹٤ - ۲٦۵ ه ق) ، طبیب معروف واز بزرگترین دانشمندان و رادمردان عصر خود ، که در خدمت بنوموسی (۳۰٤۰۳۰۱ §) به جمع‌آوری و ترجمه‌ی نسخ یونانی اشتغال داشت .

(†) نسخه‌ی شماره‌ی ۲۷۲٤ کتابخانه‌ی ایاصوفی که عکس آن در کتابخانه‌ی مرکزی دانشگاه تهران موجود است .

به حسام امیرالمؤمنین ✡ ، تألیف کرده است .

۳۰۴۰۳۰۱ § **-** باید دانست که بعضی از مترجمین آثار یونانی و غیره خود دانشمندان عالی‌مقام وصاحب تألیفات وتحقیقات گرانبها بوده‌اند ، وبرخی‌ازدانشمندان مترجمینی عالی قدر در استخدام داشته‌اند .

ازآن جمله میتوان سه برادر دانشمند را - **محمّد** (متوفّی در۲۵۷یا۲۵۹ ه‌ق) و **احمد** و **حسن** - معروف به **بَنوموسی** ، فرزندان **موسی‌ابن شاکر** که خود از منجّمین دربار مأمون بود ، نام برد . بنوموسی در ریاضیّات ونجوم مقام شامخی‌داشتند، و بعلاوه قسمت اعظم ثروت خود را وقف تهیّه و ترجمه‌ی نسخ یونانی کرده بودند ، و دانشمندان مترجم عالی مقامی چون حنین ابن اسحاق (ذیل صفحه‌ی **۹۹**) و ثابت ابن قرّه در استخدام آنان بودند .آثار زیادی در ریاضیّات و نجوم و مکانیك باین سه برادر منسوب است . ازآن جمله است کتابی درمخروطات و کتابی درمساحت کرات وتثلیث زوایا و درج دو واسطه‌ی متناسب بین‌دوطول(۳۰۷۰۱ §) . کتاب معروف حِیَل بنوموسی، در مکانیك ، از این سه برادر است .

دیگر **ابویوسف یعقوب ابن‌اسحاق کِنْدی**(متوفّی‌درحدود ۲٦۰ ه‌ق)،معروف به **فیلسوف العرب** ، است که درفلسفه و زبان یونانی کمال تبحّر را داشت ، و بسیاری ازآثار یونانی بوسیله‌ی وی یا تحت سرپرستی اوبه عربی ترجمه شد ، ونیز ترجمه‌های دیگران را اصلاح کرد . ازآثار وی کتابی است در حساب هندی در چهار مقاله . †

دیگر **ثابِت ابن قُرّه** [ابوالحسن ثابت ابن قرّة ابن مَروان حَرّانی] (۲۱۱-۲۸۸ ه‌ق) است که از بزرگترین ریاضیّون عرب و ، بعلّت تسلّطی که بر زبانهای عربی و

(✡) مقایسه شود با : دکترمحمّد معین ، **چهارمقاله‌ی عروضی سمرقندی** ، تهران۱۳۳۳-۳۵ ، ص ٤٤٤ .

(†) عدّه‌ی‌آثارمنسوب به کندی قریب ۲۷۵ است. بسیاری از آثار وی بتوسّط گِراردوس کْرِمونِنسیس (Gerardus Cremonensis) (۱۱۱٤ - ۱۱۸۷) ، مترجم معروف ایتالیائی ، به زبان لاتینی ترجمه شده است .

سریانی و یونانی داشته ، از بهترین مترجمین آثار یونانیان بوده ، و در واقع مؤسس دارالترجمه‌ای بوده که بسیاری از بستگانش درآن کار میکردند . آثار مترجمه‌ی وی یاترجمه‌هائی که تصحیح وتنقیح کرده‌مشتمل‌است بر کتاب **کره و استوانه** (ازارشمیدس) **اصول** و **معطیات** (از اقلیدس) ، مقالات ۵ ــ ۷ مخروطات آپولّونیوس ، و غیره . وی خود صاحب تألیفات نفیسی در ریاضیّات بوده که از آن جمله میتوان **دومقاله راجع به حساب نیقوماخوس** (☆) و **مقاله در تصحیح مسائل جبر ببرهان هندسی** را نام برد .

نوه‌ی او، ابواسحاق **ابراهیم ابن‌سنان** ابن ثابت ابن قرّه (متوفّی در۳۳۵ ه ق) منجّم و ریاضیدانی عالی‌مقام بوده و کتاب مخروطات آپولّونیوس راشرح کرده ومقاله‌ای در رسم قطوع مخروطی‌بطریقه‌ی نقاط‌یابی‌به وی منسوب است، وبقول سارتن «طریقه‌ی وی برای تعیین سطح سهمی از طریقه‌ی ارشمیدس ساده تر و در واقع ساده ترین طرق حلّ این مسئله قبل از اختراع حساب انتگرال بوده است .» (☆☆)

۳۰۴۰۴ § خوارزمی [محمّد ابن‌موسی الخوارزمی] (متوفّی درحدود ۲۳۲ ه ق = ۸٤٦ ب م (†)) ــ خوارزمی‌یکی‌ازبزرگترین ریاضیّون ومنجّمین بیت‌الحکمه‌ی مأمونی (§ ۳۰٤۰۲) است . وی دانش هندی و یونانی را تلفیق کرده (††)، ولی چون در زمان او هنوز ترجمه‌ی آثار یونانی به عربی در مراحل اوّلیه بود ، بیشتر تحت تأثیر

(☆) صورت عربی نام نیکوماخوس ، ریاضیدان یونانی که در اواخر قرن اول میلادی رونق داشته . اثر معروف وی کتابی است به نام **مدخل علم حساب** که قدیمترین اثر موجودی است که در آن حساب بعنوان علم مستقلّی تلقّی شده‌است . کسانی که خواستار اطّلاع از مطالب این کتاب باشند می‌توانند به **کتاب‌المدخل الی علم العدد** (ترجمه‌ی ثابت ابن قرّه ، باهتمام ویلهم کوتس ، بیروت ۱۹۵۸) رجوع نمایند .

(☆☆)سارتن، **مدخل** . جلد اوّل ، ص ٦۳۲ .

(†) بروکلمان ، جلد اوّل ، ص ۲٤۰، چاپ ۱۹٤۳ . سارتن تاریخ وفات او را ۸۵۰ ب م ضبط کرده است (**مدخل** ، جلد اوّل ، ص ۵٦۳) .

(††) سارتن ، **مدخل** ، جلد اوّل ، ص ۵٦۳ .

هندیان بوده است ☆ .

شاید علّت عمده‌ی شهرت خوارزمی این باشد که وی اوّل کسی است که کتابی به اسم **جبر و مقابله** نوشته ، و از آن پس این اسم برعلمی که ما «جبر» میخوانیم مانده ، و نام این علم در السنه‌ی اروپائی نیز از نام کتاب خوارزمی گرفته شده است .☆☆

امّا انتخاب این اسم ناشی از دو عملی است که در حلّ معادلات معمول بوده و خوارزمی برای اوّل بارآنها راتنقیح وتدوین نموده ، و ازین راه کومکی به وارد کردن جبردر مرحله‌ی علمی نموده است . بیان این دو عمل برطبق اصطلاحات دانشمندان اسلامی بدین شرح است † که هر گاه دریك طرف معادله « استثنائی » باشد (یعنی جمله‌ای که باصطلاح امروزمنفی خوانده میشود) ، آن طرف راکامل میکنند ، بدین نحو که آن استثناء را اسقاط میکنند و معادل آنرا برطرف دیگر می‌افزایند ، و این « تکمیل » را جبر خوانند ؛ و نیز هر گاه در دو طرف معادلـه دو جمله از یك جنس (باصطلاح امروز ، دو جمله‌ی متشابه) موجود باشد ، اگر این دو جنس درعدد (یعنی ازحیث ضریب) مساوی باشند آنها را اسقاط کنند ، و الّا آنرا در طرف اقلّ بکلّی اسقاط کرده در طرف دیگر بجای عدد اکثر زیادتیِ آنرا برعدد اقلّ میگذارند ، و این عمل را مقابله خوانند .††

نظر به اهمّیت اساسی اعمال «جبر» و «مقابله» درحلّ معادلات ، خوارزمی کتاب خود را **حساب الجبر و المقابله** نامیده، وچنانکه میگوید††† آنرا به اشاره‌ی مأمون تألیف

(☆) **دایرة المعارف اسلام** ، جلد دوم ، در مقاله‌ی خوارزمی .

(☆☆) برای تحوّلات این اسم درالسنه‌ی اروپائی رجوع شود به سمیث ، **تاریخ** ، جلد دوّم ، صص ۳۸۸ - ۳۹۲ .

(†) مثلا رجوع شود به **کنزالحساب** ، چاپ تهران ، ۱۲۷۹ ه ق ، صص ۲۵٦ - ۲۵۷ .

(††)خلاصه ، بوسیله‌ی‌عمل‌جبرمثلا معادله‌ی ۸ = ۱۲ - ٥x رابصورت ۲۰ = ٥x می‌نوشتند، وبوسیله‌ی مقابله مثلامعادله‌ی ۱۰x = ۱۲ + ۷x را بصورت ۱۲ = ۳x درمی‌آوردند . البتّه امروز هر دو نتیجه بوسیله‌ی عمل نقل جمله‌ای از یك طرف معادله به طرف دیگر بعمل می‌آید ، ولی‌قدما از از اعداد منفی وتسهیلات ناشی از آنها بی خبر بودند .

(†††)**کتاب الجبر و المقابله** ، لمحمد بن موسی‌الخوارزمی ، چاپ مصر، ۱۹۳۷ ، ص ۱۵ .

کرده است. رؤوس مسائل این کتاب عبارتست از قواعد حلّ معادلات درجات اوّل و دوّم و اثبات هندسی دستورات حلّ معادلات درجه‌ی دوّم (§ ۳۰۶۰۷)، دستوراتی در باب چهار عمل اصلی وجذر، مسائلی که حلّ آنها به معادلات درجات اوّل و دوّم راجع میشود، اربعه‌ی متناسبه، سطوح واحجام، و مسائل مربوط به تقسیم ارث.

جبر و مقابله‌ی خوارزمی در قرون وسطی نزد اروپائیان کمال شهرت را داشته و تا زمان ویِت * مبنای مطالعات علمی ریاضیّون اروپائی بوده، و چنانکه گفتیم، اسم علم جبر در السنه‌ی اروپایی از نام کتاب خوارزمی مأخوذاست †.

اثر عمده‌ی دیگر خوارزمی در ریاضیّات کتابی‌است در «حساب هند» که اصل آن از بین رفته ولی ترجمه‌ی لاتینی آن مربوط به قرن چهاردهم میلادی در دست است، و آن ظاهراً همان رساله‌ای است که درمآخذ اسلامی بنام **کتاب الجمع والتفریق بحساب الهند** آمده است، و بوسیله‌ی همین کتاب است که اروپائیان شمار هندی را آموختند.

۳۰۴۰۵ § سایر علمای معروف جبر در دوره‌ی اسلامی - عدّه‌ی کسانی از ریاضیّون دوره‌ی اسلامی که آثاری درعلم جبر یا تحقیقاتی مربوط به این علم به‌آنان منسوب است زیاد است. ما دراین جزء اکتفا میکنیم به چند تن از علمای درجه‌ی اوّل و بعضی از آنانکه اطّلاع اجمالی از کارهایشان برای مقصودی که در پیش داریم مفید است.

۳۰۴۰۵۰۱ § ماهانی [ابوعبدالله محمّد ابن عیسی ماهانی] - ماهانی ریاضیدان ومنجّم و اصلا از ماهان کرمان ولی رونقش در بغداد بوده است (در حدود نیمه‌ی قرن سوّم هجری). از آثار ریاضی او شروحی‌است بر هندسه‌ی اقلیدس و بعضی آثار ارشمیدس.

(*) François Viète (۱۵۴۰ - ۱۶۰۳)، ریاضیدان فرانسوی وبه احتمال‌قوی بزرگترین ریاضیّون قرن شانزدهم میلادی. وی سهم بزرگی دربسط جبر ومثلّثات دارد.

(†) لفظ **آلگوریسم** که بمعنی حساب یافنّ محاسبه وارد زبانهای اروپائی شده نیز از نام خوارزمی مشتق است. برای اطّلاع بیشتر رجوع شود به: سمیث، **تاریخ**، جلد ۲، صص ۹ - ۱۱ و ۷۸ و ۸۸.

وی کوشش بسیار در حلّ مسئلهٔی ارشمیدس (۳۰۷۰۱ §) کرده و آنرا به معادله‌ای که امروز به صورت $x^3 + a = cx^2$ نوشته میشود باز گردانیده ، ولی از حل این معادلـه عاجزمانده‌است ، ومعادلهٔی مذکور در نزد ریاضیّون اسلامی به معادلهٔی ماهانی‌معروف بوده است . (*)

معادلهٔی ماهانی را **ابوجعفر خازن‌خراسانی**(متوفی بین ۳۵۰ و ۳٦۰ ه‍ ق) بوسیلهٔی قطوع مخروطی حل کرد .

۳۰۴۰۵۰۲ § ابوکامل [ابوکامل شجاع ابن اَسْلم ابن محمّد ابن شجاع الحاسِب المصری]ـ ابوکامل از ریاضیّون بزرگ دورهٔی اسلامی ومصری الاصل‌است . رونق او را میتوان بین زمـان محمّد ابن موسی الخوارزمی (متوفّـی در ۲۳۲ ه‍ ق) وعلیّ ابن احمد عِمرانی (متوفّی در۳٤٤ ه‍ ق) دانست ، چوابوکامل‌جبرخوارزمی را تکمیل کرده و عمرانی جبرابوکامل راشرح کرده است .

بقول سمیث(تاریخ ، جلد اوّل ، ص ۱۷۷) ، هیچیك ازمعاصرین ابوکامل در حلّ معادلات و استعمال آنها در حلّ مسائل هندسی مهارت وی را نداشته ، و بقول همین نویسنده ، شهرت ابوکامل عمدةً بواسطهٔی‌تحقیقاتی است که درباب مخمّس ومعشّر ودر حساب وجبر کرده ، و بقول سارتن(مدخل ، جلد اوّل ، ص ٦۳۰) ، کرخی(۳۰٤۰۵۰۷§) فایدهٔی فراوان ازکارهای او برده است .

ازآثار ابوکامل **کتاب‌جبرومقابله** و **کتاب خطأین** را میتوان نام برد .

۳۰۴۰۵۰۳ § ابوالوفای بوزْجانی [ابوالوفاء محمّد ابن محمّد ابن یحیی ابن اسماعیل‌ابن‌عبّاس] (۳۲۸ــ۳۸۸ ه‍ ق)ـ ابوالوفاء ازبزرگترین ریاضیّون ومنجّمین ایرانی و متولّد بوزجان قهستان بوده است . وی در ۳٤۸ ه‍ ق به عراق مهاجرت کرد و تاهنگام مرگ درآنجا بزیست . اهمّیت‌کارهای‌ابوالوفاء در بسط علم مثلّثات(†) ودر نجوم

(*) نیز رجوع شود به ۳۰۷۰۲ § ، ۵۰۷۰٦ § ، ٦۰٤۰٤ § .

(†) بالاخصّ وی طریقی برای استخراج جیب زاویهٔی سی دقیقه ابداع کرده که نتیجهٔی آن **تا هشت** رقم با مقدار واقعی $sin30'$ مطابقت دارد .

از موضوع بحث ما و از گنجایش این مختصر بیرون است. از آثار جبری منسوب به وی میتوان اینها رانام برد: **تفسیر کتاب خوارزمی درجبر و مقابله؛ کتاب تفسیر کتاب ذیوفنطس** (✡) **درجبر؛ تفسیر کتاب اِبَرْخُس** (†) **در جبر؛ کتاب براهین قضایائی که ذیوفنطس درکتاب خود بکاربرده برحسب آنچه (ابوالوفاء) درکتاب تفسیرخود آورده است؛ کتاب در استخراج ضلع مکعّب ومال مال و آنچه ازاینها ترکیب شود**؛ و غیره.

متأسّفانه هیچیك از تفسیرهای ابوالوفاء بر کتابهای خوارزمی ودیوفانتوس در دست نیست، و رسالهٔ اخیر از فهرست فوق نیز بدست ما نرسیده است، ولی از روی عنوان آن میتوان احتمال داد که ابوالوفاء معادلهٔ $x^4+px^3=q$ را (شاید بوسیلهٔ نقاط تقاطع دو قَطعِ $y^2+axy=b$ و $y=x^2$) حل کرده است.

۳۰۴۰۵۰۴ § **خُجَندی** [ابومحمّد حامدابن‌خضرخجندی] (متوفّی در ۳۹۰ ه ق) – وی اهل ماوراءالنّهر و ازمنجّمین وریاضیّون معروف زمان فخرالدّولهٔ دیلمی بوده و بیشتر در نجوم ومثلّثات کروی کار کرده است. خجندی برهان ناقصی برامتناع معادلهٔ $x^3+y^3=z^3$ آورده است.

۳۰۴۰۵۰۵ § **ابوسهل کوهی** [ابوسهل ویجن ابن رستم کوهی] – ابوسهل اصلاً از طبرستان بوده و درزمان عضدالدّولهٔ دیلمی وپسرش شرف‌الدّوله میزیسته. کوهی نه فقط منجّم دقیق و بزرگی بوده، بلکه درریاضیّات مقام شامخی داشته‌است.

(✡) رجوع شود به ذیل صفحهٔ ۸۲.

(†) صورت نام هیپّارخوس (Hipparchos) درمآخذ اسلامی. معروفترین شخصی که بهاین نام میشناسیم عالمی است از اهل نیقیه در ناحیهٔ بیتونیا از آسیای صغیر، که گویا درحدود ۱۸۵ قم متولّد شده و درحدود ۱۲۵ قم وفات یافته است، و از منجّمین معروف قدیم می باشد. از طرف دیگر ابن ندیم ازشخصی به نام ابرخس رَفّنی اسم می برد (**الفهرست**، الفن‌الثّانی من المقالة السابعه) که بگفتهٔ او صاحب کتابی در «صناعت جبر» بوده که ابوالوفای بوزجانی آنرا اصلاح کرده است. واین ابرخس ظاهراً منسوب است به رَفَنِیه ازبلاد طرابلس شام. ویپکه عبارتی ازپلوتارك نقل می کند (**جبرعمرخیام**، ص xj) که بقول وی مؤیّد این است که ابرخس منجّم تألیفات دیگری علاوه‌برآثار نجومی داشته است. معذلك معلوم نیست که «ابرخس رفنی» همان ابرخس منجّم است یانه.

تحقیقات او درحلّ معادلات بالاتراز درجه‌ی دوّم جزء بهترین آثار جبرهندسی دوره‌ی اسلامی است . در رساله‌ای ، نامش **زیادات برکتاب ارشمیدس** ، علاوه بر مسائل مقالـه‌ی دوّم کتاب کره واستوانه‌ی ارشمیدس، به حلّ مسئله‌ی تعیین عرقچینی کروی میپردازد که حجمش مساوی حجم عرقچین مفروض و سطحش مساوی سطح عرقچین مفروض باشد ، و پس‌ازساختن معادله‌ی مسئله درآن بحث میکند . اثردیگراو**کتاب پرگارتام** است مشتمل برطرح پرگاری برای رسم قطوع مخروطی .

۳۰۴۰۵۰۶ § ابن هَیْثَم [ابو علی حسن ابن حسن (یا حسین) ابن الهیثم البصری] (۳۵٤ـ ٤۳۰ ه ق) ـ ابن هیثم یکی ازبزرگترین دانشمندان دوره‌ی اسلامی است . وی اوایل عمر را در بصره گذرانید و سپس به مصر رفت . محقّقین تاریخ علوم طرز فکر او را مانند دکارت می‌دانند . مؤلّفات زیادی در علوم ریاضی و فیزیك ونجوم به ابن هیثم منسوب است (*) ولی متأسّفانه اغلب آثار او از بین رفته‌است .

ابن هیثم مسئله‌ی ارشمیدس (۳۰۷۰۱ §) را بوسیله‌ی تقاطع قطوع مخروطی حلّ کرده و تحقیقات خود را درین باب در رساله‌ی **قول‌فی‌قسمة الخطّ الّذی استعمله‌ارشمیدس فی‌کتاب الکرة والاسطوانه** گرد آورده است ، و وپکه ترجمه‌ای ازآنرا به جبر ومقابله‌ی خیّام خود ضمیه کرده است .

۳۰۴۰۵۰۷ § ـ کَرْخی [ابوبکرمحمّد ابن حسن (یا حسین) حاسِب کرخی] (متوفّی در ٤۲۰ ه ق)ـ کرْخی از بزرگترین علمای جبر درقرن چهارم و اوایل قرن پنجم هجری است . اصل او ازکـرخ (در حومه‌ی بغداد) بوده(†) . آثار عمده‌ی وی

(*) نام نود تألیف او درکتاب جبر ومقابله‌ی خیّام مصاحب آمده است (صص ۱۱٦ـ۱۲۲). ازآن جمله است **کتاب تحلیل مبرهن مسائل عددی بطریق جبر و مقابله** ، **تلخیص مقالات آپولّونیوس درقطوع مخروطات** ، **مقاله در حساب هندی** ، **کتاب در پرگار قطوع مخروطی**، **استخراج چهار خطّ** (ظاهراً درحلّ معادله‌ی درجه‌ی پنجم $x^5 = a$. رجوع شود به ۵۰۰۱۵۰۶۰۱ § ، مثال چهارم) .

(†) بعضی اورا اهل کرج نزدیك تهران کنونی ونسبت‌او راکرجی دانسته اند . رجوع شود به صفحات ۷۳ ـ ۷۵ ازمقاله‌ی عادل انبوبا درمجلّه‌ی **الدّراسات الادبیّه** (شماره‌ی دوم وسوم ، تابستان وپائیز ۱۳۳۸ ، نشریّه‌ی دانشگاه لبنان ، بیروت) وصفحات ٦٦ـ٦۹ ازملخّص فارسی همان مقاله درهمان شماره‌ی مجلّه‌ی مذکور .

یکی کتاب **الکافی فی علم الحساب** است که عمدةً مبتنی برکارهای یونانیان می‌باشد، و دیگر کتاب معروف اوست در جبر و مقابله، بنام **فخری**، که آنرا باسم فخرالملك واسطی (ابو غالب محمّد ابن علیّ ابن خلف)، وزیر بهاء الدّوله و سلطان الدّوله‌ی دیلمی و مقتول در ٤۰۷ ه‍ ق، تألیف کرده واز مهمترین تألیفات جبری دوره‌ی اسلامی است. فرانتس وپکه ترجمه‌ی فرانسوی ملخّصی از این کتاب را به ضمیمه‌ی مقدّمه‌ی جامعی درباب حلّ معادلات سیّال در دوره‌ی اسلامی درپاریس‌چاپ کرده است (۱۸۵۳)، و بالاخصّ درمقدّمه توضیح می‌دهد که کارهای ریاضیّون اسلامی در این باب مبتنی بر کارهای دیوفانتوس (§ ۳۰۲۰۲) بوده، ولی‌ریاضیّون مذکور راههای جدیدی برای حلّ مسائل سیّال کشف کرده و معادلاتی از درجات بالاتر طرح و حلّ کرده‌اند، و کارهای فیبوناتچی (*) که معمولا بدیع شمرده میشود اکثر ازکارهای ریاضیّون دوره‌ی اسلامی و خاصّه کتاب فخری گرفته شده است.

۳۰۴۰۵۰۸ § ابوالجود [ابوالجود محمّد ابن احمد ابن لیث] **-** وی از ریاضیّون بزرگ و معاصر ابوریحان بیرونی (۳٦۲-٤٤۰ ه‍ ق) بوده و در حلّ معادلات درجه‌ی سوّم و مسئله‌ی تثلیث زاویه و تقسیم دایره به هفت و نه جزء متساوی مطالعاتی کرده و در رساله‌ای، در پاسخ ابوریحان در باب تقسیم دایره به نه جزء متساوی، حلّ مسئله را به معادله‌ی درجه‌ی سوّم $x^3 + 1 = 3x$ باز گردانیده، و در رساله‌ی دیگری، که آن نیز در جواب سؤال ابوریحان است، مسئله‌ی مورد بحث (§ ۳۰۷۰۳) را به معادله‌ای از درجه‌ی چهارم باز گردانیده و معادله را بوسیله‌ی قطوع مخروطی حلّ کرده است (§ ۳۰۷۰۳). بالاخـره در جبر خیّام (§ ۵۰۱۱۰۱) اطّلاعات جالبی از کارهای ابوالجود درحلّ معادلات درجه‌ی سوّم آمده است.

۳۰۵§ تاریخچه‌ی علم جبر دردوره‌ی اسلامی- چنانکه سابقاًاشاره کردیم،

(*) لئوناردو فیبوناتچی (Leonardo Fibonacci) یالئوناردو دا پیسا (L. da Pisa)، ریاضیدان ایتالیائی واحتمالاً بزرگترین ریاضیون قرون وسطی در دنیای مسیحی بود. در حدود ۱۱۷۵ میلادی متولّد شده وبعد از ۱۲٤۵ وفات یافته است.

علم ریاضی دوره‌ی اسلامی مبتنی بر ریاضیّات هندی و یونانی است، و اگر چه تأثیر روشها و افکار دانشمندان این دو قوم در ریاضیّون اسلامی مورد بحث است، شاید با اطمینان خاطر بتوان گفت که، لااقلّ پس از مراحل اوّلیه‌ی نهضت علمی اسلامی، دانش ریاضی مسلمین ـ وبطور کلّی «اندیشه‌ی ریاضی» ریاضیّون اسلامی ـ تحت نفوذ آثار و افکار دانشمندان یونانی بوده است، و نه فقط پیروی از افکار ریاضی یونانیان و تقلید از ریاضیّون یونانی باعث محدودیتهائی درریاضیّات دوره‌ی اسلامی‌شده بود، بلکه تسلّط افکار فلسفی یونانیان درباب مفاهیم ریاضی (ازقبیل عدد و کمّیت) بردانشمندان دوره‌ی اسلامی بحدّی بوده که تحقیقات ریاضی آنان را هم سخت تحت تأثیر گرفته و شدیداً محدود ساخته بود (مثلا رجوع شود به ٤٠٢٠١ §)، وخاصّه ریاضیدانهای فیلسوف و فلاسفه‌ی ریاضیدان حقایق ریاضی را بازیچه‌ی اصطلاحات فلسفی میکردند، والبتّه در پیچ وخم این بازی گمراه میشدند ☆.

پس از این مقدّمه، می پردازیم به سیر عمومی دانش جبر در دست دانشمندان دوره‌ی اسلامی ـ در باب بعضی مسائل مخصوص بحث مفصّل تری در ۳۰٦۰۱ §§ ۳۰٦۰۹ ـ و۳۰۷۰۳ ـ ۳۰۷۰۱ §§ خواهد آمد.

بطور خلاصه میتوان گفت که جبر در دست علمای دوره‌ی اسلامی از جهاتی پیشرفت کرده و از طرف دیگر انحطاط یافته است.

اوّل‌دفعه ریاضیّون اسلامی جبر را وارد مرحله‌ی علمی کردند، و آنرا فی حدّ ذاته، و نه مثلا بصورت مجموعه‌ای ازمسائل متشتّت، مورد تحقیق قراردادند و معادلات سه درجه‌ی اوّل را طبقه بندی کردند (۳۰٦۰٦ §، و نیز ٤۰۲ §)، و در واقع میتوان گفت که اوّلین کتاب در **علم** جبر همان کتاب خوارزمی (۳۰٤۰٤ §) است، و در همین کتاب است که برای نخستین بار اعمال «جبر» و «مقابله» به صورت قواعد کلّی منظّماً استعمال میشود.

(☆) نمونه ی آن بحث بی بنیاد خیّام است در تخطئه‌ی حلّ معادله‌ی دو مجذوری ($x^4+ax^2+b=0$) به طریقی که امروز معمول است (٦۰٤۰۲۰۱ §).

پیشرفت دیگری که بدست ریاضیّون اسلامی در جبرحاصل شده **استعمال جبر درهندسه است و بالعکس**، و این امر در بسط هندسه‌ی تحلیلی تأثیر بسزائی داشته است. ✩

بطور کلّی، در مطالعه‌ی آثار ریاضیدانان دوره‌ی اسلامی در جبر، گاهی به مواردی برمیخوریم حاکی از اینکه افکار و روشهائی مؤثّر در بسط علم در ذهن آنان در شرف تکوین بوده، ولی‌متأسّفانه ازقوّه بفعل درنیامده یاصورت منظّم علمی نگرفته است، و شاید، چنانکه وپکه میگوید، «این امر بعلّت نداشتن اندیشه‌ی نافذ و مخترع نبوده بلکه صرفاً بسبب نداشتن وقت کافی بوده است» (رجوع شود به‌آخر ۳۰۶۰۸ §).

ازطرف دیگر، با اینکه کتاب علم حساب دیوفانتوس (۳۰۲۰۲ §) در قرون اولای اسلامی‌بدست دانشمندان حوزه‌ی علمی‌بغداد رسیده بود، **ریاضیّون دوره‌ی اسلامی روش علامتی** دیوفانتوس **را به یکسو نهاده بهمان مرحله‌ی لفظی** (۳۰۱۰۲ §) **عقب رفتند**، و این همان انحطاطی است که بآن اشاره کردیم.

تحلیل چگونگی‌این مسئله، وبطور کلّی‌تحلیل تأثیرافکار یونانی در دانشمندان دوره‌ی اسلامی مسئله‌ایست غامض که شاید هیچگاه بدرستی روشن نشود. از یك طرف می‌بینیم که محقّق نکته سنجی‌چون خیّام چنان از روش دیوفانتوس غافل است که در سراسر رساله‌ی جبر وی کوچکترین اثری از استعمال علامات اختصاری دیده نمی‌شود، و از طرف دیگر درحل معادله‌ی $x^2+bx=a$ (۵۰۴۰۲ §) زوج بودن b و مجذور کامل بودن $a+(b/2)^2$ را شرط امکان مسئله می‌شمارد، و این قید را جز به تقلیدی بی مورد از دیوفانتوس حمل نتوان کرد، چو در مسائلی که مورد بحث دانشمند یونانی است نوع مسئله مقتضی مُنطق بودن جوابها است.

نمونه‌ی فاحش تر این روشِ متناقض کتاب معروف فخری است (۳۰۴۰۵۰۷§)

(✩) رجوع شود به مطالب مقتبس از وپکه در ۳۰۷۰۲ §؛ ونیز: سمیث، **تاریخ**، جلد دوّم، ص ۳۲۵.

که مبتنی بر کتاب دیوفانتوس ولی‌از آن جامعتر و متضمّن طرق نوین ومسائل جدید و از درجات بالاتر از دوّم است ، ولی از مرحله‌ی لفظی تجاوز نمی کند .

اگر از دیوفانتوس که مستقلّاً به مسائل عددی راجع به معادلات پرداخته است بگذریم ، باید گفت که در نزد یونانیان هندسه مرکز ریاضیّات بود ، و سایر مباحث این علم عملا تحت‌الشّعاع وتابع آن ملحوظ میشد . اما تسلّط همین فکر برریاضیّون اسلامی که خود جبر را به مرحله‌ی علمی وارد کردند ــ و خاصّه درمورد خیّام که تجرید را بآن پایه رسانیده که معادلات‌را فی‌حدّ ذاته‌وقطع نظر از منشاء (مثلا هندسی) آنها مورد بحث قرار میدهد ــ موجب شگفتی است .

✡ ✡ ✡

منظور از سطور فوق ، چنانکه اشاره کردیم ، نظر اجمالی به سیر عمومی علم جبردر دوره‌ی اسلامی بود ، و بهمین جهت از مسائل ومباحث خاصّ وکارها وزحمات ریاضیّون دوره‌ی اسلامی‌درحلّ وبحث آنها صحبتی نکردیم . دراین باب آنچه مربوط به کلّیات جبر و معادلات درجات اوّل و دوّم و دستگاههای معادلات ومعادلات سیّال است با کمال‌اختصار در۳۰۶۰۹ـ۳۰۶۰۱ §§ گفته خواهد شد . تحقیقات ریاضیدانان اسلامی در معادلات درجه‌ی سوّم در ۳۰۷۰۲ § و۴۰۲ § و درمعادلات درجات بالاتر در۳۰۷۰۳ § باجمال آمده‌است . امّا درباب سایرمطالب مربوط به جبر وعلم حساب ــ از قبیل دستورات جمع کردن سلسله ها ، یا تحقیقاتی از قبیل آنچه ثابت ابن قرّه (۳۰۴۰۳۰۱ §) در اعداد مُتحابّه کرده است ، و غیره ــ چیزی نمیگوئیم ، و کسانی کــه خواستار اطّلاعاتی دراین مسائل هستند باید بــه کتابهای تاریخ علوم ریاضی مراجعه کنند .

۳۰۶ § معادلات جبری

۳۰۶۰۱ § مقدّمه ــ موضوع اصلی‌جبرمقدّماتی حلّ معادلات ومسائلی‌است که بآنها باز میگردد . بنا برین ، درین مبحث تفصیل بیشتری در تاریخ حلّ معادلات و مطالب وابسته به‌آن می‌آوریم .

۳۰٦۰۲ § علامات جبری ـ قدیمترین علامات اعمال که از آنها خبرداریم از مصریان‌است (۳۰۱۰٤§) ، ولی‌ظاهراً دیوفانتوس(۳۰۲۰۲§) اوّل کسی‌است که کوشش منظّمی در وضع علاماتی برای اعمال کرده است ، امّا چون قدیمترین نسخه‌ای که از کتاب علم حساب او در دست است قریب هزار سال بعد از اصل کتاب نوشته شده نمیتوان اطّلاع قاطعی از علاماتی که وی بکار برده عرضه کرد .

۳۰٦۰۳ § اعداد منفی ـ درین مقام ذکر مختصری از اعداد منفی خالی از فایده نیست ، زیرا بی خبری ازین اعداد وتسهیلات و تعمیم‌های ناشی از آنها یکی از مشکلاتی بوده است که متقدّمین در طبقه‌بندی وحلّ‌معادلات ومسائل جبری داشته‌اند، و مثلا خوارزمی بجای اینکه از معادلات درجه‌ی دوّم بطور کلّی بحث کند ، وخیّام بجای بحث از معادله‌ی کلّی درجه‌ی سوّم ، در طرفین معادله ، بوسیله‌ی اعمال «جبر» و «مقابله» (۳۰٤۰٤ §) ، نقل و انتقالاتی بعمل میآورند که ، باصطلاح ما ، جمله‌ی منفی درمعادله نباشد . وهم‌چنین، خیّام ، باتسامحی که از وی عجیب است ، وباحتمال قوی ناشی از تسلّط افکار یونانیان بر اوست ، درمواردی هم که شکل بالعیان میتواند ریشه‌های منفی را نشان دهد آنها را نا دیده میگیرد .

مفهوم عدد منفی را فی‌حدّ ذاته نباید با عدد منفی بعنوان مفروق یا با احکامی از قبیل $(a-b)(c-d)=(ac+bd)-(ad+bc)$ که متضمّن اعمالی‌براعداد منفی است اشتباه کرد . بسیاری ازاینگونه قواعد قرنها پیش از پیدایش مفهوم اعداد منفی معلوم بوده است . چینیها در ایّام قدیم (لااقل از حدود ۲۰۰ سال قبل از میلاد) از اعداد منفی‌بعنوان‌مفروق صحبت کرده‌اند، ونیز ، اگرچه دیوفانتوس معادله‌ی $4x+20=4$ را بعلّت اینکه منجر به $x=-4$ میشود « نامعقول » شمرده است ، مسلّماً از مفهوم انتزاعی عدد منفی بی خبربوده ، و حال‌آنکه یونانیان احکام هندسی معادل دستورات بسط $(a-b)^2$ و$(a-b)(a+b)$ را میدانسته و ثابت کرده بودند .

ریاضیّون عربی نویس درین باب چیزی برآثار یونانی نیفزوده‌اند و محمّد ابن موسی خوارزمی ، و دیگران که بعد از او به جبر پرداخته اند ، همان قواعد

علامات رابدون تصرّفی تکرار کرده‌اند ، وفقط از دوره‌ی رنسانس ببعد است که اعداد منفی فی حدّ ذاته بتدریج مورد توجّه قرار میگیرد . در نتیجه‌ی همین بی خبری ، طبقه بندی معادلات در نزد علمای اسلامی ناقص بوده ، زیرا مثلا شامل معادله‌ی $ax+b = o(a > o, b > o)$ نمیشده است .

۳۰۶۰۴ § **جُمَل معادله** – پیش‌ازرواج استعمال‌علامات ، الفاظی برای نامیدن جمل‌معادلات بکارمیرفت . آحمس(§ ۳۰۱۰٤) مجهول را **آهِه** یا **هائو** ، بمعنی «جرم» یا «مقدار» یا «توده» و دیوفانتوس آنرا « عدّه‌ی نامعلومی ازآحاد » مینامیده‌اند . در جبر هندسی یونانیان ، قوّه‌ی دوّم مجهول (یعنی حاصل ضرب آن در خودش) «عدد چهار گوشه » یا **دُونامیس** (= قوّه) خوانده میشده . دیافانتوس قوّه‌ی سوّم را **کُوبوس** (= مکعّب) و قوّه‌ی چهارم را **دونامودونامیس** (قوّه ــ قوّه) وقوّه‌ی‌پنجم را **دوناموکوبوس** (قوّه ــ مکعّب) و قوّه‌ی ششم را **کوبوکوبوس** (مکعّب ــ مکعّب) خوانده است .

ریاضیّون عربی نویس مجهول را **شیء** خوانده‌اند ، و لفظ لاتینی **رِس** (res) ، بمعنی شیء ، که درقرون وسطی درمغرب زمین برای نامیدن مجهول بکار میرفته ناشی از همین جا است . ضمناً ریاضیّون عربی نویس مجهول‌را (نسبت به مربّع‌آن) **ضلع** یا **جذر** نیز میخواندند . لفظ اخیردر لغت بمعنی بیخ و ریشه است ، و لفظ لاتینی **رادیکس** (radix) ، بمعنی‌ریشه، که دراروپابکارمیرفته ناشی‌ازین‌تسمیه میباشد ، وبعضی‌معتقدند که علامت $\sqrt{}$ ، که امروز برای نشان دادن ریشه بکار می‌رود و اوّل بار درآثار ربع اوّل قرن شانزدهم دیده میشود ، از شکل حرف r گرفته شده است .

ریاضیّون عربی نویس قوّه‌ی دوّم مجهول را **مال** میخواندند ، و لفظ لاتینی **کِنْسوس** (censos) ، بمعنی ثروت ، کـه سابقاً در اروپا به همان منظور بکار میرفته ازین تسمیه ناشی است . قوّه‌ی سوّم را **کَعْب** یا **مکعّب** مینامیدند ، ونام سایر مراتب مجهولات ترکیبی ازین الفاظ بوده است ، باین شرح :

مجهول (x)	شیء ، جذر ، ضلع
قوّه‌ی دوّم مجهول (x^2)	مال ✩
قوّه‌ی سوّم مجهول (x^3)	کعب
قوّه‌ی چهارم مجهول (x^4)	مال مال
قوّه‌ی پنجم مجهول (x^5)	مال کعب
قوّه‌ی ششم مجهول (x^6)	کعب کعب
. . .	. . .

جمله‌ی معلوم معادله نیزاسامی مختلف داشته است . دیوفانتوس آنرا **مونادِس**، و ریاضیّون عربی نویس « عدد » ، « عدد مفروض » ، « اعداد » ، «آحاد» ، وحتّی «دراهم» (جمع «درهم») خوانده‌اند † .

دیوفانتوس ضریب را **پْـلِطوس** مینامیده که به معنی گروه‌است، وریاضیّون عربی‌نویس گاهی لفظ **عدّه** را برای این منظور بکار میبردند ، ولی اغلب ضریب را اسقاط میکردند . (رجوع شود به امثله‌ی **۳۰۶۰۵ §**) .

۳۰۶۰۵ § بیان معادلات ـ بیان معادلات تابع علامات اعمال و الفاظ یا علاماتی است که نماینده‌ی جمل معادله است .

(✩) باید دانست که لفظ **مال** به معنی مطلق مقدار نیز استعمال شده است . مثلا یکی از مسائل **فخری** (**۳۰۴۰۰۵۰۷ §**) و حلّ آن اینست :

« مال ضربته فی نفسه عاد اربعة امثال المال الاول فاجعل المال شیئا واضربه فی نفسه یکن **مالا** و ذلك یعدل اربعة اشیاءِ والشیءِ اربعة دراهم و هوالمال » .

که در آن فقط در موردی که لفظ **مال** با حروف درشت چاپ شده بمعنی مربع است :

« مقداری است که اگر در خودش ضرب شود چهار برابر مقدار اول حاصل گردد . مقدار اول را شیءِ [x] قرار دهید ، و آنرا در خودش ضرب کنید . مال [x^2] حاصل می‌شود ، که معادل‌چهار شیءِ [$4x$] است . پس شیء چهار درهم است ، و آن همان مقدار [مطلوب] می‌باشد.

(†) لفظ « عدد » مترادف با آنچه ما امروز عبارت جبری می‌خوانیم نیز استعمال می‌شده است .

در دوره‌ی اسلامی بیان معادلات جنبه‌ی لفظی صرف داشته ✡ ، و مثلا معادله‌ی $x^2 + bx = a$ را چنین بیان میکردند :

امول و جذور تعدل عددا (خوارزمی)

(مالهائی و جذرها معادل عددی است) .

مال و جذر یعدل عددا (خیّام)

(مالی وجذر معادل عددی است) .

والبتّه استعمال « ضلع » و «اضلاع» و « شیء » و «اشیاء» (§ ۳۰۶۰٤) بجای «جذر» و « جذور» هم معمول بوده است .

§۳۰۶۰۶ طبقه بندی معادلات ـ اوّلین طبقه بندی معادلات در آثار دانشمندان اسلامی همان است کـه در جبر و مقابله‌ی خوارزمی (§ ۳۰٤۰٤) آمده است . وی «اعدادی✡✡ را کـه در« جبر و مقابله » محتاج الیه است منحصر به سه دسته ـ جذرها (مجهول) و مالها (قوّه‌ی دوّم مجهول) وعدد (معلوم) ـ میشمارد ، † وسپس از معادله‌ی بعضی ازین اقسام با بعضی دیگر یا معادلات بین سه قسم مذکور صحبت میکند . در اصطلاح ریاضیّون اسلامی معادلاتی کـه ما دوجمله‌ای میخوانیم **مُفْرَدات** و معادلاتی که بیش از دوجمله داشته اند **مقترنات** و گاهی مرکّبات خوانده می‌شدند . مفردات خوارزمی عبارتست ازین سه معادله :

مالهایی معادل جذرهایی است $(ax^2 = bx)$

مالهایی معادل عددی است $(ax^2 = c)$

جذرهایی معادل عددی است $(bx = c)$

دسته‌ی دوّم در طبقه بندی خوارزمی معادلات کامل درجه‌ی دوّم است :

معادله‌ی بین مالها و جذرها با عدد $(x^2 + bx = a)$

معادله‌ی بین مالها و عدد با جذرها $(x^2 + a = bx)$

(✡) به ذیل ✡ صفحه‌ی ۱۱۳ نیز رجوع کنید .

(✡✡) رجوع شود به ذیل † صفحه‌ی ۱۱۳ .

(†) **کتاب الجبر والمقابله** لمحمد ابن موسی الخوارزمی ، چاپ مصر ، ۱۹۳۷ ، ص ۱۶ .

معادله‌ی بین جذرها و عدد با مالها ($bx + a = x^2$)

خیّام اول کسی است که ازین مرحله گذشته معادلات سه درجه‌ی اوّل و دوّم و سوّم را طبقه بندی کرده است (۵۰۲ § و ۶۰۴۰۳ §).

طبقه بندی معادلات را بر حسب درجه از کارهای ریاضیّون اروپائی میدانند، و درواقع چنین طبقه بندی باتوجّه به ضرایب حرفی که ممکن‌است مثبت یا منفی باشند ازقرن هفدهم رواج یافته ☆، ولی‌مطلبی که درحدود اطّلاعات محدود نگارنده تازگی دارد اینست که طبقه بندی معادلات سه درجه‌ی اوّل‌در **رساله‌ی تحلیل** . . . خیّام (قسمت ششم کتاب‌حاضر)، برخلاف آنچه در رساله‌ی وی درعلم جبر آمده (۵۰۲§)، براساس درجه‌ی معادله است، بدین معنی کـه در این رساله، پس از اشاره به معادلات درجات اوّل و دوّم **ابتداء از«معادله‌ی بین‌کعب وسایرمراتب»، یعنی معادله‌ی درجه‌ی سوّم، سخن میرود، وسپس این معادلات رابه مفردات ومقترنات تقسیم میکند** (۶۰۴۰۳§).

چنانکه قبلا اشاره کردیم (۳۰۶۰۳ §)، طبقه‌بندی معادلات قبل از کشف و رواج اعداد منفی ناقص بوده است.

۳۰۶۰۷ § حلّ‌معادلات درجات اوّل و دوّم ــ باحتمال قوی حل معـادلات دراوایل بوسیله‌ی «امتحان» انجام میگرفته؛ ولی حتّی در زمان‌آحمس (حدود ۱۵۰۰ ق م یا پیشتر) طرق امتحان تا حدّی منظّم و از صورت حدس صرف خارج شده بود † و در واقع طریقه‌ی‌خطأین در استخراج مجهولات‌صورت کامل شده و منقّحی ازطریقه‌ی «امتحان» و «تصحیح» است، و این طریقه بوسیله‌ی ریاضیّون دوره‌ی اسلامی به اروپائیان رسیده است.

در باب معادلات ساده‌ی درجه‌ی اوّل مطلب قابل ذکری نیست جز یادآوری

(☆) سمیث، **تاریخ**، جلد دوم، ص ۴۴۳.

(†) رجوع شود به ۳۰۱۰۴ §، وبرای توضیحات نسبةً جامع به سمیث، **تاریخ**، جلد دوم، ص ۴۳۶.

تنقیح حلّ این معادلات بوسیله‌ی اعمال «جبر» و «مقابله» (۳۰۴۰۴ §) .

قدیمترین اثر مشتمل بر حلّ مسائلی که صورت جبری آنها از درجه‌ی دوّم است پاپیروس برلن است (۳۰۶۰۸ §) ☆ .

جبر هندسی یونانیان (۳۰۲ §) مشتمل بر مسائلی است که از نظر جبری به معادلات درجه‌ی دوّم باز میگردد ، و تفصیل این مطلب در فروع ۳۰۲ § گذشت .

از اطلاعات هندیان در ۳۰۳۰۲ § یاد کردیم .

حلّ معادلات کامل درجه‌ی دوّم در کتاب خوارزمی (۳۰۴۰۴ §) مبتنی بر طرق یونانی است . وی این معادلات را ، عند اللّزوم پس از تقسیم طرفین بر ضریب جمله‌ی درجه‌ی دوّم ، به سه دسته تقسیم میکند(۳۰۶۰۶ §) که باعلامات امروزی چنین نوشته می‌شود :

$$(۱) \qquad x^۲ + bx = a,$$

$$(۲) \qquad x^۲ + a = bx,$$

$$(۳) \qquad bx + a = x^۲ ,$$

و سپس به ذکر طریق حلّ هر یك و اثبات هندسی آن می پردازد . برای مزید توضیح روش خوارزمی را درمعادله‌ی اوّل با تفصیل و در دو معادله‌ی دیگر به اجمال می‌آوریم. ☆☆

(I) ـ « **مالی وده جذر آن معادل سی و نه درهم است** » . †

« مفتاح آن اینست که جذرها را نصف کنیم وآن دراین مسئله پنج است . پس آنرا در مثل خودش ضرب می کنیم می‌شود بیست و پنج و آنرا برسی و نه می‌افزائیم میشود شصت وچهار. پس جذرآنرا میگیریم وآن هشت است . پس نصف جذرها را که پنج است از آن میکاهیم سه باقی‌میماند وآن جذر مالی‌است که میخواستیم وآن مال نه است » .

(☆) سمیث ، **تاریخ** ، جلد دوم ، ص ۴۴۳ .

(☆☆) با استدلال خیام در اجزای ۵۰۴ § مقایسه کنید .

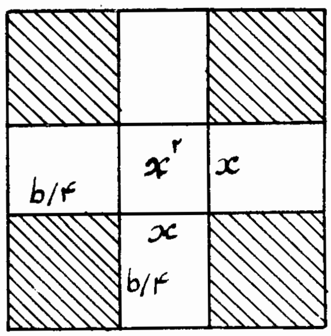
(†) $x^۲ + 10x = ۳۹$. صورت کلی : $x^۲ + bx = a$.

خلاصه‌ی این بیان طولانی اینست که جواب معادله‌ی (۱) چنین میباشد :

$$x=\sqrt{(b/۲)^۲+a}-(b/۲)$$

سپس خوارزمی دو دلیل دراثبات طریقه‌ی مذکور می‌آورد که هر دو بعلّت روش لفظیِ وی خیلی طولانی است و خلاصه‌ی آنها اینست .

دلیل اوّل – مال (یعنی $x^۲$) رابوسیله‌ی مربّعی به ضلع x نمایش‌میدهد . چون هرضلع مربع را b/٤ امتداد داده قسمت‌خالی از پردازشکل را تمام کنیم ، سطح قسمت خالی از پرداز $x^۲+bx$ خواهد بود ، کـه بنا برمعادله مساوی a است . حال قسمت خالی‌ازپرداز را باافزودن چهارمربّع ، هریك به مساحت $b^۲/۱٦$ ، به صورت مربّعی در می‌آوریم . سطح این مربع $a+(b/۲)^۲$ است ، ولهذا ضلع آن کـه در شکل x+b/۲

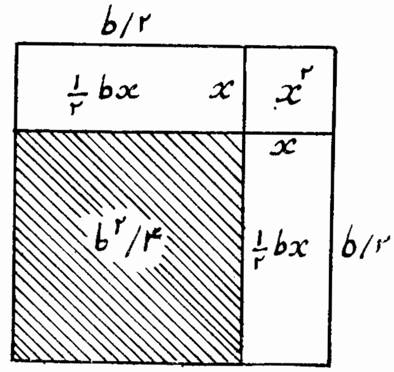


است ، برابر $\sqrt{(b/۲)^۲+a}$ میباشد ، و بالنّتیجه

$$x=\sqrt{(b/۲)^۲+a}-(b/۲)$$

(البتّه خوارزمی از ریشه‌ی منفی بی خبراست) .

دلیل دوّم – در دوطرف مربّعی که نمایش مال ($x^۲$) است دو مستطیل که ضلع دیگر هریك b/۲ است میسازیم .



قسمت خالی از پرداز در شکل $x^۲ + bx$ و بموجب معادله مساوی a است ، و چون قسمت پرداز دار را که $(b/۲)^۲$ است بر آن بیفزائیم ، مربع بزرگ ، بمساحت $(b/۲)^۲ + a$ حاصل میشود ، که بالنّتیجه ضلع آن $\sqrt{(b/۲)^۲ + a}$ است ، و چون همین ضلع در شکل $x + b/۲$ است ، خواهیم داشت :

$$x = \sqrt{(b/۲)^۲ + a} - (b/۲)$$

(II) – **«مالی و بیست و یك درهم معادل ده جذر آنست»** . ✩

جواب این معادله را خوارزمی چنین میدهد :

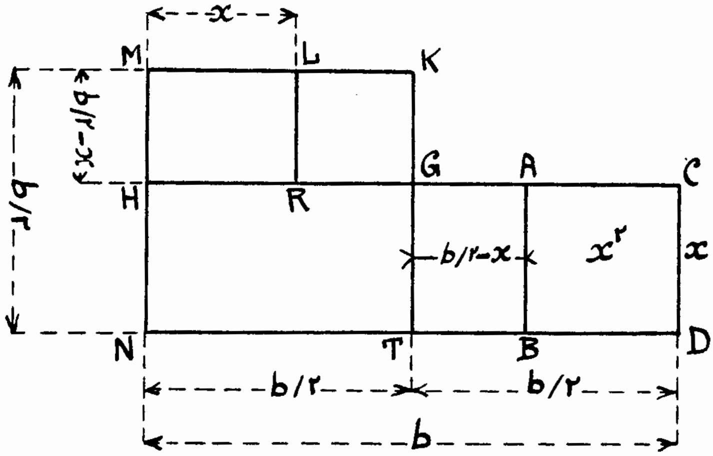
$$x = (b/۲) \pm \sqrt{(b/۲)^۲ - a}$$

و گویداگر $a > (b/۲)^۲$ مسئله ممتنع‌است واگر $a = (b/۲)^۲$ جواب‌معادله $x = b/۲$ میباشد ، ونیز گوید که فقط همین صنف ازمعادلات سه جمله‌ای درجه‌ی دوّم است که درآن می‌توان با افزودن $\sqrt{(b/۲)^۲ + a}$ به $b/۲$ یاکاستنش از آن عمل کرد ، یعنی فقط همین صنف است که ممکن است دو جواب (مثبت) داشته باشد .

دلیل (†) ـ فرض کنیم $AD = x^۲$ و $HB = a$. نقطه‌ی G وسط HC است. مربّع GL را که ضلعش مساوی AG است ساخته شکل را تمام میکنیم .

(✩) $x^۲ + ۲۱ = 10\,x$. صورت کلی : $x^۲ + a = bx$.

(†) خوارزمی در مورد معادله‌ی $10\,x = ۲۱ + x^۲$ استدلال می‌کند .



بموجب‌شکل $HD = x^{۲} + a = HN . HC$ ، ولهذا بموجب‌معادله، $HN . HC = bx$ ؛ وچون $NH = x$ ، $HC = b$. اینک میتوان مقادیرطولها رابه شرحی که درشکل‌مندرج است تعیین‌کرد . سپس‌گوئیم $MR = TA$ ، ولهذا

$$HT + MR = HT + TA = HB = a$$

$$KR = MT - (HT + MR) = (b/۲)^{۲} - a$$

$$x = AC = CG - GA = b/۲ - GK = (b/۲) - \sqrt{(b/۲)^{۲} - a}$$

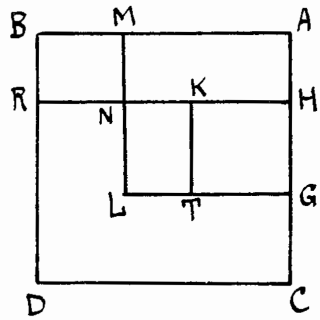
(خوارزمی برای جواب دیگرمعادله دلیل نمی‌آورد) .

(III) ـ «سه جذر وچهار عدد معادل مال است» . ✩

جواب : $x = \sqrt{(b/۲)^{۲} + a} + (b/۲)$

دلیل ـ فرض کنیم $AD = x^{۲}$ و $HC = b$. نقطه‌ی G وسط HC است. مربع HT را می‌سازیم و LT را مساوی AH جدا کرده شکل را تمام میکنیم . بموجب شکل

(✩) $۳x + ٤ = x^{۲}$. صورت‌کلی: $bx + a = x^{۲}$.



$HD = bx$ و $HB = x^۲ - bx$ ، ولهذا بموجب معادله ، $HB = a$. بآسانی معلوم میشود که $BN = TN$ ، و

$$a = HB = AN + NB = AN + TN$$
$$GM = HT + (AN + TN) = (b/۲)^۲ + a$$
$$x = AG + GC = \sqrt{(b/۲)^۲ + a} + (b/۲)$$

فهوالمطلوب .

طریق خیّام درحلّ معادلات درجه‌ی دوّم سه جمله‌ای ساده تر ومنقّح تر از طریق خوارزمی ولی برهمان اساس است (§§ ۵۰۴۰۲–۵۰۴۰۴) .

§۳۰۶۰۸ دستگاههای چند مجهولی ـ قدما بادستگاههای‌چندمجهولی‌زیاد سروکار نداشته‌اند . قدیمترین اثر ازمسائل چند مجهولی درمصربدست آمده است ، و پاپیروسهای برلن (شماره‌ی ۶۶۱۹) و کاهون ، مربوط به دوره‌ی پادشاهی وسطای مصر (حدود ۲۱۶۵ ـ ۱۷۰۰ ق م) ، مشتمل بر مسائلی ازین قبیل میباشد . ☆

ظاهراً دستگاههای چند مجهولی درقرن‌چهارم قبل‌ازمیلاد دریونان سابقه داشته است . درآثار دیوفانتوس (§ ۳۰۲۰۲) نیز آثاری از اینگونه دستگاهها دیده میشود ، و وی مجهولات را « عدد اوّل» و «عدد دوّم» و غیره می‌خوانده است .

هندیان مجهولات را در دستگاهها با اسامی رنگها میخوانده‌اند .

(☆) سمیث ، **تاریخ** ، جلد دوم ، صص ۴۳۱ ـ ۴۳۲ .

در دوره‌ی اسلامی مسائل چند مجهولی چندان مورد توجّه نبوده است . دستگاه‌هایی که در کتاب فخری (§ ۳۰۴۰۵۰۷) آمده دستگاههای سیّال (§ ۳۰۶۰۹) است . در این مقام مقتضی است به نکته‌ی بسیار جالبی در کتاب فخری اشاره کنیم ، و آن اینست که کرخی در دو مسئله‌ی دومجهولی، عینابطریقی که ما با x و y عمل میکنیم ، مجهول دوّم را با لفظ خاصی‌نامیده است ، منتهی این لفظ در دو مسئله یکسان نیست ☆ و چنانکه وپکه می گوید ☆☆ ، این نمونه‌ای از قدم نهادن در راه کشف بسیار مهمی است ، واینکه ریاضیّون «عرب» این‌راه را به پایان نرسانیده‌اندبعلّت نداشتن اندیشه‌ی نافذ ومخترع نبوده بلکه صرفاً بسبب نداشتن وقت کافی بوده است .

۳۰۶۰۹ § معادلات و دستگاههای سَیّال- مسائلی که حلّ آنها به معادلات سیّال † باز میگردد بسیار قدیمی است ، ومسئله‌ی تعیین مثلّثات قائم‌الزّاویه با اضلاع صحیح ، یعنی‌تعیین جوابهای صحیح معادله‌ی $x^2 + y^2 = z^2$ ، مورد توجّه دانشمندان یونان از جمله فیثاغورس و افلاطون واقلیدس وارشمیدس بوده‌است . اما اوّل کسی که جدّاً به معادلات سیّال پرداخته دیوفانتوس (§ ۳۰۲۰۲) است .

اثـر عمده‌ی دانشمندان دوره‌ی اسلامی درین باب کتاب فخری از کرخـی (§ ۳۰۴۰۵۰۷) است .

۳۰۷ § معادلات درجه‌ی سوّم و درجات بالاتر .

۳۰۷۰۱ § چند مسئله‌ی تاریخی - در بحث تاریخی از معادلات درجه‌ی سوّم همواره اسم چند مسئله درکار می‌آید ، ولهذا بی مناسب نیست که مقدّمةً این‌مسائل‌را بخوانندگان معرّفی کنیم تابهنگام مراجعه سر گردان نشوند .

قدیمترین این مسائل یکی مسئله‌ی **تَضْعیف‌مکعّب** و دیگری مسئله‌ی **تثلیث**

(☆) در یك مسئله « قسط » و در دیگری « قسم » .

(☆☆) فخری ، ص ۱۱ .

(†) یك معادله با چند مجهول ، یا بطور کلی دستگاهی که در آن عده‌ی مجهولات بیش ازعده‌ی معادلات باشد . درین گونه معادلات معمولا جوابهای صحیح‌یا مُنْـطَق مطلوب است .

زاویه است ، و سه مسئله‌ی معروف به **مسائل ثلاثه** عبارتست از همین دو مسئله و مسئله‌ی **تربیع دایره** ☆ ، واین سه مسئله ازقدیم‌الایّام نزد یونانیان معروف بوده‌است.

منظور از **تضعیف مکعّب** تعیین مکعّبی است که حجمش دوبرابرحجم مکعّب مفروض باشد . اگر a ضلع مکعّب مفروض و x ضلع مکعّب مطلوب باشد ، حل مسئله به حلّ معادله‌ی $x^3 = 2a^3$ و ، از جنبه‌ی هندسی ، به رسم خطّی مانند x که درین معادله صدق کند باز می گردد . †

مسئله‌ی **تثلیث زاویه** تقسیم زاویه‌ی مفروض است به سه جزء مساوی ، و اگر a جیب زاویه‌ی مفروض و x جیب ثلث آن باشد ، از نظر جبری حلّ مسئله به حلّ معادله‌ی $4x^3 = 3x - a$ باز می گردد .

حلّ مسئله‌ی تضعیف مکعّب وبطور کلّی معادله‌ی درجه‌ی سوّم دو جمله ای را میتوان به مسئله‌ی دیگری باز گردانید که آن نیز شهرتی بسزا دارد ، و ماآنرا **درج دو واسطه‌ی متناسب بین‌دوطول مفروض** خوانیم .

(☆) یعنی رسم مربعی همسطح دایره‌ی مفروض .

(†) در باب‌مسئله‌ی تضعیف مکعب افسانه‌ای بااین مضمون از یونانیان روایت شده که در زمان افلاطون مردم آتن دوچار وبائی سخت شدند که اطباء از علاجش عاجز ماندند . ناچار به عابدی که در معبد دلوس مقام داشت مراجعه کردند ، و وی سروش داد که راه علاج وبا تضعیف میز آپولّون است . اجرای این امر بنظر مردم خیلی آسان آمد . پس میزی ساختند که ابعادش مضاعف ابعاد آن میز بود ، ولی بلا سخت‌تر گردید ، و خداوند مردم را آگاهی داد که منظورش میزی است که حجم آن دو برابر حجم میز آپولّون باشد . مردم وقتی خود را عاجز ازین‌کاردیدند از افلاطون استمداد جستند . . .

چنانکه در متن گفته می‌شود ، حل مسئله‌ی تضعیف مکعب را می‌توان به مسئله‌ی درج دو واسطه‌ی متناسب بین دو خط مفروض تحویل کرد ، و شاید صورت افسانه‌ی مذکور در کتب‌اسلامی (مثلا رجوع شودبه: مصاحب ، **جبر ومقابله‌ی‌خیام** ، ص ۲۷ ؛ یا شیخ بهاءالدین عاملی ، **کشکول** ، چاپ تهران ، ۱۳۱۸ ه ق ، صص ۱۷۳ ـ ۱۷٤) ـ که بموجب آن ، چون مردم از افلاطون استمداد جستند ، وی گفت چون « شما را نفرت از هندسه بوده حق تعالی شما را بااین صورت‌تنبیه فرمود » وگفت « هرگاه که استخراج خطین بر نسبت واحده توانید کرد مقصود حاصل گردد»ـ تلفیقی از افسانه‌ی یونانی و تحویل مذکور و اهمیت معروف هندسه در نزد افلاطون باشد .

منظور ازین مسئله اینست که هر گاه دو طول a و b مفروض باشد، دو طول مانند x و y تعیین کنیم که *

$$(۱) \quad a : x = x : y = y : b \cdot$$

ازین معادلات حاصل می‌شود:

$$(۲) \quad y^2 = bx, \qquad (۳) \quad xy = ab,$$

و بالنتیجه،

$$(٤) \quad x^3 = a^2 b, \qquad (٥) \quad y^3 = ab^2.$$

تعیین هندسی وسایط مطلوب از همین معادلات استنباط می‌شود: (۱) و (۲) بترتیب معادلات یك سهمی ویك هذلولی‌متساوی القطرین‌است، وبوسیله‌ی نقاط تقاطع این دو منحنی وسایط مطلوب بدست می آید. در حالت خاصّی که $b = ۲a$، نتیجه می‌شود $x^3 = ۲a^3$، که همان معادله‌ی مسئله‌ی تضعیف مکعّب است.

آخرین مسئله‌ای که ذکر آن لازم است **مسئله‌ی ارشمیدس** است، که مبنای تحقیقات جالبی درحلّ معادله‌ی درجه‌ی سوّم، خاصّه در دوره‌ی اسلامی، بوده است. ارشمیدس در شکل چهارم مقاله‌ی دوّم کتاب **کره واستوانه** باین مسئله می‌پردازد:

(مسئله‌ی ارشمیدس) کره‌ی مفروضی را بوسیله‌ی صفحه ای چنان قطع کنید که نسبت احجام دو قطعه کره‌ی حاصل مساوی مقدار مفروضی باشد.

دانشمند یونانی این مسئله را به مسئله‌ی ذیل † برمیگرداند:

(*) بعبارت مصطلح امروز، مقصود مسئله تعیین‌هندسی‌دو واسطه‌ی‌هندسی است‌بین a و b.

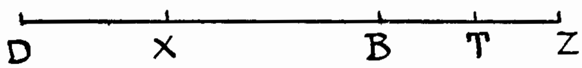
(†) حل این مسئله در کتاب **کره و استوانه** نیامده، ولی بقول ائوتوکیوس (Eutocios) ارشمیدس‌آنرا بوسیله‌ی فصل مشترك سهمی $x^2 = \frac{b^2}{c} y$ و هذلولی $(c - x)\, y = ac$ حل‌کرده است. برای اطلاع بیشتر رجوع شود به چـاپ جدید کتاب **آثارارشمیدس** (از ت. ل. هیث، نیویورك)، فصل ششم مقدمه (صص cxxiii-cxli) و صفحات ۶۲ ـ ۷۹ از مقاله‌ی دوم رساله‌ی **کره و استوانه** در همان کتاب.

ائوتوکیوس سابق‌الذکر، که در مآخذ اسلامی اوطوقیوس و اطوقیس (عَسقلانی) خوانده شد، از شارحین بعضی آثار ارشمیدس و آپولونیوس است، و در حدود ٤۸۰ میلادی در عسقلان (بر سواحل فلسطین) متولد شده است.

قطعه خط DZ و نقاط B و T برین خط مفروض است ، و B بین D و T جا دارد . نقطه‌ای مانند X بر DZ چنان تعیین کنید که

$$XZ : ZT = \overline{BD}^2 : \overline{DX}^2.$$

فرض کنیم $BD=a$ ، $ZT=b$ ، $ZD=c$ و $DX=x$. حلّ مسئله بحلّ معادله‌ی



$(c-x) : b = a^2 : x^2$ یا $x^3 + a^2b = cx^2$ باز میگردد .

مسئله‌ی ارشمیدس مورد توجّه خاص دانشمندان دوره‌ی اسلامی واقع شده ، و ظاهراً اوّل بار ماهانی (§ ۳۰٤۰۵۰۱) آنرا به معادله‌ی درجه‌ی سوّم سابق الذّکر (معادله‌ی ماهانی) باز گردانید ، وابوجعفرخازن این معادله را بکومك قطوع مخروطی حلّ کرده است (§ ٦۰٤۰٤) .

§ ۳۰۷۰۲ تاریخچه‌ی معادلات درجه‌ی سوّم ـ مسائلی که حلّ آنها به معادلات درجه‌ی سوّم باز میگردد اوّل بار در آثار یونانیان دیده می‌شود .

گویند بقراط خیوسی(§ ۳۰۲۰۱) مسئله‌ی تضعیف مکعّب را به درج دو واسطه‌ی متناسب بین دوخط باز گردانید ، و احتمالا منایخموس (§ ۳۰۲۰۱) مسئله‌ی اخیررا بوسیله‌ی فصل‌مشترك قطوع (۲) و(۳) (§ ۳۰۷۰۱) حل کرد . بعضی دیگراز ریاضیّون یونانی‌نیزبوسایل مختلف‌به‌حل مسائل تضعیف مکعّب وتثلیث زاویه‌پرداخته بودند .☆

نظر باین مسائل متفرّق که درآثار یونانی آمده ، بعضی چنین پنداشته اند که یونانیان معادلات درجه‌ی سوّم را حلّ کرده‌اند . درین باب وپکه سخنی مختصرومفید دارد که نقش دانشمندان دوره‌ی‌اسلامی را دربسط جبر ونیزتا حدّی ماهیّت جبرهندسی یونانیان (§ ۳۰۲۰۱) را روشن میسازد .

(☆) مصاحب ، **جبر خیام** ، صص ۱۸۵ ـ ۱۹۵ ، که مطالب آن عمدةً از **تاریخ ریاضیات** سمیث (جلد ۲ ، صص ۲۹۷ ـ ۳۱۵) گرفته شده است . نیز رجوع شود به : هیث ، **تاریخ** ، جلد اول ، صص ۲۱۸ ـ ۲۷۵ .

خلاصه‌ی بیان وپکه اینست که † اگرچه یونانیان بعضی مسائل هندسی حلّ کرده‌اند که اگر آنها را بصورت جبری درآوریم به معادلات درجه‌ی سوّم می‌رسیم، ولی‌قول و گمان کسانی که می‌پندارند یونانیان معادلاتی از درجه‌ی سوّم حلّ کرده‌اند دور از صواب است، چه حلّ هندسی مسئله‌ای ازین قبیل با **تشخیص اینکه حلّ آن به معادله‌ی درجه‌ی سوّم باز می‌گردد** تفاوت بسیار دارد؛ وبرشمردن‌منظّم‌جملگی معادلات درجه‌ی سوّم وساختن جواب یك یك آنها وبحث درحالات خاص هریك، که درآثار دانشمندان اسلامی وخاصّه در جبرخیّام آمده است، درآثار یونانیان بی‌سابقه می‌باشد. وسپس میگوید که چون درآثاریونانیان **هیچ اثری ازجبر نیست**، نمیتوان گفت که آنان معادلات درجه‌ی سوّم حلّ کرده‌اند، و نتیجه میگیرد که دانشمندان اسلامی اوّل دفعه علم جبررا درهندسه بکار برده‌اند وبالعکس، وبدین ترتیب، بنیان رابطه‌ی جبر و هندسه را نهاده‌اند که بعدها از منابع مهم بسط ریاضیّات بوده‌است.

در دوره‌ی اسلامی مسائلی که به معادله‌ی درجه‌ی سوّم باز میگردد - از جمله مسئله‌ی درج دو واسطه بین دو خط، مسئله‌ی ارشمیدس، مسئله‌ی تثلیث زاویه (§ ۳۰۷۰۱)، ومسئله‌ی تقسیم دایره به اجزای متساوی - وتحقیق درحلّ وبحث آنها بوسیله‌ی قطوع مخروطی مورد توجّه ریاضیّون بوده است، و این تحقیقات در رساله‌ی جبرخیّام به کمال می‌رسد، وچون درین باب بعداً باتفصیل کافی سخن خواهیم گفت، درین مقام به همین اندازه اکتفا میکنیم.

تبصره - ریاضیّون دوره‌ی اسلامی به حلّ عددی معادلات درجه‌ی سوّم موفّق نشدند، ولی در مواردی مقدار تقریبی ریشه‌ی مورد نظررا می‌توانستند حساب کنند (مثلا رجوع کنیدبه§۶۰۷). حلّ‌معادلات عددی‌درجه‌ی سوّم درقرن‌شانزدهم بوسیله‌ی ریاضیّون ایتالیائی انجام گرفت. ☆

(†) وپکه، **جبر عمر خیام**، ص xij. وپکه همه‌جا - حتی وقتی‌از خیام سخن‌می‌گوید- از «ریاضیون عرب» صحبت می‌کند، و البته مقصود وی از «عرب» «عربی‌نویس» است.

(☆) برای نمونه‌ای از تحقیقات ملا علی محمداصفهانی، ریاضیدان ایرانی قرن سیزدهم هـ ق، در این باب رجوع شود به: مصاحب، **جبر ومقابله‌ی خیام**، صص ۱۶۲ - ۱۶۳.

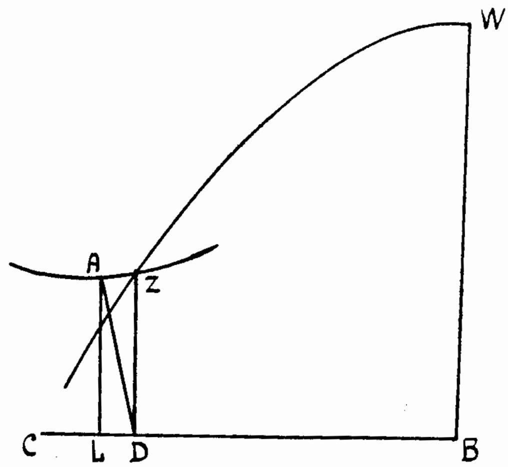
۴۰۷۰۳ § معادلات درجات بالاتر ـ بعضی از ریاضیّون دورهٔ اسلامی به برخی صُوَرِ معادلات درجهٔ چهارم برخورده و آنها را بوسیلهٔ قطوع مخروطی حلّ کرده‌اند. متأسفانه از کارهای منسوب به ابوالوفای بوزجانی (۳۰۴۰۵۰۳ §) در این باب اطّلاعی نداریم. امّا دو نمونه از کارهای ریاضیّون مذکور را وپکه درضمیمهٔ چهارم کتاب جبر عمر خیّام خود آورده است. یکی از آنها رساله‌ای است ☆ که ابوالجود (۳۰۴۰۵۰۸ §) درجواب سؤال ابوریحان پرداخته، وموضوع آن حلّ این مسئاله است:

خطّ BC ونقطهٔ A دردست است. ازاین نقطه خطّی چنان مرور دهید، که اگر D محلّ تلاقی آن با BC باشد، رابطهٔ $AD.\,BC+\overline{BD}^2=\overline{BC}^2$ بر قرار شود.

اگرفرض کنیم L تصویر A بر BC باشد، و $AL=a$ و $CB=b$ و $CL=c$ و $CD=x$، معادلهٔ مسئله چنین خواهد بود:

$$x^4-4cx^3+3c^2x^2+2c^2bx-c^2(b^2+c^2)=0$$

ابوالجود، پس‌ازتشکیل‌دادن‌معادله، آنرا بدین‌طرین‌حلّ‌میکند: BW را مساوی BC بر BC عمود کرده سهمیی به رأس W و محور WB وضلع قائم BC و هذلولی‌متساوی



(☆) عنوان نسخه‌ای که وپکه در اختیار داشته چنین‌بوده: «جواب‌الشیخ الفاضل ابی‌الجود محمدبن اللیث ایده‌الله تعالی عما ساله عنه الاخ‌الفاضل ابوالریحان محمد ابن احمد البیرونی». وپکه فقط ترجمهٔ فرانسوی صورت مسئله وحل و بحث آنرا در کتاب خود آورده است.

القطرینی به رأس A وضلع قائم AL ومحور AL رسم میکند. اگر Z محلّ تلاقی دومنحنی وD تصویر Z بر BC باشد، CD جواب معادله است. و سپس ابوالجود درشرایط امکان مسئله بحث میکند.

در دنبال رسالهی ابن لیث مسئلهی ذیل حل شده ولی مصنّف آن معلوم نیست:

ذوذنقهای مانند ABCD چنان رسم کنید که سطحش ۹۰ باشد و

$$AD = AB = BC = ۱۰ \cdot$$

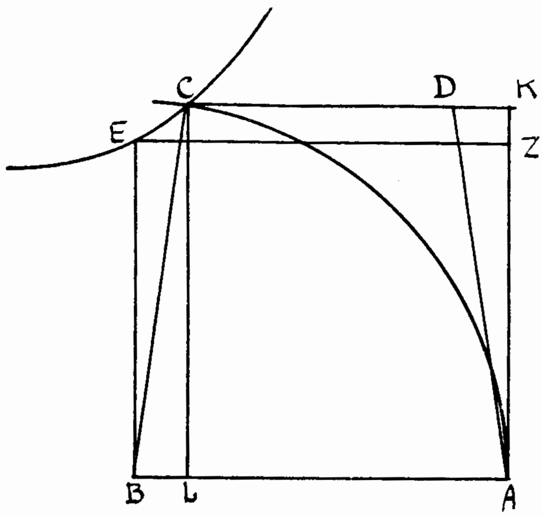
بطور کلّی اگر AD = AB = BC = a وسطح شکل $b^۲$ فرض شود معادلهی مسئله چنین خواهد بود:

$$x^{٤} - ۲ax^{۳} + ۲a^{۳}x - a^{٤} + b^{٤} = 0$$

حلّ کنندهی مسئله AB را قاعدهی اطول وAD وBC را دوساق ذوذنقه وفاصلهی D را از تصویر A برقاعدهی اقصر (مثلا نقطهی K) مجهول مسئله میگیرد. اگر این فاصله مساوی x فرض شود معادلهی مسئله چنین میشود:

$$x^{٤} + ۲00\,x = ۲0x^{۳} + ۱۹00$$

سپس مسئله را بـه این طریق حلّ میکند: طول AB را مساوی ۱0 اختیار



کرده عمود EB را مساوی AB $\frac{9}{10}$ برAB اخراج کرده مستطیل ABEZ را میسازد ، و برE هذلولیی با مجانبهای BA و AZ مرور میدهد ، و بمرکزB و شعاع BA دایره‌ای رسم میکند ، و میگوید ، چون AB>BE ، دایره هذلولی را قطع میکند . سپس BC را وصل کرده زاویه‌ی BAD را برابر زاویه‌ی ABC میسازد ، وAD را مساوی AB جدا کرده CD را وصل میکند . شکل ABCD ذوذنقه‌ی مطلوب است ، زیرا اگرL تصویر C برAB باشد ، ذوذنقه‌ی مذکور معادل مستطیل ALCK است ، و چون C برهذلولی قرار دارد ، سطح مستطیل مساوی سطح ABEZ است که مساوی ۹۰ میباشد .

بالاخره ، ظاهراً ابن هیثم (§۳۰٤۰۵۰٦) معادله‌ی درجه‌ی پنجم $x^5 = a$ را بوسیله‌ی تحویل آن به دستگاه

$$1 : x = x : y = y : v = v : w = w : a$$

حلّ کرده است (رجوع شود به §۵۰۱۰۶۰۱ ، مثال چهارم) .

قسمت چهارم

ملاحظات کلی در باب

کارهای جبری خیام

قسمت چهارم

ملاحظاتی در باب کارهای جبری خیام

۴۰۱ § خیام و آثار ریاضی او

۴۰۱۰۱ § خیام یا **عمر خیام** [غیاث‌الدین ابوالفتح (یا ابو حفص) عمرابن ابراهیم خیّام (یا خیّامی)] (✲) – خیّام از بزرگترین ریاضیّون قرون وسطی و از شعراء وحکماء ومنجّمین معروف ایران درنیمه‌ی دوّم قرن پنجم واوایل قرن ششم ﻫ ق است. وی در نیشابور متولّد شد، و هم درآنجا وفات یافت. تاریخ ولادت او معلوم نیست (†)، و وفاتش را به احتمال در۵۱۷ یا ۵۲۶ ﻫ ق شمرده‌اند. روایت ملاقات اوبا ابوعلی‌سینا (متوفّی در۴۲۸ ﻫ ق) ویا درس خواندن او درنزد وی بسیار مستبعد است.

گفته‌اند به سمرقند و بلخ وهرات و ری و اصفهان وحجاز سفر کرد، ونام وی جزء منجّمینی ذکرشده است که به امرسلطان ملکشاه سلجوقی، برای اصلاح سال و ماه ایرانی، در۴۶۷ ﻫ ق در ری یا اصفهان یا نیشابور گرد آمدند.

(✲) مقصود ما ازین مقدمه معرفی خیام است بعنوان عالم جبر، و ترجمه‌ی احوال او و گفتگو از وی بعنوان شاعر و حکیم یا منجم و عالم فیزیك و شریك در اصلاح سال شمسی ایرانی از موضوع بحث ما خارج است. برای این مطالب می‌توان به کتب و مقالات ذیل رجوع کرد:

چهار مقاله‌ی عروضی سمرقندی، بکوشش دکتر محمد معین، تهران ۱۳۳۳–۳۵، صص ۲۹۲ – ۳٦٤ و ٦۱۸ – ٦۲٤؛

مقاله‌ی مینورسکی در جلد سوم دایرةالمعارف اسلام؛

مقاله‌ی عباس اقبال‌آشتیانی، بعنوان **راجع باحوال حکیم عمرخیام نیشابوری، مجله‌ی شرق**، دوره‌ی اول، شماره‌ی ۸، مرداد ۱۳۱۵ ﻫ ش، صص ٤٦٦ – ٤۸۵.

تقی زاده، **دروس**، صص ۸۵–۹۲ (مخصوصاً درموضوع اصلاح سال وماه‌منسوب به خیام).

(†) سوامی گوویندا تیرتهه، از روی اوضاع کواکب بهنگام ولادت خیام و با استفاده از بعضی اطلاعات تاریخی و تواریخ احتمالی، ولادت اورا بهنگام طلوع آفتاب روز ۱۸ ماه مه‌سال ۱۰٤۸ (دوشنبه‌ی ۱۸ ذیقعده‌ی ٤۳۹ ﻫ ق) یافته است. رجوع شود بکتاب اوبنام The Nectar of Grace درشرح حال و آثار خیام، چاپ الله آباد ۱۹٤۱، صص XXXII _ XXXIV.

قبل از کشف رسالهٔ او درجبر(٤۰۳۰۱ §) ، و پیش ازاینکه تحقیقات جبری اوچنانکه شاید مورد توجّه قرار گیرد ، درمشرق زمین بواسطهٔ سهم عمده‌ای که در اصلاح سال و ماه برای او قائل بودند☆ و در اروپا بسبب ترجمهٔ انگلیسی رباعیّات وی بتوسط فیتزجرالد☆☆ شهرت یافته بود ، ومتأسفانه دانشمندان ومورّخین دانشمند اسلامی‌ازتحقیقات جبری‌اوبکلّی‌بی‌خبربودند(٤۰۲ §) ، وازاواخرقرن نوزدهم میلادی ببعد است که وی جای خود را درتاریخ ریاضیّات باز میکند ، تاآنجا که رسالهٔ او در جبریکی ازبرجسته‌ترین‌آثار قرون وسطائی درین‌علم شناخته میشود (§٤۰۲) .

آثارخیّام † ، علاوه بر تألیفات ریاضی (§٤۰۱۰۲) و رباعیّات معرف او، مشتمل است برچند رسالهٔ فلسفی و رساله‌ای بنام **رسالة فی‌الاحتیال لمعرفة مقداری الذهب والفضه فی‌جسم مرکب منهما** در وزن مخصوص ، و غیره .

٤۰۱۰۲ § آثار ریاضی‌خیام. (الف)رساله‌ی‌جبرخیام . عمده‌ترین اثر ریاضی خیّام رسالهٔ اوست درعلم جبر که متن‌آن درقسمت اوّل وترجمهٔ فارسی‌آن درقسمت پنجم کتاب حاضر چاپ شده است ، و بعداً به تفصیل ازآن سخن خواهـد رفت . این رساله را خیّام بنام «قاضی‌القضاة ابوطاهر» تدوین کرده است ، واین ابوطاهر را همان ابوطاهرعبدالرّحمان‌ابن‌علك(٤۳۰ – ٤۸٤ ه‌ق) ، فقیه‌شافعی توانگرو متنفّذ سمرقند شمرده‌اند†† که شرح شکایت بردن اوبه سلطان ملکشاه سلجوقی درضمن وقایع سنهٔ

(☆) مورد تأمل است . رجوع شود به : تقی زاده ، **دروس** ، صفحهٔ ۸۵ ببعد .

(☆☆ Edward Fitzgerald (۱۸۵۹ – ۱۸۸۳) . اولیـن ترجمهٔ فیتزجـرالد در ۱۸۵۹ بعمل آمد .

(†) در **جبر و مقابلهٔ خیام** (مصاحب ، تهران ، ۱۳۱۷) اسامی ۲۱ کتاب منسوب باو جمع‌آوری شده ، ولی صحت اسناد بعضی خالی از شبهه نیست ، (تقی زاده ، **دروس** ، ص ۸۵) . ونیز رجوع شود به **چهار مقالهٔ عروضی سمرقندی** ،باهتمام دکترمحمد معین، ص ۳۲٦–۳۳۱ .

(††) رجوع شود به صفحات XLIV _ XLV کتاب سوامی گوویندا تیرتهه مذکور درذیل صفحهٔ ۱۳۵ کتاب حاضر .

۴۸۲ ه ق درکامل ابن اثیرمذکور است . ☆

(ب) **رساله در تحلیل یك مسئله** . این نامی است که ما ، برای تسهیل اشاره ، به رساله‌ای از خیّام داده‌ایم که متن آن در قسمت دوّم و ترجمه‌ی فارسی آن در قسمت ششم کتاب حاضر بطبع رسیده ، و پیش از رساله‌ی جبر تألیف شده (۴۰۴۰۱ §) ، و موضوع آن تحلیل یك‌مسئله‌ی هندسی به معادله‌ی درجه‌ی سوّم و حلّ آن بوسیله‌ی قطوع مخروطی است .

ظاهراً اوّل‌بار است که این رساله (درجزء کتاب حاضر) بطبع میرسد ، و در باب آن بعداً با تفصیل بیشتر بحث خواهیم کرد (۴۰۴ §) .

(ج) **رسالة فی‌شرح ما اشکل من مصادرات کتاب اقلیدس** . این رساله در باب اصل موضوع معروف اقلیدس و مباحث مربوط به نسبت و تناسب در کتاب اوست ، وظاهراً تنها نسخه‌ی کامل موجود آن همان نسخه‌ی کتابخانه‌ی لیدن از بلاد هلنداست، واین نسخه ، ظاهراً بر طبق عبارتی که در پایان آن آمده ، در **۶۱۵** هق از روی نسخه‌ای که **خیام خود درسنه‌ی ۴۷۰ نوشته** استنساخ شده است .

این کتاب‌دراسفند ۱۳۱۴ ه ش به اهتمام دکترتقی‌ارانی‌درتهران‌چاپ‌شده‌است .

(د) **مشکلات الحساب** . نسخه‌ای ازین رساله در مونیخ موجود است . ☆☆

علاوه بر اینها ، رساله‌ای در صحّت طرق هندی برای استخراج جذر و کعب در **فهرست نسخ فارسی وعربی کتابخانه‌ی ملی شرقی بنکیپور** (کلکته ۱۹۰۸) بنام خیّام مذکور است † که تا کنون نسخه‌ای از آن بدست نیامده ، و ممکن است همان رساله‌ای باشد که خیّام در کتاب جبر خود بآن اشاره کرده است (۵۰۳۰۲§) . ††

(☆) **الکامل فی التاریخ** (قاهره) ، جلد ۸ ، صص ۱۴۸-۱۴۹ و ۱۵۹ .

(☆☆) مقاله‌ی مینورسکی در **دایرةالمعارف اسلام** ، جلد ۳ .

(†) ترجمه‌ی انگلیسی جبر خیام ، ص ۵ .

(††) درباب‌اطلاعات و تحقیقات ریاضیون اسلامی در استخراج ریشه و « دوجمله‌ای‌نیوتن» می توان به مقاله‌ی پاول لوکی (Paul Luckey) در مجله‌ی Mathematische Annalen (برلن ، گوتینگن ، هایدلبرگ ، ۱۹۴۸) ، جلد ۱۲۰ ، جزوه‌ی دوم ، صص ۲۱۷ - ۲۷۴ ، رجوع کرد .

۴۰۲ § خیام بعنوان عالم جبر- مآخذی که ما برای بررسی کارهای خیّام در علم جبر در دست داریم عبارتست از :

(۱) رسالهٔی او در جبر ،

(۲) رسالهٔی وی در حلّ یك مسئلهٔی هندسی بوسیلهٔی قطوع مخروطی که ظاهراً آنرا پیش از رسالهٔی اوّل نوشته است (§ ٤۰٤۰۱) ،

(۳) نتایج بررسیهای محقّقین غربی، چون ویکه و سُو ترْ وسارتن‌ودیگران ، که ، با استفاده ازوسایل فراوان، مطالعات کمابیش جامع درتاریخ علوم ـ یا بالاخصّ تاریخ ریاضیّات ـ کرده و پیشرفتهایی را که در ادوار مختلف در علوم حاصل‌شده باهم مقایسه نموده و به نتایجی رسیده‌اند ، و ما باید با کمال فروتنی از آنان سپاسگزار باشیم که با کوششهای‌خالصانهٔی‌خودنام‌دانشمندان‌ماو آثارایشانرا زنده گردانیده‌اند.(٭)

اینك وارد اصل مطلب می‌شویم .

ظاهراً کارهای خیّام در علم جبر در بسط این علم تأثیری نداشته است ؛ زیرا در اروپادر اواسط قرن هیجدهم و بلکه درنیمهٔی دوّم قرن نوزدهم از آن با خبرمی‌شوند، و در آن زمان علوم ریاضی در اروپا به چنان مرحله‌ای رسیده بود که جبر خیّام و امثال آن جز از جنبهٔی تاریخی اهمیّتی نمی‌توانست داشت . امّا در نزد خودمان ، نه فقط دلیلی نداریم که کسی تحقیقات خیّام را ادامه داده یا از آنها در بسط علم جبر استفاده‌ای‌برده باشد ، بلکه ـ برخلاف ـ شواهدی هست‌حاکی‌ازاینکه بعضی‌ریاضیّون

(٭) این مطلب مخصوصاً در مورد خیام صدق می‌کند . چنانکه در متن آمده است ، در مشرق زمین ، کسانی‌هم که اسمی از تحقیقات متقدمین در حل معادلات درجهٔی سوم شنیده بودند از کارهای اساسی خیام درین موضوع و بلکه اصلا از اینکه وی تحقیقاتی درین مبحث کرده است بی خبر بودند . با این وصف ، گمنامی خیام ازین جهت ، در دنیای اسلامی مغرب ، شگفت آور نخواهد بود ، و نمی توان بر مورخ دانشمند معروف عرب ، ابن خلدون (۷۳۲ ـ ۸۰۸ هق) ، خرده گرفت که سخن خود را در « جبر و مقابله » با این عبارات ختم می‌کند : « و قد بلغنا **ان بعض ائمة التعالیم من اهل المشرق** انهی المعادلات الی اکثر من هذه الستة اجناس و بلغها الی فوق‌العشرین و استخرج لها کلها اعمالا و ثیقة ببراهین هندسیة والله . . . » (**مقدمهٔی ابن خلدون** ، طبع م . کاترمر، پاریس ۱۸۵۸ ، جلد اول ، قسمت سوم ،ص ۹۹) .

عالی مقام هم که گاه گاه در ممالك اسلامی پیدا می‌شدند حتّی اسمی از کارهای جبری خیّام بنام وی نشنیده بودند، و اگرهم شنیده بودند از اصل موضوع بی خبر بودند. نمونه‌ی آن اینکه غیاث‌الدّین جمشید کاشانی ☆، ریاضیدان و منجّم و محاسب عالی مقام، در فصل هفتم از باب اوّل از مقاله‌ی پنجم کتاب معروف‌خود، **مفتاح الحساب**، پس از بیان شش صنف «مشهور» معـادلات (معادلات درجات اوّل و دوّم و یا قابل تحویل بآنها)، گوید ☆☆: «اما اگر تعادل بین چهار جنس متوالی، مانند عدد و شیء ومال و کعب، باشد ــ یعنی بعضی‌ازین چهارمعادل بعضی دیگراز آنها باشد ـــ... اقسام آن منحصر در بیست و پنج مسئله است †، و شش از آنها همانست که گذشت، ونوزده مسئله می ماند». سپس از قول شارح **بهائیّه** †† آورده است که

(☆) متوفی در صبح چهـار شنبه‌ی ۱۹ رمضان ۸۳۵ هق (محمد تقی دانش پژوه، **فهرست کتابخانه‌ی اهدائی سید محمد مشکوة به‌کتابخانه‌ی دانشگاه تهران**، جلد سوم، بخش دوم، تهران ۱۳۳۲، ص ۸٦٦).

(☆☆) **مفتاح‌الحساب**، تهران، ۱۳۰٦ ه ق، ص ۱٦۷؛ **مفتاح‌الحساب ورساله‌ی محیطیه**، مسکو، ۱۹۵٦، متن وترجمه وحواشی بزبان روسی از ب. آ. روزنفلد و آ. پ. یوشکویچ، صص ۱۹۲ و ۳۵٦ ــ ۳۵۷ و ٤۷٦.

(†) برای صورت این بیست و پنج مسئله (یعنی معادله) رجوع کنید به ٤.۳.٤.۲ §.

(††) ظاهراً مقصود کتاب **الفوائد البهائیة فی‌القواعدالحسابیه** است در علم حساب از عمادالدین عبدالله ابن محمد الخدام العراقی البغدادی (سارتن، **مدخل**، جلد ۳، قسمت اول، ص ۷۵۷. نیز رجوع شود به **کشف‌الظنون**، چاپ اسلامبول، ۱۹٤۳، جلد ۲، ستون ۱۲۹٦؛ و ص ٤۷٦ از کتاب سابق‌الذکر روزنفلد و یوشکویچ)، که از شاگردان خواجه نصیرالدین‌طوسی بوده. این کتاب را کمال‌الدین فارسی (٦٦۵ ــ ۷۱۸ ه ق)، از اجله‌ی ریاضیون‌وفیزیکدانان ایرانی، بنام **اساس‌القواعد فی‌اصول‌الفواید** شرح کرده و ظاهراً مقصود از «شارح بهائیه» که در مفتاح الحساب مذکور است همین کمال‌الدین فارسی است.

امام شرف‌الدین مسعودی مذکور در مفتاح‌الحساب، بنا بر تصریح قاضی زاده‌ی رومی در **رسالة فی‌استخراج جیب‌الدرجة‌الواحده** (چاپ تهران، ۱۲۹۹ هق، ص ٤۲. ضمیمه‌ی مفتاح ــ الحساب)، همان شرف‌الدین محمدابن مسعود [ابن محمد] مسعودی است. گویند وی شاگرد خیام بوده (**دو رساله دربار‌ه‌ی آثار علوی**، بکـوشش محمد تقی دانش پژوه، پنجمین نشریه‌ی **فرهنگ** ایران زمین، تهران، تابستان ۱۳۳۷)، و درین صورت بسیار محتمل است که تحقیقات خیام به مسعودی نسبت داده شده باشد.

« امام شرف‌الدّین مسعودی نوزده مسئله غیر از شش مسئله‌ی مشهور حلّ کرده‌وطریق استخراج مجهول را درآنها آشکارساخته ، وممکن است این‌نوزده مسئله همان نوزده مسئله باشد » . باحتمال قوی ، این نوزده مسئله همانهاست که خیّام آنها را حلّ کرده و درهرحال ، هر کس آنها را حلّ کرده ، شخصی چون غیاث‌الدّین جمشید از راه حلّ آنها بی‌خبربوده است ✡ .

خلاصه‌آنکه کارهای خیّام درعلم جبردر نزد ما گمنام بوده ، و دراروپا هم وقتی جلب توجّه کرده که ازلحاظ بسط علوم ریاضی فاقد هر گونه ارزشی بوده است .

بعلاوه، چنانکه در ۳۰۷۰۲ § دیدیم ، حلّ معادلات درجه‌ی سوّم وبلکه درجات بالاتر(۳۰۷۰۳ §) بوسیله‌ی قطوع مخروطی بی‌سابقه نبوده است .

معذلك ، برطبق تحقیقات ونظرمحقّقین‌غربی، **خیّام ـ خاصه درعلم جبرـ یکی ازبزرگترین ریاضیّون قرون وسطی است .** ✡✡

این‌رأی ناشی‌ازاینست که درتاریخ ریاضیّات **خیّام اوّل کسی‌است که به تحقیق منظم‌علمی‌درمعادلات درجات‌اوّل ودوّم وسوّم پرداخته ، وطبقه‌بندی‌تحسین‌آوری ازین معادلات آورده است † ، و در حلّ تمام صور معادلات درجه‌ی سوّم منظماً تحقیق‌کرده ، وبحلّ (دراغلب موارد ناقص) هندسی آنها توفیق یافته ، و رساله‌ی وی درعلم جبر ، که مشتمل براین تحقیقات است ، معرّف یك فکرمنظّم علمی است ؛ واین رساله یکی ازبرجسته‌ترین آثار قرون وسطائی و احتمالا برجسته‌ترین آنها درین علم است .** ††

در رسائل جبری خیّام دو نکته‌ی اساسی جلب توجّه میکند . اوّل اینکه وی

(✡) ملا محمد باقر ابن زین‌العابدین یزدی ، ریاضیدان قرن یازدهم هجری ، در کتاب **عیون الحساب** خود (تا کنون چاپ نشده) در پایان « مطلب چهارم » از قسمت جبر آن کتاب همین گفته‌ی غیاث‌الدین جمشید را نقل می‌کند .

(✡✡) سارتن ، **مدخل** ، جلد ۱ ، صص ۷۵۹ ـ ٦٥ .

(†) در این باب مخصوصاً به طبقه بندی برحسب درجه ، که در ۳۰٦۰٦ § ذکر شد ، رجوع کنید .

(††) سارتن ، **مدخل** ، جلد ۲ ، قسمت اول ، ص ۸ .

مشعر به اهمیّت تعمیم و احتیاج ریاضیّات بآن میباشد . درآثار خود مکرّر، تصریحاً یا تلویحاً ، مسائل جزئی را بانظر تحقیر مینگرد ، و احکام کلّی میجوید . درعین حال ، ازآنچه در ریاضیّات «بحث درمسئله» (یا درمعادله) خوانده میشود غافل نیست .

دوّم مواردی است که خیّام را درتردید و تزلزلی که همراه سیراز مرحله‌ای از علم بمرحله‌ی بالاتراست می‌بینیم . اندیشه‌ای درشرف تکوین‌است ؛ گاهی پیش‌میرود؛ گاهی به عقب باز میگردد ؛ ولی سیرعمومی تکاملی است .

مثلا ، برخلاف آنچه درجبرخیّام ــ که بعداز **رساله‌ی تحلیل یك مسئله**(قسمت ششم) تصنیف شده (۱ ۰۴ ۰ ٤ §) – می‌بینیم ، در **رساله‌ی تحلیل** اساس طبقه‌بندی معادلات بر حسب درجه دیده میشود : معادلات اوّلا به مفردات و مقترنات تقسیم نمیشوند ؛ بلکه ابتداء ازمعادله‌ی«بین کعب وسایرمراتب» ، یعنی معادله‌ی درجه‌ی سوّم ، سخن‌میرود (۶۰۴۰۳ §) ، وسپس این معادلات را بــه مفردات و مقترنات تقسیم میکند . آیا نمی‌توان این سیرقهقرائی را نمونه‌ای ازتزلزل درانتخاب دوطریق طبقه بندی شمرد ؟

ازطرف دیگر، در **رساله‌ی‌تحلیل یك مسئله** ، علم جبر«اموری هندسی که بوسیله‌ی اشکال پنجم وششم مقاله‌ی دوّم اصول مبیّن میشود » شمرده شده (۶۰۴۰۲ §) ، ولی در رساله‌ی جبر این علم را حتّی بآنچه از الفاظ « جبر» و « مقابله » (۳۰۴۰٤ §) استنباط می‌شود محدود نمی کند ، بلکه‌آنرا فنّ استخراج مجهولات عددی وهندسی میشمارد (۵۰۱۰۱ §) .

نمونه‌ی دیگراین‌است که خیّام ، در **رساله‌ی تحلیل** ، حلّ عددی معادلات درجه‌ی سوّم غیرقابل تحویل به درجات پایین‌ترا غیرممکن می‌شمارد (۶۰۷ §) ، وحال‌آنکه در رساله‌ی جبردراین باب گوید :«امّا اثبات [حلّ] این‌اصناف وقتی موضوع‌مسئله‌عدد مطلق باشد برما وبردیگرعلمای جبرممکن نشده است ، وشاید دیگران که بعد از ما آیند برآن وقوف یابند» (۵۰۱۰۶ §) .

بالاخره این‌مطلب نیزباید گفته شود که خیّام متوجّه تسهیلات ناشی ازاستعمال

« الفاظ اهل جبر» (§ ۲۰۳۰٤) یا اصطلاحات آنان (§ ٦۰۳۰٤) بوده است ، ولـی متأسّفانه‌شخصاً قدمی درراه بسط این‌اصطلاحات ودامنه‌ی استعمال آنها برنداشته‌است.

۴۰۲۰۱ § ـ امّا نباید ازنظر دور داشت که خیّام یك ریاضیدان قرون وسطائی است ، وسخت تحت تأثیرافکار یونانیان بوده است ، ومحدودیّتهای ناشی ازبندهائی که این افکار بردست وپای اوبسته بخوبی ازآثارش هویداست. دراین باب ، آنچه مربوط به مسائل وموارد خاص مندرج درآثار اوست درضمن‌تحلیل این‌آثار گفته خواهد شد. دراین مقام ، بعنوان نمونه ، فقط به بعضی مطالب کلّی اشاره میکنیم .

کارهای جبری خیّام ، چنانکه خود میگوید (§ ۵۰۱۰٤) ، مبتنی بر کتابهای **اصول** و **معطیات** اقلیدس و (دومقاله‌ی اوّل) **مخروطات** آپولّونیوس است ، ولی تبعیّت او ازاین آثار محدود به‌آنچه از دانشمند نکته سنجی چون خیّام انتظار میرود نیست ، و مثلا وقتی حکم میکند که « براهین عددی جای براهین هندسی را نتوانند گرفت » ، درتأییداین‌نظر، میگوید مگرنمی‌بینی که اقلیدس‌هم‌همین راه رفته است(§۵۰۱۰۵) ، وحال اینکه مکرّر کردن اقلیدس احکام عمومی مقاله‌ی پنجم اصول را درمقاله‌ی هفتم درمورد اعداد طبیعی عمل لغوی بوده است ، وتوجیه معقولی برای آن بنظر نمیرسد . خداوند همه را از گزند تعصّب وبت پرستی محفوظ بدارد .

خیّام ، به پیروی از فلاسفه‌ی یونان، تفاوت فاحشی بین «عدد» یا «عدد مطلق» و«مقدار» یا « کمّ متّصل» (خط ، سطح ، جسم ، زمان) قائل است ، وکارهای‌جبری او- وبعبارت اصحّ ، روش او درجبر- سخت تحت تأثیرونفوذ این اندیشه است. متأسّفانه در هیچیك از دو رساله‌ی خیّام تعریفی از جواب یا ریشه‌ی معادله و از حلّ معادله دیده نمیشود .آنچه مسلّم‌است اینست که وی نه فقط ازجوابهای منفی(وبالنّتیجه‌ازجوابهای موهومی) بی‌خبربوده ، بلکه جواب صفررا هم ملحوظ نمی‌داشته . امّا مطلب به همین جا ختم نمیشود . وی ، درتحت تأثیرفکر مذکور ، معادلات را برحسب اینکه موضوع (= مجهول)آنها «عدد مطلق» یا«مقدار» باشد با دونظربسیار متفاوت مینگرد ، وبرای

هرمعادله از دوجهت برهان حلّ‌لازم میشمارد ، یکی وقتی‌مجهول عدد باشد ، ودیگری درصورتی که مجهول مقدار باشد . در معادلات دسته‌ی دوّم ، وقتی باصطلاح ما معادلـه جواب مثبت داردآنرا ممکن و الا ممتنع می‌شمارد ✡ . امّا درمعادلات عددی درجه‌ی دوّم ، بدون اینکه شرایطی برای ضرایب معادله قائل شود ، صحیح بودن جوابها را جزءِ شرایط امکان معادله می‌شمارد ، و این امر ، چنانکه در ۳۰۵ § نیز اشاره کردیم ، تقلیدی‌بی‌مورد ازمسائل دیوفانتوسی بیش‌نیست ، زیرا درمسائل مورد بحث دیوفانتوس، نوع مسائل این قید را ایجاب میکند ، وحال آنکه در مسائل مورد بحث خیّام چنین قیدی خالی ازوجه است .

خیّام ، چنانکه در قدیم معمول بوده ، $x^{۲}$ و $x^{۳}$ را در « مقادیر» بمعنی مربّـع و مکعّبی‌با ضلع x میشمارد ، وبنابراین، درنظراو، مال مال ($x^{٤}$) درمقادیرامری موهوم است و وجود خارجی نـدارد (٦٠٤٠٢ §) ، و استعمالش در جبر برسبیل مجاز است (٥٠١٠٥ §) ✡✡. این طرزفکر نه فقط نظر خیّام را در معادلات محدود میکند ، بلکه منجربه‌احتجاجات بی‌بنیادی می‌شود که نمونه‌ی‌آن در٦٠٤٠٢٠١ §آمده است .

۴۰۳ § جبر خیّام

۴۰۳۰۱ § کشف جبرخیّامـ رساله‌ی خیّام در علم جبر ، مانند بسیاری از دیگرآثار دانشمندان دوره‌ی اسلامی ، بتوسط اروپائیان کشف شد ، و † این امر در سال ۱۷٤۲ در شهرلیدن ازبلاد هلند پیش‌آمد ، و برحسب عنوان رساله ،آنرا مشتمل برحلّ معادلات درجه‌ی سوّم پنداشتند .

بعدها ژان اِتین مونتوکلا ×، مورّخ معروف‌ریاضیّات ، درجلداوّل **تاریخ ریاضیّات**

(✡) در باب عده‌ی جوابها رجوع شود به ٤٠٣٠٤٠٥ § .

(✡✡) این طرز فکر تا زمان دکارت نافذ بود ، و او بود که آنرا بکلی درهم شکست (مثلا رجوع شود به **جهان ریاضیات** ، نیویورك ، ١٩٥٦ ، جلد اول ، صص ٢٤١ـ٤٣) .

(†) مطالب ٤٠٣٠١ § از این قسمت به بعد تقریباً تمـاماً از مقدمه‌ی کتاب ویکه (٤٠٣٠٣ §) اقتباس شده است .

(×) Jean Étienne Montucla (١٧٢٥ ـ ٩٩) .

مشهور خود ، بهمین موضوع اشاره میکند ☆ .

معذلك ، رساله مورد توجهّی از طرف ریاضیّون و مستشرقین واقع نشد تاآنکه سدیّو ☆☆ پاره‌ای ازیك نسخه‌ی خطّی در علم جبردر کتابخانه‌ی سلطنتی (کتابخانه‌ی ملّی پاریس) کشف کرد که موضوعش شباهت تامّی با موضوع نسخه‌ی کتابخانه‌ی لیدن داشت ، و در ضمن مقاله‌ای که در صفحات ۱۳۵ ـ ۱۳۶ جلد سیزدهم **یادداشتها ومطالب مستخرج از نسخ خطی کتابخانه‌ی سلطنتی** مندرج است ، تفصیلات زیادتری درباره‌ی‌این نسخه آورد ، وسپس گاسپار مونژ † در کتاب‌مهّم خود، بنام **نظرتاریخی درباب بسط وتکامل هندسه** (بروکسل ، ۱۸۳۷) ، باستناد مقاله‌ی سدیّو ، مطالعه‌ی کتاب خیّام را از لحاظ تاریخ علوم ریاضی حائزاهمیّت اساسی شمرد .

درهمین ایّام گولیلمو لیبری †† نسخه‌ی کاملی ازین کتاب نفیس‌در کتابخانه‌ی سلطنتی یافت ، واعلام کرد که قصد نشر کردن آنرا دارد ، ولی باین‌کار توفیق نیافت ، و سرانجام فرانتس ویکه × متن رساله‌ی جبرخیّام را با ترجمه‌ی فرانسوی آن و حواشی گرانبها و ضمایمی ، بنام **جبر عمرالخیامی** (L'Algèbre d'Omar Alkhayyami) ، در سال ۱۸۵۱ میلادی درپاریس بچاپ رسانید (۴۰۳۰۲ §) .

۴۰۳۰۲ § کتاب ویکه ـ ویکه با نشر جبر خیّام خدمت بزرگـی به تاریخ ریاضیّات کرد ، ونام خیّام را دربین ریاضیّون بلند نمود . بعلاوه کتابهائی که تاکنون

(☆) **تاریخ ریاضیات** ، جلد اول ، پاریس ، ۱۷۵۸ ، صص ۳۶۸ ـ ۶۹ .

(☆☆) Louis Pierre Eugène Amélie Sedillot (۱۸۰۸ـ۱۸۷۵). مستشرق‌فرانسوی.

(†) Gaspard Monge (۱۷۴۶ ـ ۱۸۱۸) .

(††) Gulielmo Libri (۱۸۰۳ ـ ۶۹) ، ریاضیدان ایتالیائی‌الاصل . وی در فلورانس متولد شد . در ۱۸۳۵ به فرانسه پناهنده شد ، و در آنجا به عضویت آکادمی فرانسه و استادی دانشگاه سوربون رسید . بعدا بعنوان سرقت نسخ خطی گرانبها تحت تعقیب قرار گرفت و ناچار به انگلستان گریخت . وی صاحب تألیفات و مقالات علمی مهمی است ، و از آثار معروفش **تاریخ علوم ریاضی در ایتالیا** (چهار جلد ، پاریس ، ۱۸۳۷ ـ ۴۱) می‌باشد .

(×) Franz Woepcke (۱۸۲۶ـ۶۴). مستشرق‌آلمانی ـ فرانسوی‌که مخصوصاً درروشن کردن تاریخ ریاضیات در دوره‌ی اسلامی سهم بزرگی دارد .

درباب جبرخیّام نوشته شده مبتنی بر کتاب وپکه بوده و مؤلّفین آنها فواید بی‌حساب ازاین کتاب برده‌اند. بنابراین، بی‌مناسبت نیست که اثر گرانبهای وپکه را با تفصیل بیشتری به خوانندگان معرفی کنیم.

کتاب وپکه مرکّب است از:

(۱) متن عربی جبرخیّام (صفحات ۱–۵۱ از راست به چپ)، که در پایان آن ترجمه‌ی احوال خیّام از کتاب تاریخ الحکمای ابن‌قفطی نقل‌شده است (صفحه‌ی ۵۲)؛

(۲) مقدّمه‌ی کتاب (صفحات i – xix)، مشتمل بر چگونگی کشف جبر خیّام، معرّفی خیّام، تحلیل انتقادی جبرخیّام، ملاحظات تاریخی*، و غیره؛

(۳) ترجمه‌ی فرانسوی جبر خیّام (صفحات ۱– ۸۸)، با توضیحات و حواشی فراوان وسودمند، ونقل براهین خیّام با استعمال علامات، که درفهم استدلال‌های بسیار طولانی و ملال‌انگیز لفظی خیّام کومك مؤثری است؛

(٤) پنج ضمیمه، بزبان فرانسوی، که وپکه برای روشن ساختن بعضی نکات تاریخی ریاضیّات در دوره‌ی اسلامی به کتاب خود ملحق کرده‌است (صفحات ۹۰–۱۲۸)، بشرح ذیل:

ضمیمه‌ی A –مفاد رساله‌ی ابن هیثم (۳۰٤۰۵۰٦ §) دردرج دو واسطه‌ی متناسب بین دو خط (۳۰۷۰۱ §)، و طریق دیگری برای حل همان مسئله بوسیله‌ی حرکت که مصنّفش معلوم نیست.

ضمیمه‌ی B – مفاد رساله‌ای درحلّ این مسئله:

دوخط AB و C در دست است. بر اوّلی نقطه‌ای مانند D چنان بیابید که $AD/C = C^2 / \overline{BD}^2$.

وپکه احتمال می‌دهد که این رساله از کوهی (۳۰٤۰۵۰۵ §) است.

ضمیمه‌ی C – مفاد رساله‌ی کوهی راجع به طرح قطعه کره‌ای که حجمش برابرحجم

(*) از قبیل نکاتی که از وپکه در۳۰۷۰۲ § نقل کردیم.

قطعه کره‌ی مفروض و سطحش مساوی سطح قطعه‌ی کره‌ی مفروض باشد .

ضمیمه‌ی D ــ مفاد رساله‌ی ابوالجود درحلّ این مسئله :

خط BCو نقطه‌ی A در دست است . ازاین نقطه خطی چنان بکشید که اگر D محل تلاقی آن با BC باشد ،

$$AD \cdot BC + \overline{BD}^{2} = \overline{BC}^{2}$$

(رجوع کنید به ۳۰۷۰۳ §) . و نیز حلّ مسئله‌ی‌ذیل (۳۰۷۰۳ §) که مصنّف آن معلوم نیست :

ذوذنقه‌ای مانند ABCD چنان طرح کنید که AB = AD = BC = ۱۰ و سطح شکل ۹۰ باشد .

ضمیمه‌ی E ــ مفاد رساله‌ی ابوسعید سجزی ✩ در تثلیث زاویه .

۴۰۳۰۲۰۱ § متن رساله‌ی خیّام در کتاب وپکه ـ چون متن رساله‌ی جبر خیّام در کتاب حاضر عیناً از کتاب وپکه گرفته شده ، نکات مهمّ توضیحاتی را که وی در مقدّمه‌ی کتاب خود دراین باب آورده است نقل می کنیم .

« من برای تنظیم متن عربی کتاب سه نسخه در اختیار داشته‌ام . اوّل نسخه‌ی عربی شماره‌ی ۱۱۳۶ کتابخانه‌ی ملّی که مورد توجّه لیبری واقع شده بود †. خطّ این نسخه بسیار زیباست ، ولی قسمت اعظم کلمات درآن بی‌نقطه است . این نسخه از دو نسخه‌ی دیگر صحیح‌تر است ، و در موارد ابهام این نسخه را مأخذ قرار داده‌ام ، و درضبط نسخه‌بدلها این نسخه رابا حرف A مشخّص کرده‌ام .

نسخه‌ی دوّم ، که آنرا با حرف B مشخّص کرده‌ام ، همانست که مورد توجّه سدیّو † واقع شده و جزء نسخه‌ی خطّی شماره‌ی ۱۱۰٤ کتابخانه‌ی ملّی است . خط

(✩) احمد ابن عبدالجلیل سجزی ، ریاضیدان و منجم معروف قرن چهارم هجری . برای اطلاع بیشتر رجوع شود به دکتر محمد معین ، **چهار مقاله‌ی عروض سمرقندی** ، ص ۲۵۹ ــ ۲۶۱.

(†) ٤۰۳۰۱ § ، ص ۱۳۹ .

این نسخه بخوبی نسخه‌ی اوّل نیست ، ولـی معجم و در مواردی مشکّل است . امّا متأسّفانه‌درابتدای موضوع عمده وبدیع کتاب ، یعنی‌حلّ معادلات درجه‌ی سوّم، مطلب قطع می‌شود . ☆

نسخه‌ی سوّم همان نسخه‌ی کتابخانه‌ی لیدن است☆☆ است که اوّل بار کشف شد و مونتو کلا ازآن‌نام برده است . این نسخه ، که آنرا باحرف C مشخّص کرده‌ام ، با خطّ درشت وخوانا نوشته شده است ولی بدرستی نسخه‌ی A نیست .

تصاویردرنسخه‌ی A تاحدّی واضح‌است ، ولی‌قطوع مخروطی همه جا با قوسهای دایره نمایش داده شده . تصاویرنسخه‌ی C در بعضی موارد با متن نامطابق است» .

بطوری که وپکه می‌نویسد † ، نسخه‌ی کتابخانه‌ی لیدن را احتمالا یك عرب مسیحی که درآمستردام میزیسته ، وبرای استنساخ نسخ خطّی که صاحبانشان حاضربه فروش‌آنها نبوده‌اند در استخدام «گولیوس شهیر»†† بوده ، از روی یك نسخه‌ی شرقی استنساخ کرده است .

تاریخ اتمام تحریراصل نسخه‌ای که وپکه چاپ کرده ظهرروز یکشنبه‌ی بیست و سوّم ماه ربیع الاول بوده ، ودرمحلّ سنه صورت  رسم شده که خواندن آن مقدور نشده است .

§۴۰۳۰۴ سایر ترجمه های جبر خیّام .

(الف) ترجمه‌ی انگلیسی . ترجمه‌ی انگلیسی جبرخیّام در ۱۹۳۱ در نیویورك چاپ شده × ، وآن‌تقریباً مشتمل برتمام تعلیقات وپکه بررساله‌ی خیّام است ، ولی‌ملحقات

(☆) رجوع شود به ذیل صفحه‌ی ۲۷ درکتاب حاضر .

(☆☆) ٤۰۳۰۱ § ، ص ۱۳۸.

(†) جبر عمر خیام ، صص ij - iij .

(††) ظاهراً مقصودیاکوبوس‌کولیوس(Jacobus Golius) (۱۵۹٦ - ۱٦٦۷)، مستشرق هلندی ، است ، که ولع عجیبی به تهیه‌ی نسخ عربی داشته است .

(×) The Algebra of Omar Khayyam, by Daoud S. Kasir, New york,1931

کتاب وپکه درآن نیامده است .

مترجم کتاب می‌نویسد که آنرا ازروی نسخه‌ی خطّی کامل و واضحی ازرساله‌ی خیّام متعلّق به دیوید یوجین سمیث *، استاد دانشگاه کلمبیا ، ترجمه کرده است ، و بقول مترجم ، نسخه‌ی مذکور را سمیث در لاهور ازیك نفر تاجر ایرانی تحصیل کرده وآن عبارتست از۹۹ صفحه که با خطّ نسخ‌خوانا نوشته شده ، وباستثنای بعضی موارد ، بی‌نقطه است ، و اغلاطی نیزدرآن مشاهده می‌شود .

بقول‌مترجم ، نسخه‌ی مذکور با متن نسخه‌ی لیدن (٤٠٣٠٢٠١ § و٤٠٣٠١§) مطابقست ، الّا اینکه عنوان ندارد ، وپایان دو رساله نیزمتفاوت می‌باشد ، و تحریرآن در روز یکشنبه‌ی سیزدهم ربیع الاوّل سنه‌ی . . . (لایقرء) بپایان رسیده ، وسپس اسم محرّر به خطّ اردو ضبط شده است .

(ب) **ترجمه‌های فارسی** . تا حدّی که نگارنده‌ی این سطور اطّلاع دارد ، درایران ، جبرخیّام اول بار درسال ۱۳۱۷ هـ ش درجزء کتابی، تحت عنوان **جبرومقابله‌ی خیام‌با نضمام تاریخ علوم ریاضی ازسه هزارسال قبل از میلاد تا زمان خیام** ، بتوسّط مؤلّف کتاب حاضر وبه همّت آقای‌نصرالله‌سبّوحی ، صاحب کتابفروشی‌مرکزی ، درتهران‌به چاپ‌رسید . و کتاب مذکور، علاوه برترجمه‌ی ملخّص‌رساله‌ی‌خیّام‌بزبان امروزریاضیّات وتعلیقات وحواشی مربوط بآن ، مشتمل برمتن‌آن رساله ، تاریخ ریاضیّات ، تاریخ ارقام و وضع علامات و استعمال حروف ، ومسائل ثلاثه میباشد ، و درتهیّه‌ی‌آن استفاده‌ی‌کامل از کتاب وپکه شده وبه ترجمه‌ی انگلیسی نیزمراجعه شده است . ودوّمین‌ترجمه‌ی‌کامل † فارسی‌همین ترجمه‌ی حاضراست که به همّت وتشویق انجمن‌آثار ملّی فراهم شده وشرح مجمل‌آن در دیباچه‌ی کتاب آمده است .

تبصره ـ ترجمه‌ی‌روسی‌جبرخیّام باحواشی ، بتوسط ب. آ. روزنفلد و آ. پ.

(*) David Eugene Smith (١٨٦٥ ـ ١٩٤٤) .

(†) مقصود اینست که تمام کتاب بدون تلخیص به فارسی نقل شده ، نه اینکه ترجمه خالی از عیب و نقص است .

پوشکویچ سابق‌الذکر، درجزء جلد ششم مجموعه‌ی **تحقیقات تاریخ ریاضیات** بچاپ رسیده است (مسکو ۱۹۵۳).

۴۰۳۰۴ § تحلیل رساله‌ی جبر خیّامـ در این جزء ملاحظاتی چند راجع به رساله‌ی جبرخیّام می‌آوریم. این‌ملاحظات را می‌توان متمّم‌کلیّات مذکور در ٤۰۲§ و راهنمای مطالعه‌کنندگان جبرخیّام تلقّی کرد.

رساله‌ی جبرخیّام با یك مقدّمه آغاز می‌شود که تاریخچه‌ی بسیار مختصری از تحقیقاتی که پیش ازخیّام درحلّ معادلات درجه‌ی سوّم شده دربر دارد. تاریخچه‌ای که در رساله‌ی دیگرخیّام آمـده (٦۰٤۰٤ §) ازآنچه در مقدّمه‌ی رساله‌ی جبر گفته شده جامعتر است.

بقیّه‌ی موادّ اصلی کتاب رامی‌توان به پنج مبحث عمده ـ تعریفات‌واصطلاحات؛ طبقه‌بندی معادلات؛ معادلات درجه‌ی دوّم و قابل تحویل به آنها؛ معادلات درجه‌ی سوّم؛ معادلات کسری ـ تقسیم کرد. درپایان انتقاد کارهای ابوالجود در حلّ معادله‌ی درجه‌ی سوّم می‌آید.

ما برای تسهیل ارجاع و مراجعه، موادّ کتاب را برحسب موضوع به شرح وبا عناوین ذیل فصل بندی کرده‌ایم:

عنوان فصل	شماره درمتن	شماره درترجمه‌ی فارسی
تعریفات واصطلاحات	§ ۱۰۱	§ ۵۰۱
طبقه بندی معادلات	§ ۱۰۲	§ ۵۰۲
حلّ مفردات	§ ۱۰۳	§ ۵۰۳
معادلات سه جمله‌ای درجه‌ی دوّم	§ ۱۰٤	§ ۵۰٤
مقترنات سه تائی درجه‌ی سوّم قابل تحویل به درجه‌ی دوّم	§ ۱۰۵	§ ۵۰۵
مقدّمات حلّ معادلات درجه‌ی سوّم	§ ۱۰٦	§ ۵۰٦
مقترنات سه‌تائی درجه‌ی سوّم	§ ۱۰۷	§ ۵۰۷

عنوان فصل	شماره در متن	شماره در ترجمه فارسی
مقترنات چهارتائی سه بایك	§ ١٠٨	§ ٥٠٨
مقترنات چهارتائی دو با دو	§ ١٠٩	§ ٥٠٩
معادلات کسری	§ ١٠١٠	§ ٥٠١٠
نقدکارهای ابوالوجود	§ ١٠١١	§ ٥٠١١

و اینك می‌پردازیم به تحلیل موادّ رساله‌ی جبر خیّام ؛ و مقدّمةً توجّه خواننده را به مندرجات ٤٠٢٠١ ـ٤٠٢ §§ در معرفی خیّام بعنوان عالم جبر جلب می کنیم .

٤٠٣٠٤٠١ § فصل اول. فصل اوّل کتاب مشتمل‌است برتعریف جبر، تعریف مقدار ، اصطلاحات جبری ، وملاحظات کلّی راجع به معادلات .

رؤوس مطالب گفتنی در این مباحث را سابقاً بخصوص در ٤٠٢٠١ ـ ٤٠٢ §§ گفتیم . در باب اصطلاحات جبری می‌توان به ٣٠٦٠٤ § مراجعه کرد . نظر خیّام در باره‌ی مال مال و تمیز « حلّ عددی » معادله (یعنی حلّ آن وقتی مجهول عدد باشد) از « حلّ هندسی » آن (یعنی حلّ معادله وقتی مجهول مقدار هندسی باشد) در ٤٠٢٠١ § بررسی شد .

٤٠٣٠٤٠٢§ فصل‌دوم ، طبقه‌بندی معادلات ـ در این فصل خیّام معادلات سه درجه‌ی اوّل را بر حسب اینکه مفرد (دوجمله‌ای) یا مقترن (دارای بیش از دوجمله) باشند به ۲۵ صنف تقسیم می کند ، باین شرح :

(الف) شش صنف **مفرد** (دوجمله‌ای)

(١) $a = x$ [§ ٥٠٣٠١]

(٢) $a = x^2$ [§ ٥٠٣٠٢]

(٣) $a = x^3$ [§ ٥٠٣٠٤]

(٤) $bx = x^2$ [§ ٥٠٣٠٦]

(٥) $bx = x^3$ [§ ٥٠٣٠٧]

(٦) $cx^2 = x^3$ [§ ٥٠٣٠٨]

(ب) نوزده صنف معادله‌ی مقترن (سه یا چهار جمله‌ای)

سه تائی

(I) سه صنف درجه‌ی دوم :

(۷) $x^2 + bx = a$ [§ ٥٠٤٠٢]

(۸) $x^2 + a = bx$ [§ ٥٠٤٠٣]

(۹) $bx + a = x^2$ [§ ٥٠٤٠٤]

(II) سه صنف قابل تبدیل بدرجه‌ی دوم :

(۱۰) $x^3 + cx^2 = bx$ [§ ٥٠٥٠٢]

(۱۱) $x^3 + bx = cx^2$ [§ ٥٠٥٠٣]

(۱۲) $cx^2 + bx = x^3$ [§ ٥٠٥٠٤]

(III) شش صنف درجه‌ی سوم غیرقابل تحویل بدرجه‌ی پایین‌تر :

(۱۳) $x^3 + bx = a$ [§ ٥٠٧٠٢]

(۱۴) $x^3 + a = bx$ [§ ٥٠٧٠٣]

(۱۵) $a + bx = x^3$ [§ ٥٠٧٠٤]

(۱۶) $x^3 + cx^2 = a$ [§ ٥٠٧٠٥]

(۱۷) $x^3 + a = cx^2$ [§ ٥٠٧٠٦]

(۱۸) $a + cx^2 = x^3$ [§ ٥٠٧٠٧]

چهارتائی

(IV) چهار صنف سه با یك

(۱۹) $x^3 + cx^2 + bx = a$ [§ ٥٠٨٠٢]

(۲۰) $x^3 + cx^2 + a = bx$ [§ ٥٠٨٠٣]

(۲۱) $x^3 + bx + a = cx^2$ [§ ٥٠٨٠٤]

(۲۲) $x^3 = bx + cx^2 + a$ [§ ٥٠٨٠٥]

(V) سه صنف دو با دو

(۲۳) $x^3 + cx^2 = bx + a$ [§ ٥٠٩٠٢]

(۲۴) $x^3 + bx = cx^2 + a$ [§ ٥٠٩٠٣]

(۲۵) $x^3 + a = bx + cx^2$ [§ ٥٠٩٠٤]

خیّام گوید از این معادلات ، (٦) ـ (٤) قابل تحویل به (۱) یا (۲) و دسته‌ی (II) قابل تحویل به دسته‌ی (I) است ، ولی دلایل جبریهای پیشین را براین امر ، که مبتنی بر تناسبهای

$$1 : x = x : x^2 = x^2 : x^3$$

است ، کافی نمی‌داند ، بلکه وقتی مجهول معادله « مقدار » باشد ، برطبق روش عمومی خود (۴۰۲۰۱ §) ، برای اثبات قابل تحویل بودن ، برهان هندسی لازم می‌شمارد (این براهین را در ۵۰۳ § و ۵۰۵ § می‌آورد) .

در باب طبقه بندی معادلات و اهمیّت کار خیّام به ۳۰۶۰۶ § و ۶۰۴۰۳ § و ۴۰۲ § مراجعه شود .

۴۰۳۰۴۰۳ § فصول سوم ـ پنجم ـ این فصول چیزی زاید بر کارهای پیشینیان ندارد الّااینکه خیّام تحویل بعضی معادلات را به درجه‌ی پایین‌تر به طریق هندسی ثابت کرده است .

در باب معادلات درجه‌ی دوّم (۵۰۴ §) ، خیّام چیزی برآنچه خوارزمی‌آورده (۳۰۶۰۷ §) نیفزوده وحتّی بعضی مثالهائی که می‌آورد همان امثله‌ی خوارزمی‌است ، منتهی براهین خیّام منقّح تر و جامع‌تر است .

درباب شرایط خیّام برای امکان معادلات عددی درجه‌ی دوّم سابقاً سخن گفتیم. شرایط وی ، آنچه زاید بر منفی‌نبودن مبیّن معادله است ، علاوه براینکه‌اصلاً بی‌مورد است (۴۰۲۰۱ §) نادرست هم هست ☆ .

ضمناً دو مسئله در ۵۰۳ § آمده است که خیّام در سراسر کتاب برای متجانس کردن معادلات آنها را بکار می‌برد ، و آنها عبارتند از نمایش دادن یك عدد بوسیله‌ی یك « سطح » (یعنی مربع مستطیل) یا یك « مجسّم » (یعنی مکعّب مستطیل) . عدد a را در حالت اوّل با مستطیلی با اضلاع a و واحد نمایش می دهد ، و در صورت دوّم با مکعّب مستطیلی که قاعده‌اش « مرّبع واحد » (یعنی مربعی بضلع واحد طول) و ارتفاعش a است (۵۰۳۰۳ § و ۵۰۳۰۵ §) .

۴۰۳۰۴۰۴ § فصل ششم ، مقدمات حل معادلات درجه‌ی سوم ـ مسائلی که در این فصل حل شده عبارتست از :

(☆) رجوع شود به ذیل مربوط به شرایط در ۵۰۴۰۲ § و نیز ذیل ۵۰۴۰۳۰۲ §

(الف) درج دو واسطه‌ی متناسب بین دوطول مفروض (§ ۳۰۷۰۱) ، بوسیله‌ی تقاطع دو سهمی .

(ب) تعیین هندسی مکعّب مستطیلی که قاعده‌اش مربع مفروض l^2 باشد وبا مکعّب مستطیل مفروضی به قاعده‌ی s^2 و ارتفاع h معادل باشد .

(ج) تعیین مکعّب مستطیلی که قاعده‌اش مرّبع وارتفاعش h و حجمش مساوی حجم مکعّب مستطیلی بقاعده‌ی s^2 و ارتفاع h' باشد .

چنانکه خواهیم دید ، خیّام در سراسر کتاب خود از مسائل (ب) و (ج) برای متجانس کردن معادلات استفاده می کند ؛ بدین طریق . فرض کنیم a و c و β مقادیر مفروضی باشند . a را ، چنانکه در ٤۰۳۰٤۰۳ § گفته شد ، بوسیله‌ی مکعّب مستطیل S بقاعده‌ی ۱×۱ و ارتفاع a نمایش می‌دهیم . بر طبق مسائل (ب) و (ج) می‌توان مکعّب مستطیلی‌مانند S' ، هم حجم S ، ساخت که : (۱) قاعده‌اش مربّعی به ضلع β باشد ، یا (۲) قاعده‌اش مرّبع و ارتفاعش c باشد . اگر λ ارتفاع اوّلی یا ضلع قاعده‌ی دوّمی باشد ، در حالت اوّل $a = \lambda\beta^2$ و در صورت ثانی $a = c\lambda^2$.

پس از این مقدّمات حل هندسی معادله‌ی $x^3 = a$ بوسیله‌ی تقاطع سهمی و دایره می‌آید .

§ ۴۰۳۰۴۰۵ فصول هفتم ـ نهم ـ این فصول مهمترین قسمت رساله‌ی خیّام ومشتمل بر حلّ وبحث اصناف سیزده گانه‌ی معادلات درجه‌ی سوّم است (معادلات دسته‌های III ـ V ، ٤۰۳۰٤۰۲ §) .

تفصیل طریق خیّام برای حلّ هر صنف از معادلات درجه‌ی سوّم در ترجمه‌ی رساله‌ی وی و توضیحات کافی در ذیل مسائل آمده است (§§ ۰۵۰۷۰۱ ـ ۰۵۰۹۰۵) . در این مقام اصول کلّی طریق وی را بیان می کنیم .

خیّام درتمام معادلات مورد بحث ضریب جمله‌ی درجه‌ی سوّم را واحد می گیرد ، و قبل از شروع به حلّ معادله آنرا متجانس می کند ، بدین طریق :

(۱) ضریب جملهٔی درجهٔی دوّم (c) را بوسیلهٔی طولی نمایش می‌دهد .

(۲) ضریب جملهٔی درجهٔی اوّل (b) را بصورت β^2 ، یعنی بوسیلهٔی مربّعی به مساحت b ، نمایش می‌دهد ($b=\beta^2$) .

برای این‌منظور ، b را بوسیلهٔی « سطحی » نمایش می‌دهد (§ ٤۰۳۰٤۰۳)، و سپس مربّعی معادل این سطح می‌سازد .

(۳) جملهٔی معلوم (a) را در معادلات $x^3 + cx^2 = a$ و $x^3 + a = cx^2$ بصورت λ^3 ، و در معادلهٔی $x^3 = cx^2 + a$ بصورت $c\lambda^2$ ، و بالاخره در سایرمعادلات بصورت $\lambda\beta^2$ نمایش می‌دهد .

این مقصودها بوسیلهٔی مسائلی که قبلا حلّ شده بعمل می‌آید . توضیح آنکه نمایش a بصورت λ^3 بحلّ معادلهٔی $a = \lambda^3$ بر می‌گردد ، و دو نمایش دیگربطریقی که در § ٤۰۳۰٤۰٤ توضیح دادیم .

پس از اینکه معادله متجانس شد ، قطوع لازم برای حلّ هر معادله را برحسب ضرایب معادله تعریف می‌کند ، و از تقاطع آنها جواب مثبت معادله را (در صورت وجود آن) بدست می‌آورد ، و بوسیلهٔی مقایسهٔی احجام و افزودن و اسقاط حجم‌ها ، صدق کردن جواب را در معادله ثابت می‌کند .

اینك می‌رسیم به عدّهٔی جوابها . خیّام ، پس از حلّ هر مسئله ، در عدّهٔی نقاط تقاطع قطوع مربوط به آن ، یعنی در عدّهٔی جوابهای (مثبت) معادله بحث می‌کند،و **در همهٔی حالات عدهٔی ریشه‌های مثبت را بدرستی تعیین می‌کند ، مگر در دو مورد ، که اگر درآنها به خطا نرفته بود ، به احتمال قوی به‌اکتشافات بسیار مهم و اساسی نائل می‌شد .**

یکی از این موارد معادلهٔی $x^3 + bx = cx^2 + a$ است (§ ۰۵۰۹۰۳) ، که بازاء $c > (a / b)$ ممکن است سه ریشهٔی حقیقی و مثبت داشته باشد . امّا بحث خیّام درعدّهٔی نقاط تقاطع قطوع مسئله خالی از دقّت‌است ، و بهمین جهت فقط یکی از جوابهای معادله را بدست می‌آورد . خطای خیّام در این مورد باعث تأسّف است،

زیرا وی با خبر بود که معادله‌ی درجه‌ی دوّم ممکن است دو جواب (مثبت) داشته باشد ، و اگر به معادله‌ی درجه‌ی سوّمی با سه ریشه می‌رسید شاید به کشف رابطه‌ی بین عدّه‌ی جوابهای معادله با درجه‌ی آن نایل می‌شد .

در تشخیص عدّه‌ی جوابهای معادله‌ی $x^3 + a = cx^2 + bx$ نیز در بعضی حالات خیّام بخطا رفته و متوجّه دوّمین ریشه‌ی مثبت معادله نشده است (§ ۵۰۹۰۴).منشاء این خطا اینست که خیّام فقط به رسم کردن قسمتی از قطوع (نصف دایره ، نصف سهمی ، یك شاخه‌ی هذلولی) مورد نیاز اکتفا می کند ، واین بسیارجای تأسّف‌است ، زیرا بعلّت همین رسم قطوع‌ناتمام ، وی از دریافتن یکی از مهمترین مفاهیم ریاضی ــ یعنی اعداد منفی ــ باز مانده است ، اگر عادت زیان آور رسم قطعهای ناتمام نبود ، به احتمال قوی متوجّه ریشه‌های منفی می‌شد ، و به یکی از بزرگترین اکتشافات ریاضی می‌رسید .

باید دانست که خیّام ، در بحث از عدّه‌ی جوابها ، شرایط تقاطع یا تماس یا عدم تقاطع قطوع را بر حسب ضرایب معادله تعیین‌نمی کند ، مگر در بعضی موارد که اجمالا در این‌مطلب وارد می‌شود ☆ . ازجمله می‌توان بحث معادلات $x^3 + a = cx^2$ (§ ۵۰۷۰۶) و $x^3 + bx + a = cx^2$ (§ ۵۰۸۰٤) را نام برد .

بالاخره ، خیّام حلّ معادله‌ی درجه‌ی چهارم را به طرقی که در رساله‌ی جبر آورده ممتنع می‌شمارد ، و حال آنکه بعضی از پیشینیان وی صور خاصی از معادله‌ی درجه‌ی چهارم را بوسیله‌ی قطوع مخروطی حلّ کرده‌اند (§ ۳۰۷۰۳) .

۴۰۳۰۴۰٦ § فصل دهم ، معادلات کسری ــ معادلات کسری خیّام معادلاتی است بین قوای مجهول و قوای عکس آن ، و طریق وی برای حلّ این معادلات تغییر مجهول ($1/x = z$) ویا ضرب کردن طرفین معادله در قوّه‌ی مناسبی ازمجهول است ، و وی معادلات مورد بحث را به بیست و پنج صنف اصلی تقسیم می کند .

(☆) بعضی ریاضیون پیش از خیام نتایج بسیار دقیقتری در این باب بدست آورده‌اند که نمونه‌های آنها را ویکه در ضمایم B و C از کتاب نفیس خود (§ ٤۰۳۰۲) آورده است .

۴۰۴ § رساله در تحلیل یك مسئله

۴۰۴۰۱ § مقدمه ـ نگارنده اوّل بار بوسیله‌ی مقاله‌ی سابق الذّکر ✩ عبّاس اقبال آشتیانی‌راجع به عمرخیّام از این رساله ، که در ٤٠١٠٢ § درضمن آثار ریاضی‌خیّام از آن اسم برده شد ، اطّلاع یافت . درضمن این مقاله ، محقّق مذکور چنین می‌نویسد :

« **غیر از تألیفاتی که ازخیّام دردست است و یا مورّخین ازاو نقل کرده‌اند**
« نگارنده رساله‌ای‌از او دارم به عربی درپنج ورق بخط نسخ ریز در حلّ یك مسئله‌ی »
« جبری بوسیله‌ی قطوع مخروطی در جواب کسی که آنرا از حکیم سؤال کرده ، »
« و عنوان آن اینست : »

« **هذه رسالة لابی‌الفتح عمر بن ابراهیم‌الخیّامی .** »

« رساله‌ی مزبوربا اینکه موضوع آن ریاضی‌است باز از پاره‌ای مسائل‌تاریخی »
« و حکمتی خالی نیست وما ترجمه‌ی یك فقره از آنرا که به تاریخ علوم ریاضی در »
« میان مسلمین مربوط است در اینجا نقل می کنیم . . . »✩✩

بعداً فاضل نامبرده نسخه‌ی خطّی خود را ، که جزءِ مجموعه‌ی † کوچکی از رسائل ریاضی بود ، در اختیار نگارنده گذاشت ، و او رساله‌ی خیّام و بعضی دیگر از

(✩) رجوع شود به ذیل صفحه‌ی ١٣٥ .

(✩✩) سپس قسمتی از مطالب تاریخی ٤٠٤٠٦ § نقل شده است .

(†) محقق محترم ، آقای محمد تقی دانش پژوه ، شرحی در معرفی‌این مجموعه ، که فعلا در کتابخانه‌ی مرکزی دانشگاه تهران محفوظ است ، در مجلد هشتم فهرست کتابخانه‌ی مرکزی دانشگاه (تحت طبع) ، تحت شماره‌ی ١٧٥١ نگاشته‌اند که خلاصه‌ای ازآن با اندك تصرفی ذیلا برای مزید فایده نقل می‌شود :

این مجموعه را عباس اقبال در ذیحجه‌ی ١٣٣٥ در بازار حلبی سازها به بهای سه‌قران‌خریده است ، وآن مشتمل بر یازده رساله است در ٨١ ورق بخط نسخ محمد ابن اباتراب ابن احمد ، و در پشت اوراق ٥٦ و ٨٥ تاریخ کتابت ١٢٨٣ مذکور است . بعضی صفحات ١٧ و برخی ٢٣ سطر دارد ، واندازه‌ی متن صفحات ١٧ سطری ٧٫٥×١٥ سانتیمتر واندازه‌ی سایرین ٩×١٥ سانتیمتر، و بالاخره اندازه‌ی خارجی مجموعه ١٤ × ٢٠٫٥ سانتیمتر می‌باشد . کاغذ آن فرنگی و جلدش تیماج حنائی است .

رسالات جزء مجموعه بشرح ذیل است :

(بقیه در ذیل صفحه‌ی بعد)

مطالب آن مجموعه را بدقّت استنساخ کرد، و کوشید که تصرّفی در آن ننمایدمگر در مواردی که حروف مربوط به تصاویر یا قضایا و مقالات هندسه‌ی اقلیدس نا درست بود، یا کلمه‌ای اشتباهاً مکرّر شده بود، و امثال اینها .

وقتی طبع کتاب حاضرآغاز گردید، چون نگارنده را خبری از اصل رساله‌ی مذکور نبود، همان نسخه‌ای را که استنساخ کرده بود برای چاپ آماده ساخت، و آن همانست که در قسمت دوّم این کتاب بنظر خوانندگان میرسد. بعداً بتوسّط محقق محترم، آقای دانش پژوه، اطّلاع حاصل شد که اصل مجموعه در کتابخانه‌ی مرکزی دانشگاه تهران محفوظ است، و بشرح مذکور در مقدّمه‌ی این کتاب، عکس نسخه‌ی رساله‌ی‌خیّام فراهم شد، و برای مزید فایده به‌آخر کتاب حاضرملحق گردید.

از جنبه‌ی تاریخی و در بررسی رشد فکر ریاضی خیّام (۴۰۲ §) شاید توجّه باین مطلب خالی از فایده نباشد که خیّام این رساله را قبل از رساله‌ی جبر تصنیف کرده است، زیرا در این رساله وعده می‌دهد (آخر ۶۰۴۰۴ §) که « اگر فرصتی دست دهد و توفیق رفیق شود، همه‌ی این اصناف چهارده گانه [از معادلات درجه‌ی سوّم] را، با جملگی شاخه‌ها وحالات آنها و تمیز آنچه ممکن است از آنچه ممتنع است » گردآورد، « تا رساله‌ای شامل عدّه‌ای از مقدّمات که دراصول این فنّ [یعنی فنّ جبر] فواید عظیم دارد پرداخته آید » .

بقیه‌ی ذیل صفحه‌ی قبل

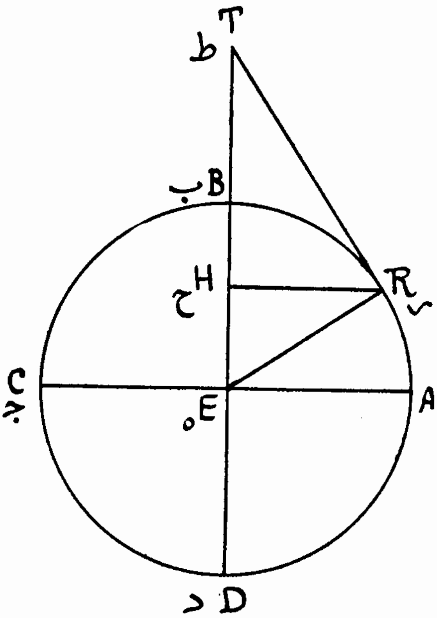
(۱) شرح المقالة العاشرة من‌اصول اقلیدس، از ابوتراب ابن احمد، مورخ ۲۲رجب۱۲۶۱؛ (۲) [رساله‌ی مورد بحث در کتاب حاضر]؛ (۳) مقالة فی‌الوزن والمیزان، از اقلیدس؛ (۴) رسالة فی استخراج تناسب الاعداد السته؛ (۵) مسئلة من کتاب ارشمیدس؛ (۶) برهان آخرللسجزی [برهان دیگری از همان مسئله است]؛ (۷) رسالة فی استخراج ضلع المسبع فی الدائره، از ابو سهل کوهی؛ (۸) رسالة عمل المخمس‌المتساوی الاضلاع من مربع معلوم، از ابوسهل کوهی؛ (۹) فائدة فی‌النسبه؛ (۱۰) مقالة فی ان النبض‌طبیعةموسیقاریه؛ (۱۱) رساله در معرفت وترثلث قوس، از میرزا ابوتراب. پایان مطالب مستخرج از یادداشتهای آقای دانش پژوه

میرزا ابوتراب مذکور (مؤلف رسالات شماره‌ی ۱ و ۱۱)، بقول عباس‌اقبال‌آشتیانی درمقاله‌ی سابق‌الذکر(رجوع شود به ذیل صفحه‌ی ۱۳۵)، از ریاضیون عهد محمدشاه قاجاربوده است .

۴۰۴۰۲ § مندرجات رساله ـ مندرجات رساله را می‌توان به دو بخش عمده تقسیم کرد ، اوّل طرح مسئله‌ی موضوع رساله و تحلیل آن به یك معادله‌ی درجه‌ی سوّم و حلّ این معادله بوسیله‌ی قطوع مخروطی ؛ دوّم کلیّاتی راجع به معادلات که بالاخص مشتمل بر طبقه‌بندی معادلات درجه‌ی اوّل تا سوّم و تاریخچه‌ای از کارهای ریاضیّون اسلامی در حلّ معادلات درجه‌ی سوّم است .

مسئله‌ی موضوع رساله یافتن نقطه‌ای مانند R است بر ربع دایره‌ی AB بطوری که $AE : RH = EH : HB$.

خیّام در حلّ مسئله بطریق تحلیل و ترکیب (✿) عمل می‌کند ، یعنی، باصطلاح امروز، ابتداء فرض می‌کند مسئله حل‌شده وتقسیم مطلوب بعمل‌آمده است (§۶۰۲)، و از آنجا نتیجه می‌گیرد که در مثلث قائم‌الزّاویه‌ی ERT ، $ET = ER + RH$.



(✿) در باب طریق تحلیل و ترکیب یونانیان در اثبات احکام و حل مسائل رجوع شود به : هیث ، **سیزده مقاله** ، جلد ۱ ، صص ۱۳۷ ـ ۱۴۲ ، ومخصوصاً صص ۱۴۵ ـ ۱۴۱ که در آنها نکات لازم الرعایه در حل مسائل بوسیله‌ی تحلیل وترکیب به بهترین وجهی تشریح شده است .

بدین وسیله ، حلّ مسئله را برمی گرداند به تعیین مثلث قائم‌الزّاویه‌ای که وترش مساوی مجموع یکی از دو ضلع دیگر و ارتفاع وارد بر وتر باشد ، و ما برای اختصار چنین مثلّثی را مثلّث مُعین می‌خوانیم . سپس مثلّثی واجد خاصیّت مذکور می‌سازد ، و برای این منظور تصویر ضلع مذکوررا بر وتر ده می گیرد ، و ثابت می کند که اگر x ارتفاع مثلث باشد ، x در معادله‌ی $x^3 + 200x = 20x^2 + 2000$ (☆) صدق می کند (۶۰۳۰٤ §) ، و پس از حلّ این معادله بوسیله‌ی قطوع مخروطی (۶۰۵ §) ، مثلّث معین را می‌سازد ، و بالاخره در ۶۰۶ § مسئله‌ی موضوع رساله را بوسیله‌ی این مثلّث حل می کند . تفصیل مطلب با شرح و توضیحات اضافی ما در قسمت ششم کتاب آمده است .

باید گفته شود که این قسمت از رساله اهمیّت خاصی ندارد ، و اگرچه‌قریب یازده صفحه از رساله‌ی پانزده صفحه‌ای خیّام در حلّ مسئله‌ی مذکور است ، در پایان رساله طریق دیگری در ده سطر از مصنّف نامعلومی آمده است که ما آنرا در پایان متن رساله (صفحه‌ی ۷٤) و ترجمه‌ی فارسی آنرا در آخر قسمت ششم نقل کرده‌ایم .

امّا چند مطلب دیگر در این رساله جالب توجّه است .

(الف) طبقه‌بندی معادلات در این رساله (۶۰٤۰۳ §) اساساً بر حسب درجه است . در باب اهمیّت این موضوع رجوع کنید به ۳۰۶۰۶ § و ٤۰۲ § .

(ب) قسمت تاریخی رساله (۶۰٤۰٤ §) در روشن کردن مساعی دانشمندان دوره‌ی اسلامی در حلّ معادله‌ی درجه‌ی سوّم بسیار سودمند و از آنچه در مقدّمه‌ی جبر خیّام آمده جامعتر است .

(ج) توجّه به حلّ‌عددی مسئله (۶۰۷ §) . در رساله‌ی جبر خیّام از این مقوله سخنی نیست .

بالاخره نکته‌ی دیگری که در این رساله بنظر ما حائز اهمیّت است اشاره‌ی

(☆) حالت خاصی از معادله‌ی « کعب و شیء » با « مال و اعداد » . رجوع شود به ۵۰۹۰۳ § .

خیّام است(☆) به **آلاتی** برای ساختن مکعّبی معادل مکعّب مستطیل مفروض **برای اشخاصی که مخروطات ندانند** . به یقین می‌دانیم که ریاضیّون اسلامی آلاتی ، بنام پرگار تامّ ، برای رسم قطوع مخروطی طرح و رسائلی در باب آنها تألیف کرده بودند (†) امّا « آلتی » برای حلّ معادله‌ی $x^3 = a$ ، یعنی برای استخراج کعب،برای کسی که مخروطات نداند ، حائز اهمیّت است ، و امیدواریم روزی معلوم شود که مقصود از آلتی که خیّام بآن اشاره می کند چیست .

در پایان این مختصر توجّه خواننده را به ٤۰۲۰۱ - ٤۰۲ §§ ، درمعرّفی خیّام بعنوان عالم جبر ، که در ضمن آن رساله‌ی مورد بحث با رساله‌ی جبر خیّام از جهاتی مقایسه شده است ، جلب می کنیم .

۴۰۵ § اصطلاحات ریاضی خیام

۴۰۵۰۱ § – اصطلاحات ریاضی خیّام همان اصطلاحات رایج در نزد ریاضیّون اسلامی است .

از **اصطلاحات جبری** قدیم در ۳۰٤۰٤ § و ۳۰٦۰٦ - ۳۰٦۰٤ §§ با تفصیل، کافی سخن گفتیم . بعلاوه ، خیّام بعضی از اصطلاحات جبر را در رسائل خود تعریف می کند (رجوع شود به § - های ۱۰۱۰۳ ، ۵۰۱۰۳ ، ۱۰۱۰۵ ، ۵۰۱۰۵ ، ۱۰۲۰۱ ، ۵۰۲۰۱ ، ۲۰٤۰۲ ، و ٦۰٤۰۲) .

اکثر **اصطلاحات هندسی** خیّام همانهاست که امروز نزد ما - یا لااقلّ نزد کسانی از ما که از عقل سلیم برخوردارند - رایج است ، مانند خط ، منحنی، قوس،

(☆) ٦۰٤۰۳ § در حل «مکعبی که معادل اعداد باشد» ، یعنی معادله‌ی $a = x^3$.

(†) ازآن‌جمله است‌رساله‌ی **فی‌البرکار التام والعمل به** ازابوسهل‌کوهی (۳۰٤۰۵۰۵§)، ورساله‌ی **فی البرکار التام** از محمد ابن الحسین ابن محمد ابن الحسین ، که در اواسط نیمه‌ی دوم قرن ششم ه ق برآمده ، و رساله‌ی مذکور را بنام سلطان معروف ایوبی الملك الناصر صلاح الدین یوسف I ابن ایوب (۵۳۲ - ۵۸۹ ه ق) ، نوشته است . رجوع شود به : ویکه ، **جبر خیام** ، حواشی صص ۵٦ - ۵۷ . (ونیز سارتن ، **مدخل** ، جلد اول ، صص ٦٦۵ و ۷۱۸ ؛ بروکلمان ، جلد اول ، صص ۲۵٤ و ٦۲۱) .

دایره ، مرکز ، قطر ، قاعده ، ارتفاع ، و غیره . از اصطلاحاتی که امروز منسوخ است میتوان **اضافه کردن سطحی برخطی** و **مُتَکافی** (یا **مکافی**) **بودن** را ذکر کرد، که اوّلی را در ۳۰۲۰۳۰۱ § (صص ۸۵-۸۶) توضیح دادیم ، ودیگری را خیّام بمعنی «به‌نسبتِ عکسِ یکدیگر بودن» مصطلح امروز بکارمی‌برد. مثلا گوید هرگاه مساحات دو مستطیل مساوی باشد ، « قواعد آنها با ارتفاعاتشان متکافی‌اند » ، یعنی قواعدآنها به نسبت عکس ارتفاعاتشان است ؛ و کذلك در مورد دو مکعّب مستطیل (٭) .

بعلاوه ، خیّام الفاظ **سطح** و **مُجَسَّم** را بترتیب برای مستطیل و مکعّب‌مستطیل اصلاح می کند (۱۰۶۰۳۰۱ § و ۵۰۶۰۳۰۱ §) ، و لفظ مربّع را ، علاوه بر معنی اصطلاحی ، احیاناً بمعنی شکل (مستوی) چهار ضلعی بکار می‌برد (مثلا ۲۰۴۰۲ § و ۶۰۴۰۲ §) . درترجمه‌ی فارسی رسائل خیّام ، در این موارد ما اصطلاحات کنونی‌را بکار برده‌ایم .

در باب **اصطلاحات مخروطات** توجّه به توضیحات آتیه برای‌فهم مطالب خیّام مفید است(٭٭).

خیّام محور کانونی قطع را **سهم** آن و نقطه‌ی تقاطع آن را با منحنی (درمورد قطع مکافی) یا شاخه‌ای از آن که مورد نظر است (درمورد قطع زاید) **رأس** منحنی می‌خواند . **ضلع قائم** † در اصطلاح او طولی مساوی وتر کانونی عمودبرمحورکانونی و **ضلع مایل** †† طول قطر کانونی‌است .

(٭) تعریف «اشکال متکافیة الاضلاع» که در **تحریر اقلیدس** آمده (ابتدای مقاله‌ی ششم ، ص ۸۲) بی معنی است ، وهمچنین است تعریف اقلیدس در متن یونانی موجود کتاب **اصول** (رجوع شود به : **هیث** ، **سیزده‌مقاله** ، جلد ۲ ، ص ۱۸۹) .

(٭٭) برای تسمیه‌ی قطوع رجوع شود به ۳۰۲۰۳۰۳§ .

(†) رجوع شود به ذیل صفحه‌ی۹۱ .

(††) به لاتینی **لاتوس ترانسورسوم** (Latus transversum).

قطوعی که خیّام بکار می‌برد منحصر به دایره ، قطع مکافی (سهمی) ، و قطع زاید (هذلولی) متساوی‌القطرین است ، و در استعمال خواصّ دو قطع اخیر ـ جز در مواردی که قطع زایدرا به مجانب‌هایش † نسبت می‌دهد ـ **رأس** و **سهم** و مماس‌مرسوم از رأس را بر منحنی بترتیب ، باصطلاح امروز ، مبداء مختصّات و محور طول و محور عرض می گیرد . عرض نقطه‌ای از منحنی‌را نسبت باین دستگاه **خطّ ترتیب** و زاویه‌ی دو محور را **زاویه‌ی ترتیب** می‌خواند .

(†) خیام اصطلاح خاصی برای مجانب منحنی ندارد ، و هرجا می‌خواهد از «هذلولی با مجانبهای D و 'D» صحبت کند می گوید «قطع زایدی که خطوط D و 'D آن را قطع نکنند .»

قسمت پنجم

رسالهٔ جبر خیام

(ترجمهٔ فارسی)

قسمت پنجم
رسالهٔ حکیم فاضل
غیاث‌الدین ابوالفتح عمرابن ابراهیم خیامی نیشابوری
در اثبات مسائل جبر و مقابله
[مقدمه]

حمد خداراست ـ خدائی که پروردگارجهانیان‌است ـ وانجام نیك پرهیزکاران را ؛ و دشواری و تنگی جز بر ستمکاران نیست؛ و درود بر پیغمبران ، خصوصاً برمحمّد و جمیع خاندان پاك او .

یکی‌از مباحث ریاضی که در قسمتی‌از حکمت که معروف به علوم ریاضی‌است محتاج الیه می‌باشد فن‌جبر و مقابله است که برای استخراج مجهولات عددی‌وهندسی وضع شده است . و در این فن اصنافی [از معادلات] هست که در حل‌آنها یك رشته مقدمات بسیار دشوار محتاج الیه می‌باشد ، و باین جهت ، اغلب کسانی که باین‌اصناف پرداخته‌اند در حل آنها وامانده‌اند . [توضیح آنکه] از پیشینیان سخنی درین باب به ما نرسیده است ـ شاید در حل این اصناف جستجو و مطالعه کرده‌اند ، ولی چیزی درنیافته‌اند ، یا در تحقیقات خود نیازمند به امعان نظر در آنها نشده‌اند، و یا بالاخره، شاید آثارشان درین باب به زبان ما ترجمه نشده است . و اما از متأخّرین ، یکی از ایشان ، بنام ماهانی (*) ، در صدد تحلیل جبری‌مقدمه‌ای برآمد که ارشمیدس‌درشکل چهارم از مقالهٔ هشتم کتاب خود موسوم به **کره و استوانه** بکار برده است ، و این امر منجر شد به معادله‌ای بین کعبها و مالها و اعداد ، و وی ، بعد از تفکر زیاد ، از حل آن عاجز ماند ، و لهذا حکم به امتناع آن کرد . بعد ، ابو جعفر خازن پیدا شد ، و آن را به وسیلهٔ قطوع مخروطی حل نمود . سپس ، بعد از وی ، جماعتی ازعلمای

(*) ۱۰۵۰۴۰۳ § و ۴۰۴۰۶ § .

هندسه به [حل] عده‌ای از اصناف [معادلات] جبر محتاج شدند ، و بعضی از آنان برخی از آنها را حل کردند ، ولی هیچیك را در برشمردن اصناف معادلات و معیّن کردن انواع هرصنف و برهان حل آنها مطلب معتبری نیست مگر در مورد دو صنف که بزودی ذکر خواهم کرد ☆ .

و من همواره سخت اشتیاق به تحقیق استدلالی این اصناف وجدا کردن حالات ممکن و ممتنع هرصنف داشتم، چو می‌دانستم که این‌امر در حل مسائل دشوارشدیداً مورد احتیاج است . لکن تصاریف زمان همواره با پیشامدهائی همراه بود که پرداختن باین امر را بعهده‌ی تعویق می‌انداخت ، و برای من فراغتی نمی‌گذاشت که صرف تدوین این مطلب کنم وفکر خود را بر آن متمرکز سازم . زیرا ما گرفتار روزگاری هستیم که ازاهل علم فقط عده‌ی کمی ، مبتلی به هزاران رنج و محنت ، باقی مانده ، که پیوسته در اندیشه‌ی آنند که غفلتهای زمان را فرصت جسته به تحقیق در علم و استوار کردن‌آن بپردازند . و بیشترعالم نمایان زمان ما حق‌را جامه‌ی باطل می‌پوشند، و گامی از حد خود نمائی و تظاهر به دانائی فراتر نمی‌نهند . و آنچه راهم می‌دانند جز در راه اغراض مادی پست بکار نمی‌برند ، و اگر ببینند که کسی جستن حقیقت و بر گزیدن راستی را وجهه‌ی همت خود ساخته ، و در ترك دروغ و خودنمائی و مکر و حیله جهد و سعی دارد ، او را خوار می‌شمرند و تمسخر می کنند . و در هرحال‌خدا یاری دهنده و پناه همه است .

و چون خدای تعالی نعمت پیوستگی به آستان سرور بزرگ بیهمتا ، قاضی القضات ، امام سیدابوطاهر† را ، که خداوندبزرگیش را همواره برقراردارد وحسودان ودشمنانش را مقهور فرماید ، به من ارزانی داشت - واین پس ازآن بود که از دیدن کسی چون او ، که در همه‌ی فضایل عملی و نظری و در جمع بین موشکافی در علوم و پایداری در اعمال و خیرخواهی برای هر فردی از همنوعان خود کامل باشد ، مأیوس

(☆) در این باب مخصوصاً به §۶۰۴۰۴ مراجعه شود .

(†)§۴۰۱۰۲ (الف) .

شده بودم ـ قلبم به دیدار او باز و نامم به مصاحبت اوبزرگ شد ، و در پرتو انوار وی کارم بالا گرفت ، و به انعام و الطاف او پشتگرمی یافتم . پس ، برای نزدیکی جستن به مجلس بلندپایه‌ی او چاره جز آن ندیدم که ، با تلخیص زبده‌های حقایق فلسفی که راستی و درستی آنها را معلوم کرده بودم ، فرصتی را که سختیهای روزگار ازمن گرفته بود تلافی کنم، و این‌کار را با تنظیم این‌اصناف ازمقدمات جبری‌آغاز کردم ـ چو ریاضیّات به تقدیم سزاوارتر است ـ و در این امر به ریسمان توفیق الاهی چنگ زدم ، و از او چشم امید دارم که مرا به ادامه‌ی این کار موفق بدارد تا نتیجه‌ی بحث خود و بحث پیشینیانم را در علومی که اهمّ از دیگر علوم است بدرستی تعیین کنم ، و در این امر به دستاویز محکم پروردگار که حافظ ما از خطاها است چنگ می زنم ، که البته اجابت دعا در دست او و در همه حال توکل بر اوست .

[۵۰۱ § تعریفات و اصطلاحات]

[۵۰۱۰۱ § جبر ومقابله ـ] بیاری خدا و توفیق نیك وی ، گویم که فن جبر و مقابله فنی است علمی که موضوع آن عدد مطلق ومقادیر قابل سنجش است از آن جهت که مجهول‌اند ولی مرتبط با چیز معلومی هستند که بوسیله‌ی آن می‌توان آنها را استخراج کرد . و این چیز یا کمیتی است ، ویا رابطه‌ای که بستگی معلوم و مجهول منحصر بآن است ، و از بررسی و تحلیل مجهولات موضوع مسئله استنباط می‌شود ☆ .

مطلوب علم جبر عوارضی است که به موضوع آن ، از آن جهت که ـ بشرح مذکور ـ موضوع آنست ، ملحق می‌شود . و کمال علم جبر آگاهی از طرق ریاضی است که بوسیله‌ی آنها نوع مذکور از استخراج مجهولات عددی یا هندسی فهمیده می شود .

[۵۰۱۰۲ § مقادیر ـ] و [مقصود از] مقادیر کمیتهای متّصل است ، و آن ـ

(☆) عبارت متن (۱۰۱۰۱ §) مشتمل برضمایرچندی است که مراجع آنها آشکارنیست. ترجمه‌ی فوق ، تا حدی که ما می‌توانیم تشخیص دهیم، با متن‌وبا اصل مطلب ظاهراً نا مطابق‌نیست.

بنابر آنچه بالاجمال در قاطیغوریاس و بتفصیل در حکمت اولی مذکور است ــ چهار است : خط ، سطح ، جسم ، و زمان . وجماعتی‌مکان را نوعی قسیم سطح در تحت جنس متّصل می‌شمارند ☆ ، ولی بررسی دقیق بطلان این رأی را آشکار می‌سازد ، و درست اینست که مکان سطحی است درحال خاصی ، ولی تحقیق در این امر خارج از موضوع بحث ماست .

و عادةً زمان را در موضوعات مسائل جبر نمی‌آورند ، ولی ذکر آن دراین باب جایز است .

[**۵۰۱۰۳ § بعضی اصطلاحات جبریها**☆☆ **ــ**]وعادت جبریها اینست که درفن خود مجهولی را که می‌خواهند استخراج کنند **شیء** نامند ، و حاصل ضرب آنرا در مثل خودش **مال** ، و حاصل ضرب مالِ آنرا در آن [، یعنی در آن شیء ،] **کعب** ، و حاصل ضرب کعب آنرا در مثل آن [شیءِ] **مال مال** ، و حاصل ضرب کعبِ آنرا در مالِ آنْ **مال کعب** ، و حاصل ضرب کعب آنرا در مثلِ آنْ [کعب] **کعب کعب**، و بهمین قیاس تا هر مرتبه که پیش رویم .

و از کتاب اقلیدس دراصول † معلوم است که این‌مراتب جملگی‌متناسب‌اند، یعنی نسبت واحد به جذر مثل نسبت جذر به مال و مثل نسبت مال به کعب است . پس نسبت عدد به جذرها مثل نسبت جذرها است به مالها و مثل نسبت مالها است به کعب ها ومثل نسبت کعب‌ها است به مال مالها ، وهکذا تا هرمرتبه که پیش‌رویم†† .

[**۵۰۱۰۴ § مرتبه‌ی تعلیمی این رساله ــ**]وباید دانست که این رساله را جز کسی که بر کتاب اقلیدس در اصول و کتاب وی در معطیات و دو مقاله‌ی [اول]

(☆) یعنی مکان را نوعی از جنس کم و در مرتبه‌ی سطح میشمارند .

(☆☆) رجوع شود به ۳۰۶۰۴ § .

(†) **تحریر اقلیدس** ، مقاله‌ی نهم .

(††) مقصود اینست که نسبت هرعدد به همان عده ازجذرهامساوی نسبت عده‌ای ازجذرها است بهمان عده از مالها ، و غیره . بعبارت امروزی

$$a : ax = bx : bx^2 = cx^2 : cx^3 = \dots$$

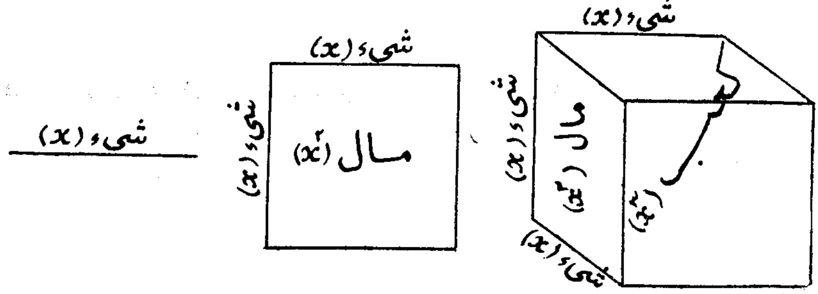
کتاب آپولّونیوس در مخروطات مسلط باشد نمی‌فهمد ، و همانا کسی که از دانستن یکی ازین سه [کتاب] بازمانده راهی برای دانستن این رساله ندارد ، و من این زحمت را برخود هموار کرده‌ام که درین رساله جزبآن کتابهای سه گانه توسل نجویم.

[**۵۰۱۰۵ § معادله ـ**] و استخراج های [مجهولات به علم] جبر بوسیله‌ی معادله انجام پذیرد ، و آن ، بنا برمشهور ، معادله‌ی برخی ازین مراتب (✩) است با بعضی از آنها . و هر گاه جبری مال مال را در مسائل مربوط به مقادیر هندسی بکار برد ، البته این استعمال بر سبیل مجاز است ، نه از راه حقیقت ، زیرا وجود مال مال در مقادیر ممکن نیست ، وآنچه در مقادیر پیش می‌آید ، یا یك بُعداست ، وآنْ جذر یا ـ هر گاه نسبت به مربعش [، یعنی مربعی که این بعدْ ضلع آن باشد ،] ملحوظ شود ـ ضلع است ؛ و پس از آن دو بعد می‌آید ، وآن سطح است ، و مالْ در مقادیر سطح مربع است ؛ و پس ازآن سه بعد می‌آید ، وآن جسم است ، ومکعب در مقادیر همانا جسمی است که شش مربع بآن محیط باشند (†) ؛ و چون بعد دیگری نیست ،

(✩) مقصود عدد ، شیء ، مال، کعب ، و غیره است .

معادلاتی که درین کتاب مورد بحث است ، باصطلاح امروز ، یك مجهولی است ، وهر گاه از معادله‌ای بین چند **مرتبه** صحبت شود ، مقصود مراتب مربوط به یك مجهول (یعنی یك **شیء**) است که همان مجهول‌مسئله می‌باشد. بعلاوه خیام همواره ضریب‌جمله‌ی بالاترین‌درجه را واحد می گیرد، و در بیان صورت معادلات اغلب بذکر **مراتب** اکتفا می کند و متعرض ضرایب نمی‌شود ، و مثلا معادله‌ی $x^3 + ax^2 + bx = c$ را بعبارت «کعبی و مالی و جذری معادل عددی است» بیان می کند . ما در ترجمه‌ی رسائل خیام از همین روش مسامحه‌آمیز وی پیروی می کنیم ، ولی برای رفع شبهه واحترازازتکرار ، توجه خواننده را بنکات مذکوردرین حاشیه ودر §§۳۰۶۰۴-۳۰۶۰۵ جلب می‌نمائیم .

(†)



مال مال در مقادیر وارد نمی‌شود، چه رسد بمراتب بالاتر از آن، {وهر گاه مال مال درمقادیر گفته شود، این گفته درباب عدداجزای مقدار است در صورت اندازه گیری، نه در باب خود آن مقدار که اندازه گیری شده است} ☆، واین دو اطلاق متفاوتند. پس مال مال، نه با لذّات و نه بالعرض، در مقادیر وارد نمی‌شود، و مانند زوج بودن و فرد بودن نیست، زیرا زوجیّت و فردیّت باعتبار عددی که اتّصال مقادیر را منفصل می کند [احیاناً] عارض مقدار می‌شوند†.

[۵۰۱۰٦ § خلاصه‌ی مندرجات و روش مؤلف درین رساله ـ] و آنچه

(☆) عبارت داخل { } را بعنوان ترجمه‌ی عبارت ذیل از متن خیام آورده‌ایم:

واذا قیل مال المال فی المقادیر فانما یقال ذلك لعدد اجزائهاعندالمساحة لا لذواتها ممسوحة.

ظاهراً مقصود خیام اینست که اگر از «مال مال» یك قطعه خط، یعنی قوه‌ی چهارم آن، صحبت شود، مقصود قوه‌ی چهارم عددی است که نماینده‌ی طول آن قطعه است نه قوه‌ی چهارم آن قطعه. مؤید این تفسیر سخن خیام است در **رساله‌ی تحلیل** (٦۰٤۰۲ §): «اطلاق الفاظ مال مال . . . بر مقادیر متصل از جهت اطلاق عدد بر این مقادیر است». بعلاوه، بر طبق اصطلاحات فلسفه‌ی قدیم، «کم متصل و منفصل یکدیگر را عارض شوند. اما عروض اتصال کم منفصل را سبب تجزیه‌ی واحد بود به اجزاء نامتناهی ...؛ و اما عروض انفصال کم متصل را سبب شمردن آن شود به احاد». (رجوع شود به **اساس الاقتباس**، تهران ۱۳۲٦، ص ۴۲).

ویکه (ظاهراً باستناد ۵۰۱۵۰۲ §)، در عبارت مورد بحث، جزء را بمعنی **عکس** مصطلح امروز گرفته، و در معنی عبارت مذکور چنین آورده است که «هرگاه گفته شود که مال مال جزء مقادیر قابل اندازه گیری است، این مطلب باعتبار مقدار عکس آنست که در مسائل اندازه گیری (= هندسی) بکار میرود.» (عین عبارت او در صفحه‌ی ۸ کتاب **جبر عمر خیام**: Et si l'on dit que le caré – carré fait partie des grandeurs mesurables, cela se dit par rapport à sa valeur réciproque employée dans les problèmes de mesure), و در توجیه این ترجمه، در ذیل همان صفحه گوید که اگر مثلا مطلوب کره‌ای باشد که نسبت حجم آن به واحد حجم مساوی نسبت طول مفروض a به شعاع کره‌ی مطلوب (r) باشد، خواهیم داشت $a : r^4 = 4\pi : 3$، و بدین ترتیب قوه‌ی چهارم r : ۱ درکار می‌آید. بنابرآنچه گفتیم، ترجمه و توجیه ویکه بنظر ما بسیار مستبعد است، بخصوص که در مثال مذکور، معادله‌ی مسئله $a : r = 4\pi r^3 : 3$ است، وبعیداست که کسی که «مال مال» را درمقادیر غیرممکن می‌شمارد این معادله را به صورتی که ویکه ساخته است درآورد.

(†) در نمایش مقادیر هندسی بوسیله‌ی اعداد، اگراحیاناً عدد حاصل صحیح باشد، ناچار فرد یا زوج است. رجوع شود به ذیل ☆ همین صفحه.

ازین معادلات چهارگانه‌ی هندسی- یعنی اعداد مطلق واضلاع و مربع‌ها و مکعب‌ها- در کتب جبریها آمده است سه معادله است بین عدد و اضلاع و مالها (☆)، و اما ما بزودی راههائی خواهیم آورد که بوسیله‌ی آنها می‌توان مجهول را از معادلات بین چهار مرتبه‌ای که گفتیم زاید بر آنها در مقادیر واقع نمی‌شود - یعنی عدد و شیء و مال و کعب - استخراج کرد.

و آنچه [ازین معادلات] که اثبات [طریق حل] آن بوسیله‌ی خواص دایره - یعنی بوسیله‌ی کتاب اقلیدس در اصول و در معطیات - ممکن است مبرهن خواهد گردید، و منتهای کوشش در آسان کردن براهین خواهد شد. و آنچه اثباتش جز به خواص قطوع مخروطی ممکن نیست بوسیله‌ی دو مقاله‌ی کتاب مخروطات مبرهن خواهد گشت، واما اثبات[حل] این اصناف وقتی موضوع مسئله عدد مطلق باشد(☆☆)- جز در سه مرتبه‌ی اول، و آن [معادله‌ی بین] عدد و شیء و مال است (†) - بر ما و بر دیگر علمای جبر ممکن نشده است، و شاید دیگران که بعد از ما آیند بر آن وقوف یابند. و من گاهی در مسائلی که می‌توان از کتاب اقلیدس برهان‌برای[حل] آنها آورد اشاره به براهین عددی می کنم. و باید دانست که وقتی موضوع مسئله عدد باشد، نه مقادیرهندسی، برهان هندسی راهها [ی حل‌معادلات] جای براهین عددی را نمی گیرد، و شاهد برین مطلب‌اینست(††) که اقلیدس در مقاله‌ی پنجم کتاب [اصول] خود برای احکامی درباب نسبتهای بین مقادیر برهان آورده، وسپس عین همین احکام را در نسبتهای بین اعداد در مقاله‌ی هفتم از نو ثابت کرده است.

(☆) مقصود سه معادله‌ی

$$x^2 + bx = a, \qquad x^2 + a = bx, \qquad x^2 = a + bx$$

است. خیام معادلات $bx = x^2, a = x^2, a = x$ را که درآثار پیشینیان آمـده از قلم انداخته ولی بعداً در طبقه بندی آورده است (§ ۵۰۲۰۲).

(☆☆) یعنی حل عددی معادلات. در این باب به ۴۰۲۰۱ § نیز رجوع شود.

(†) یعنی معادلات درجه‌ی دوم.

(††) رجوع شود به ۴۰۲۰۱ §، ص ۱۳۷

[۵۰۲ § طبقه بندی معادلات]

[۵۰۲۰۱ § ـ] و معادلات بین این چهار [مرتبه ✡] به مفردات و مقترنات تقسیم می‌شود✡✡ .

[۵۰۲۰۲ § مفردات ـ] و مفردات شش صنف است✡✡✡ :

(الف) عددی معادل جذری است ،

(ب) عددی معادل مالی است ،

(ج) عددی معادل کعبی است ،

(د) جذرهائی معادل مال است ،

(هـ) مالهائی معادل کعب است ،

(و) جذرهائی معادل کعب است .

و سه صنف ازین اصناف شش‌گانه در کتابهای جبریها مذکور است ، و آنان چنین گفته‌اند که نسبت شیء به مال مثل نسبت مال به کعب است † . پس لازم می‌آید که معادله‌ی مال با کعب مثل معادله‌ی شیء با مال باشد . و نیز [گفته‌اند که] نسبت عدد به مال مثل نسبت جذر به کعب است††. و این احکام را بطریق هندسی ثابت نکرده‌اند . و اما در معادله‌ی بین عدد و مکعب ، برای استخراج عددی ضلع مکعب راهی جز اِستِقراء × نداریم ، واما حل هندسی [این صنف] جز باقطوع مخروطی

(✡) عدد ، شیء ، مال ، کعب .

(✡✡) رجوع شود به ۳۰٦۰٦ § و ۴۰۲ § و ۴۰۳۰۴۰۲ § .

(✡✡✡)

(د)	$bx = x^2$	(ا)	$a = x$
(هـ)	$cx^2 = x^3$	(ب)	$a = x^2$
(و)	$bx = x^3$	(ج)	$a = x^3$

(†) یعنی $x : x^2 = x^2 : x^3$.

(††) مقصود اینست که $a : x^2 = ax : x^3$.

(×) شاید مقصود تفحص در جدولی مشتمل بر مکعبات اعداد طبیعی باشد . و نیز رجوع شود به ذیل †† صفحه‌ی ۱۷۵ و ✡✡ صفحه‌ی ۱۷۲ .

ممکن نیست (☆) .

[**۵۰۲۰۳ § مقترنات سه‌تائی -**] و اما مقترنات بعضی سه تائی و برخی چهارتائی است .

اما مقترنات سه‌تائی دوازده صنف است .

[**۵۰۲۰۳۰۱ § مقترنات سه‌تائی درجه‌ی دوم (☆☆) -**] . سه صنف اول مقترنات سه‌تائی عبارتست از (☆☆☆) :

(الف) مالی و جذری معادل عددی است ،

(ب) مالی و عددی معادل جذری است ،

(ج) جذری و عددی معادل مالی است .

و این‌سه صنف در کتابهای علمای جبر مذکور وحل هندسی‌آنها مبرهن‌است ، ولی برای حل عددی آنها برهانی نیاورده‌اند (†) .

[**۵۰۲۰۳۰۲ § مقترنات سه‌تائی درجه‌ی سوم قابل تحویل بدرجه‌ی دوم (††) -**] و سه صنف دوم مقترنات سه تائی عبارتست از :

(الف) کعبی و مالی معادل جذری است ،

(ب) کعبی و جذری معادل مالی است ،

(ج) جذری و مالی معادل کعبی است ،

(☆) وآن در ۵۰۶۰۵ § آمده است .

(☆☆) حاجت بتذکار نیست که لفظ « درجه‌ی دوم » و امثال آن از جبر جدید بعاریت گرفته شده است .

(☆☆☆) (الف) $x^2 + bx = a,$ (ب) $x^2 + a = bx,$

(ج) $bx + a = x^2$

(†) خیام هم باین مضمون اکتفا می‌کند که برهان عددی از تصور برهان هندسی فهمیده می‌شود .

(††) (الف) $x^3 + cx^2 = bx,$ (ب) $x^3 + bx = cx^2,$

(ج) $cx^2 + bx = x^3.$

و جبریها گفته‌اند که این سه صنف دوم هریك با نظیر خود از صنف اول ☼ متناسب است، یعنی معادله‌ی کعب و جذر با مال در حکم [معادله‌ی] مال و عدد با جذر است☼☼، و هکذا در مورد سایرین. و این احکام را وقتی موضوع مسائل مقادیر هندسی باشد ثابت نکرده‌اند، واما اگرموضوع مسائل عدد باشد، این‌احکام از کتاب اصول آشکار است، ومن بزودی برای آنها برهان هندسی خواهم آورد.

[۵۰۲۰۳۰۴§ مقترنات سه‌تائی‌درجه‌ی سوم ـ] اما شش معادله‌ی دیگر از اصناف دوازده‌گانه † :

(۱) کعبی و جذری معادل عددی است،

(ب) کعبی و عددی معادل جذری است،

(ج) عددی و جذری معادل کعبی است،

(د) کعبی و مالی معادل عددی است،

(ه) کعبی و عددی معادل مالی است،

(و) عددی و مالی معادل کعبی است.

و در باب این شش صنف در کتب جبریها سخنی نیست مگر کلامی ناقص در باب یکی‌ازآنها††، ومن بزودی‌آنها راتوضیح داده برهان[حلّ] هندسی ـ نه عددی ـ آنها را خواهم آورد، و برهان این شش صنف جز بوسیله‌ی خواص قطوع مخروطی ممکن نیست.

(☼) مذکور در ۵۰۲۰۳۰۱ §

(☼☼) یعنی معادله‌ی $x^3 + bx = cx^2$ با معادله‌ی $x^2 + b = cx$ معادل است. البته خیام از ریشه‌ی $x = 0$ بی‌خبر است.

(†) شش معادله‌ی درجه‌ی سوم مورد بحث عبارتند از

(۱)	$x^3 + bx = a$	(د)	$x^3 + cx^2 = a$
(ب)	$x^3 + a = bx$	(ه)	$x^3 + a = cx^2$
(ج)	$a + bx = x^3$	(و)	$a + cx^2 = x^3$

(††) مقصود معادله‌ی $x^3 + a = cx^2$ است. رجوع شود به ۵۰۷۰۶ §

[۵۰۲۰۴ § مقترنات چهارتائی -] و اما مقترنات چهارتائی بردو قسم است.

[۵۰۲۰۴۰۱ § مقترنات چهارتائی سه با یك -] یکی [از دو قسم مقترنات چهارتائی]، که قسم اول باشد، آنست که درآن سه مرتبه معادل یك مرتبه[ی دیگر] باشد، وآن چهار صنف است ✡ :

(ا) کعبی و مالی و جذری معادل عددی است،

(ب) کعبی و مالی و عددی معادل جذری است،

(ج) کعبی و جذری و عددی معادل مالی است،

(د) کعبی معادل جذری و مالی وعددی است.

[۵۰۲۰۴۰۲ § مقترنات چهارتائی دوبا دو -] و قسم دوم آنست که درآن دو مرتبه معادل دو مرتبه[ی دیگر] باشد، وآن سه صنف است ✡✡:

(ا) کعبی و مالی معادل جذری وعددی است،

(ب) کعبی و جذری معادل مالی وعددی است،

(ج) کعبی و عددی معادل جذری ومالی است.

[۵۰۲۰۴۰۳§ -] واصناف هفتگانه‌ی چهارتائی همین‌ها است، و ما را راهی به حل هیچیك جز بطریق هندسی نیست. و اما یکی از پیشینیان ما نیازمند نوعی از انواع یکی‌از اصناف شد † که بزودی‌آنرا خواهم گفت. و برهان [حل] این اصناف جزبوسیله‌ی خواص قطوع مخروطی انجام پذیر نیست.

(✡) (ا) $x^3 + cx^2 + bx = a$

(ب) $x^3 + cx^2 + a = bx$

(ج) $x^3 + bx + a = cx^2$

(د) $x^3 = bx + cx^2 + a$

(✡✡) (ا) $x^3 + cx^2 = bx + a$

(ب) $x^3 + bx = cx^2 + a$

(ج) $x^3 + a = bx + cx^2$

(†) مقصودمعادله‌ی $x^3 + bx + a = cx^2$ است. رجوع شود به ۵۰۸۰۴۰۱-۵۰۸۰۴ §§.

[§۵۰۲۰۵] و من بزودی یك یك این اصناف بیست و پنجگانه ✩ را میآورم و [راه حل] هریك را ثابت میکنم ، و درین کار از خداوند یاری میجویم ، چو وی هر کس را که خالصانه باوتوکل کند هدایت و ازدیگران مستغنی میفرماید .

[§۵۰۳ حل مفردات✩✩]

[§۵۰۳۰۱] **صنف اول** مفردات آنست که **جذری† معادل عددی باشد .**

پس جذر° ناچار معلوم است ، و حکم این [معادله] دراعداد و درمقادیر هندسی یکسان باشد .

[§۵۰۳۰۲] **صنف دوم** آنست که **عددی معادل مالی باشد .**

پس مال° از جنبه‌ی عددی معلوم است ، زیرا معادل عدد معلوم است ، و برای دانستن جذرآن راه عددی نداریم جزاستقراء††؛ زیرا آنکس که میداند جذر بیست و پنج پنج است ، البته این‌مطلب را ازهمین طریق‌میداند نه برطبق قانونی [ازعلم‌حساب یا جبر] . پس توجهی بگفته‌ی کسانی ازجبریها که درین باب با ما اختلاف نظر دارند نمیکنیم . و هندیان را دراستخراج جذر و کعب طریقه‌ایست مبتنی براندك استقرائی، وآن شناسائی مربعات اعداد نه‌گانه ـ یعنی مربع یك و دو و سه [... تا نه] ـ و نیز حاصل ضرب بعضی در بعضی است ـ یعنی حاصل ضرب دو در سه وامثال آن . و ما را کتابی است دربراهین درستی این راهها ومنجرشدن آنها به مطلوب ، و ما انواع این طریقه‌ها را افزون کرده‌ایم ـ یعنی‌استخراج مال مال ومال کعب و کعب کعب× وغیره

(✩) شش صنف مفردات ، دوازده صنف مقترنات سه تائی، وهفت صنف مقترنات چهارتائی ؛ یعنی همه‌ی معادلات درجات اول و دوم و سوم ، جزآنهائی که درین صورت مندرجند :

$$dx^3 + cx^2 + bx + a = o \qquad (a, b, c, d \geqslant 0) .$$

نیز رجوع شود به§۴۰۳۰۴۰۲ (صص ۱۴۵ ـ ۱۴۶) .

(✩✩) رجوع شود به ۵۰۲۰۱ § و§۴۰۳۰۴۰۲ (صص ۱۴۵) .

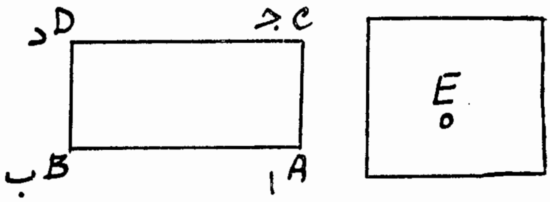
(†) برای استعمال جذر باین معنی رجوع شود به §۳۰۶۰۴ (ص ۱۱۲) .

(††) رجوع شود به ذیل × صفحه‌ی ۱۶۶ .

(×) مقصود استخراج ریشه های چهارم پنجم و ششم است ، و غیـره . نیز رجوع شود به ۴۰۱۰۲ § (ص ۱۳۲) .

را برآنها افزوده‌ایم ، و این اضافات تازه است ــ و این براهین [که بآنها اشاره شد] براهینی‌عددی ومبتنی برقسمتهای مربوط به علم حساب در کتاب اُسطقسّات ✡ است .

و برهان هندسی [حل] صنف دوم چنین است . خط AB را مفروض و مساوی عدد مفروض و AC را واحـد و عمود برAB قرار میدهیم ، و مستطیل AD✡✡ را تمام



میکنیم . پس معلوم است که مساحت مستطیل AD مساوی عدد مفروض‌است . سپس‌ـ بنابرآنچه اقلیدس در شکل چهاردهم از مقاله‌ی دوم کتاب خود ثابت کرده ـ سطحی بشکل مربع [که مساحت‌آن] مساوی مستطیل AD [باشد] میسازیم ، وآن مربع E است . پس مربع E مساوی عدد مفروض و لهذا معلوم است ، و بالنتیجه ضلع آن نیز معلوم میباشد (در برهانی که اقلیدس در شکل مذکورآورده تامّل کنید) ، واین همان است که میخواستیم † .

[۵۰۳۰۳§ **تعریف**ـ] وهروقت‌درین رساله گوئیم که عددی مساوی سطحی‌است ، در چنین موردی ، مقصود ما از عدد سطحی است [چهار ضلعی] که زوایای آن قائمه باشند ، ویکی از دو ضلع [مجاور] آن واحد باشد ، و دیگری ازحیث اندازه مساوی

(✡) لفظ **اُسْطُقُسّ** یا **اِسْطُقِس** معرّب لفظ یونانی **سْتوِیْخیون** و بمعنی **اصل** است ، وعناصر اربعه را اسطقسات گویند . مقصود از کتاب **اسطقسّات** در متن همان کتاب **اصول** اقلیدس در هندسه است . در باب تسمیه‌ی کتاب هندسه‌ی اقلیدس بـاین اسامی می‌توان به کتاب هیث (**سیزده مقاله** ، جلد ۱ ، ص ۱۱٦) رجوع کرد .

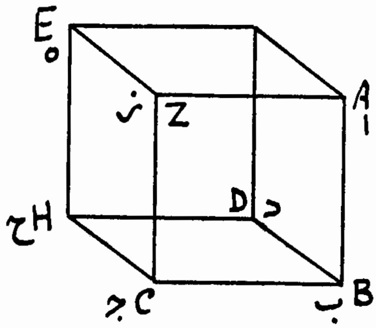
(✡✡) مقصود مستطیل ABCD است . خیام اغلب مستطیلها و مکعب مستطیلها را با دو رأس مقابل وگاهی فقط با یکی از رؤوس نام می‌برد . مثلا رجوع شود به ۵۰٦۰٤ § .

(†) خلاصه‌ی مطلب اینکه برای حل‌معادله‌ی $x^2 = a$ مستطیل ABCD را با $AB = a$ و $AC = 1$ ساخته مربع E را معادل این مستطیل می‌سازیم . ضلع مربع E مساوی x است .

عدد مفروض باشد، بطوری که هریك از اجزای اندازه‌ی آن مساوی ضلع دوم (یعنی آنکه واحد فرض کردیم) باشد .

[§۵۰۳۰۴] **صنف سوم** آنست که **عددی معادل مکعبی باشد** . پس اگر موضوع مسئله عدد باشد ✩ ، مکعب [آن عدد] معلومست ، وبرای استخراج ضلع آن [مکعب] راهی جز استقراء ✩✩ نداریم ، وچنانکه قبلاً گفتیم ، در جمیع مراتب عددی از [قبیل] مال مال و مال کعب و کعب کعب حال همین است .

و اما بطریق هندسی ، مربع AD را مربعِ واحد قرار میدهیم ، یعنی AB را



مساوی BD میگیریم و هریك را [مساوی] واحد فرض میکنیم . سپس ـ بنابرآنچه اقلیدس در [شکل دوازدهم از] مقاله‌ی یازدهم کتاب خود ثابت کرده ـ از نقطه‌ی B از سطح AD عمود BC را برین سطح اخراج میکنیم ، و آنرا مساوی عدد مفروض میگیریم ، و مکعب مستطیل ABCDEZH راتمام میکنیم . پس معلوماست که حجم † این جسم مساوی عدد مفروض است . اینك مکعبی میسازیم که [ازحیث حجم] مساوی این جسم باشد . چون ساختن این مکعب جز بخواص قطوع مخروطی انجام پذیر نیست ، آنرا

(✩) یعنی برای حل عددی معادله‌ی $x^3 = a$.

(✩✩) رجوع شود به ذیل × صفحه‌ی ۱٦٦ .

(†) خیام در مورد اندازه‌ی حجم نیزلفظ **مساحت** بکار میبرد ، ولی ما لفظ مصطلح حجم را بر گزیدیم .

موکول میکنیم بوقتی که مقدمات کار را آورده باشیم ✿ .

[۵۰۳۰۵§ تعریف ــ] و هروقت گوئیم عددی مساوی مجسّمی است ، در چنین موردی ، مقصود ما از عددْ جسمی است کـه اضلاعش موازی و زوایایش قائمه✿✿ و قاعده‌اش مربع واحد و ارتفاعش مساوی عدد مفروض باشد .

[۵۰۳۰٦ §] وصنف چهارم [مانند]آنست که **مالی معادل پنج برابر جذرش باشد** † .

پس عده‌ی جذرها همان جذرِ مال است ، وبرهان عددی آن اینست که [از یك طرف همواره] جذر چون در مثل خودش ضرب شود مال حاصل گردد ، و [از طرف دیگر ، درمسئله‌ی مورد بحث،] این [جذرِمطلوب] جذری است که چون درپنج ضرب شود مال حاصل گردد . پس این [جذرمطلوب] پنج است . وبرهان‌هندسی‌آن ــ چون مربعی معادل پنج برابرضلع آن بگیریم ــ شبیه همین [برهان عددی] است .

[۵۰۳۰۷§] صنف پنجم آنست که **اشیائی معادل کعب باشد** .

پس در مسائل عددی واضحست که [این معادله] درحکم آنست که عددی معادل مالی باشد . مثلا اگر گفته شود که چهار جذر معادل کعب است ، بنابر تناسب مذکور†† ، مانند آنست که گویند چهار عدد معادل مالی است .

اما بطریق هندسی ، مکعبی مانند ABCDE میگیریم که حجمش چهار برابر یکی از اضلاعش باشد ، و AB ضلع آن باشد . پس ضلع AB ازین مکعب ، چون در چهارضرب شود ، مکعب ABCDE حاصل میگردد ، و از طرف دیگر ، ضلع‌این مکعب

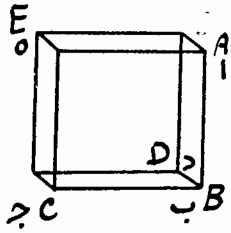
(✿) رجوع شود به ۵۰٦۰۵§ .

(✿✿) مقصود جسمی‌است بشکل‌مکعب مستطیل .

(†) درحل معادله‌ی $x^2 = bx$ ــ که درآن x^2 مال، x جذرمال ، و b عده‌ی جذرهااست ــ خیام فقط جواب $x = b$ را می‌دهد . استدلال وی اینست که اولا همواره $x . x = x^2$ ، و ثانیاً در معادله‌ی مورد بحث $b . x = x^2$ ؛ پس $x . x = x . b$ (خیام این مرحله را ذکرنمی‌کند)؛ بالنتیجه $x = b$.

(††) $x : x^2 = x^2 : x^3$

چون در مربع خود، یعنی در مربع AC، ضرب شود همان مکعب حاصل‌میشود. پس مربع AC [مساوی] چهار است.



[۵۰۳۰۸§] وصنف‌ششم آنست که **مالهائی معادل کعب باشد.**

وآن درحکم اینست که عددی معادل جذر باشد. برهان عددی‌آن اینست که، بنابر آنچه در مقاله‌ی هشتم اصول ثابت شده، نسبت عدد به جذر مثل نسبت مال است به کعب.

واما بطریق هندسی، مکعب ABCDE را معادل عده‌ای از مالهای (✿) آن، مثلا معادل دومال، ومربع ضلع‌آن را AC میگیریم. پس سطح AC چون در دو ضرب شود مکعب ABCDE حاصل گردد، و ازطرف دیگر، همین سطح چون در BD که ضلع مکعب‌است ضرب شود مکعب ABCDE حاصل میشود. پس BD که ضلع مکعب است مساوی دو است، ومطلوب همین بود (✿✿).

[۵۰۳۰۸۰۱§ تعریف‌ـ] و هرجا دراین رساله لفظ مالهای مکعب‌آوریم مقصود مربعهای اضلاع مکعب است.

[۵۰۴ § معادلات سه جمله‌ای درجه‌ی دوم]

[۵۰۴۰۱ §ـ] اینك که مفردات را آوردیم به سه صنف اول از اصناف

(✿) «مال» یك مکعب یعنی مربع ضلع آن، یا وسعت یکی از وجوهش. رجوع شود به ۵۰۳۰۸۰۱ §.

(✿✿) اگر S سطح مربع AC و V حجم مکعب مورد بحث باشد، بموجب فرض مسئله $V=2S$ وبموجب‌دستورحجم‌مکعب $V = S \cdot BD$. پس $S \cdot BD = 2S$، ولهذا $BD(=x)=2$.

دوازده گانه ☆ میپردازیم .

[٥٠٤٠٢ § –] وصنف اول ازآنها[مانند]آنست که **مالی و ده جذرمعادل سی و نه عدد باشد**☆☆ .

پس [برای حل آن] نصف[عده‌ی] جذرهارا در مثل آن ضرب کن ، وحاصل را برعدد بیفزا ، و ازجذر حاصل جمع نصف عده‌ی جذرها را کم کن . باقیمانده همان جذر مال است † .

اگرمسئله عددی باشد[برای امکان آن] این دو شرط باید برقرار باشد††: یکی ازآنها اینکه عده‌ی جذرها عدد زوجی باشد تا نصف داشته باشد ، و دوم اینکه مجموع مربع نصف [عده‌ی] جذر ها با عدد مربع [کامل] باشد ، و الّا مسئله از جنبه‌ی عددی غیر ممکن است .

اما ازجنبه‌ی هندسی هیچیك ازمسائل این صنف ممتنع نیست .

وچون برهان هندسی[حل] این‌صنف صورت پذیرد برهان‌آن ازجنبه‌ی عددی

(☆) ٥٠٢٠٣٠١ §

(☆☆) همان معادله‌ی خـوارزمی است (٣٠٦٠٧ §) . طریق‌حل‌خیام در موزد معادله‌ی $x^2 + bx = a$ اینست . فرض کنیم $AB = AD = x$, $DE = b$, $EZ = ZD = b/2$. سطح EB مساوی $x^2 + bx$ است که بموجب‌معادله مساوی a است. اما بموجب شکل ششم مقاله‌ی دوم‌اصول ، $\overline{ZA}^2 = \overline{DZ}^2 + AD . EA$. پس بترتیب

$$a + (b/2)^2 = \overline{ZA}^2 = (ZD + DA)^2 = (b/2 + x)^2,$$

$$\sqrt{a + (b/2)^2} = (b/2) + x,$$

$$x = \sqrt{(a + b/2)^2} - (b/2).$$

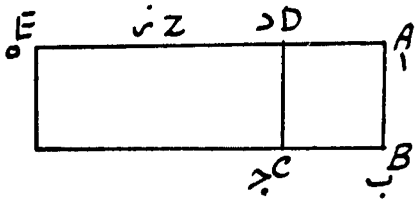
(†) صورت معادله $x^2 + bx = a$ وجوابی که خیام می‌دهد اینست :

$$x = \sqrt{a + (b/2)^2} - (b/2)$$

(††) رجوع‌شود به ٤٠٢٠١ § و٤٠٣٠٤٠٣ § . چنانکه وپکه تذکرمی‌دهد(**جبرعمرخیام،** ذیل صفحه‌ی ١٨) هیچیك از این دوشرط برای صحیح بودن x لازم نیست ، چه اگر σ عددی اصم ومثبت و α عـددی صحیح و مثبت و کمتر از σ باشد ، بازاء $a = \sigma\alpha$ و $b = \sigma - \alpha$ معادله‌ی $x^2 + (\sigma - \alpha)x = \alpha\sigma$ حاصل می‌شود که دارای جواب مثبت وصحیح α است ، وحال آنکه بالبداهه $\sigma - \alpha$ زوج نیست ، و مبیّن مجذورکامل نیست (زیرا جذرش اصم است) .

آسان خواهد بود ، و برهان هندسی آن چنین است .

فرض میکنیم مربع AC با ده جذر آن معادل سی و نه عـدد باشد ، و سطح CE [مساوی] ده جذر آن باشد . پس خط DE ده خواهد بود . و این خط را در Z نصف میکنیم . حال چون خط DE در Z نصف شده و AD در امتدادآن بر آن افزوده شده ،



[بنابر شکل ششم مقاله‌ی دوم اصول ،] حاصل ضرب EA در AD ، که مساوی سطح EB است ، بعلاوه‌ی مربع DZ مساوی مربع ZA است . اما مربع DZ که مساوی نصف [عده‌ی] جذرها است معلومست ، وسطح BE که عدد مفروض است معلوم میباشد . پس مربع AZ معلوم و [بالنتیجه] خط AZ معلوم است ، و چون ZD از آن کاسته شود ، باقیمانده ، که AD باشد ، معلوم خواهد بود .

[**۵۰۴۰۲۰۱§ طریق دیگر**ـ] واین صنف را برهان دیگری است (✿) . ABCD را مربع فرض میکنیم ، و BA را تا E امتداد میدهیم ، و EA را مساوی ربع [عده‌ی] جذرها میگیریم ، وآن دو و نیم است . و DA را تا Z امتداد میدهیم ، وZA را مساوی ربع عده‌ی جذرها میگیریم ، وهمچنین ، ازجمیع زوایای مربع خطوطی بهمین وصف

(✿) این طریقه درحل معادله‌ی $x^2 + bx = a$ اساساً همان طریقه‌ی خوارزمی (۳۰۶۰۷§) و مبتنی بر « مجذورکامل کردن $x^2 + bx$ » است . اگر فرض کنیم $AB = BC = x$ و $EA = ZA = b/4$ ، خواهیم داشت $EZ = (b/4)^2$ و $4\,EZ = (b/2)^2$ و $ZB = (b/4)x$ و $4\,ZB = bx$. چون بفرض $x^2 + bx = a$ ، نتیجه می‌شود ،

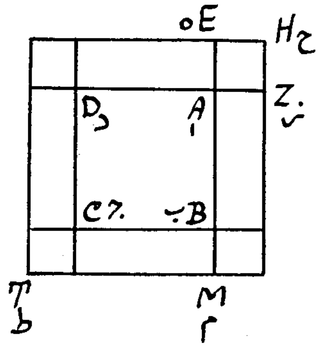
$$HT = AB^2 + 4\,EZ + 4\,ZB = x^2 + bx + (b/2)^2 = a + (b/2)^2$$

پس $EM = \sqrt{a + (b/2)^2}$ ، و

$$x = EM - 2\,EA = \sqrt{a + (b/2)^2} - (b/2).$$

فهوالمطلوب . باید دانست که در شکل ، سطح مربع وسط باضافه‌ی چهار مستطیل اطـراف مساوی $x^2 + bx$ است ، که با افزودن چهار مربع کوچك « مجذورکامل » می‌شود .

اخراج میکنیم ، وسطح HT را تمام میکنیم . این سطح مربع است ، زیرا بنابرآنچه در[اشکال بیست وسوم و بیست و چهارم] مقاله‌ی ششم اصول ثابت شده ، ZE مربع است و AC مربع‌است‌و CT مربع است . وچون هریك ازمربعات چهار گانه ، که در گوشه‌ـ

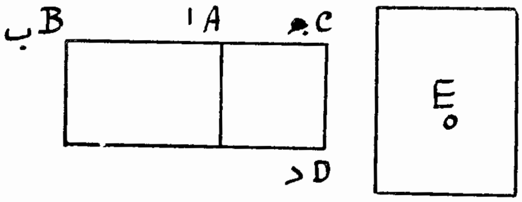


های مربع بزرگ جا دارد ، مربع دو و نیم است ، مجموع آنها بیست و پنج میباشد ، که مربع نصف [عده‌ی] جذرها است . اما سطح ZB [مساوی] دو جذر مربع AC و نصف جذر آنست ، زیرا ZA دو و نیم است . پس سطوح چهار گانه [، یعنی چهار مستطیل ZB و غیره ، مساوی] ده جذر مربع AC است . اما مربـع AC با ده جذرش [مساوی] سی و نه عدد فرض شده بود . پس مربع HT شصت و چهار است ، و چون جذر آنرا بگیریم و ازحاصل پنج بکاهیم AB میماند .

[۵۰۴۰۲۰۲ § تبصره ـ] و اما اگر خط AB مساوی ده فرض شود ، و مربعی بخواهیم که حاصل‌جمع آن بعلاوه‌ی حاصل ضرب ضلعش درAB مساوی عدد مفروضی باشد ، بطریقی که [در **§ ۵۰۳۰۳**] گذشت ، عدد مفروض را مساوی سطح E قرار میدهیم ، و آن متوازی‌الاضلاعی است که زوایایش قائمه‌اند . و بنا بر آنچه اقلیدس در مقاله‌ی ششم اصول‌ثابت کرده است ☆ ، برخط AB متوازی‌الاضلاعی مساوی سطح E اضافه میکنیم که مازاد آن برسطح مضاف بر تمام خط AB مربع باشد . فرض کنیم

(☆) ۳۰۲۰۳۰۱ § . **خوانندگان توجه فرمایند که متاسفانه در متن جبر خیام درکتاب حاضر در درج شکل مربوط باین مسئله اشتباهی روی داده ، بدین‌معنی که شکل‌پایین‌صفحه‌ی ۱۶ متعلق به اول صفحه‌ی ۱۸ است و بالعکس.**

BD این سطح باشد. بنابرآنچه در [شکل شصتم] معطیات آمده است، مربع زاید AD و ضلع آن AC معلوم است [فهوالمطلوب].



[§۵۰۴۰۳] **وصنف دوم** از آنها آنست که **مالی وعددی معادل جذری باشد.** درین صنف باید عدد بزرگتراز مربع نصف [عده‌ی] جذرها نباشد، والا مسئله غیرممکن است. و اگرعدد مساوی مربع نصف [عده‌ی] جذرها باشد، نصف [عده‌ی] جذرها همان جذر مال است. و اگر عدد کمتر از مربع نصف [عده‌ی] جذرها باشد، عدد را از مربع نصف [عده‌ی] جذرها کم میکنیم، وجذر باقیمانده را میگیریم، و حاصل را به نصف [عده‌ی] جذرها میافزائیم یا از آن کم میکنیم. حاصل جمع و باقیمانده‌ی تفریق جذرمال است ☆.

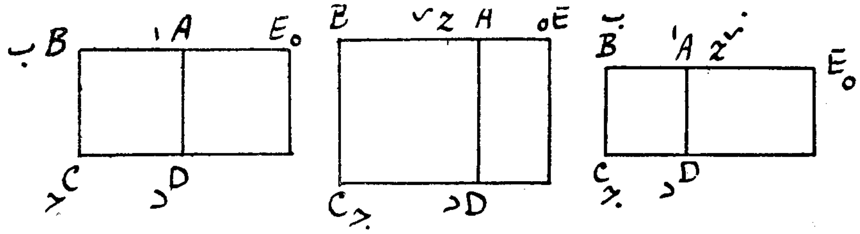
وبرهان عددی آن ازتصوربرهان هندسی آن صورت گیرد [، وبرهان هندسی آن اینست☆☆ :] مربع ABCD را میکشیم، و مستطیل ED را، مساوی عدد، پهلوی AD قرار میدهیم. پس مستطیل EC مثلا معادل ده [برابر] ضلع مربع AC † است. بالنتیجه EB مساوی ده خواهد بود. فرض کنیم در [شکل] اول AB نصف EB، و در

(☆) معادله‌ی مورد بحث بصورت $x^۲ + a = bx$ است. خیام می‌گوید بازاء $a > (b/۲)^۲$ مسئله ممتنع است. بازاء $a = (b/۲)^۲$ جواب $x = b/۲$ و بازاء $a < (b/۲)^۲$ دو جواب $x = b/۲ \pm \sqrt{(b/۲)^۲ - a}$ را می‌دهد.

(☆☆) $AB = AD = x$ و $ED = a$. پس $CE = x^۲ + a = bx$، و چون $CE = BE . BC = BE . x$، $BE = b$. حال اگر $AB = AE$، خواهیم داشت $x = AB = b/۲$. در دو حالت دیگر فرض کنیم Z وسط BE باشد. بموجب شکل ششم مقاله‌ی دوم اصول، $BZ^۲ = EA . AB + AZ^۲$. پس $AZ^۲ = BZ^۲ - EA . AB = (b/۲)^۲ - a$ و $AZ = \sqrt{(b/۲)^۲ - a}$. چون AZ را از BZ (یعنی $b/۲$) کم کنیم یا بر آن بیفزائیم جوابهای معادله بدست می‌آید. خوارزمی فقط در مورد یکی از جوابها حکم را ثابت می کند (§۳۰۶۰۷).

(†) خیام بازاء $b = ۱۰$ استدلال می کند. با مثال خوارزمی مقایسه کنید (§۳۰۶۰۷).

دومی بزرگتر از نصف آن ، و درسومی کمتر از نصف آن باشد . پس در اولی **AB** مساوی پنج است ، و در دومی ، ونیز در سومی ، EB رادرZ نصف می کنیم . چون **EB** در Z نصف و در **A** بدو قسمت غیر مساوی تقسیم شده ، بنا برآنچه در [شکل ششم] مقالهٔ دوم اصول ثابت شده است ، حاصل ضرب **EA** در **AB** بعلاوهٔ مربع **ZA** مساوی مربع **ZB** است . اما حاصل ضرب **EA** در **AB** همان عدد است ، وآن معلوم میباشد . و چون [این حاصل ضرب] از مربع ZB که خودش مساوی نصف [عدهٔ] جذرهاست



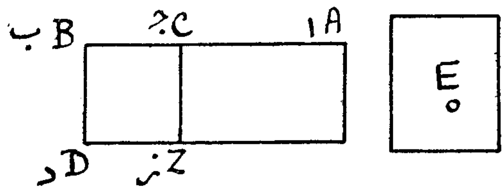
کاسته شود ، مربع ZA که باقی می ماند معلوم خواهد بود ، و اگر **ZA** را در شکل سوم از **ZB** کم کنیم و در دومی برآن بیفزائیم ، باقیمانده یا حاصل جمع مساوی **AB** خواهد بود ، و منظور همین بود . و اگر کسی بخواهد میتواند [حل] مسئله را به راههای دیگر ثابت کند ، ولی ما از ترس اینکه سخن دراز شود به همین طریق اقتصار میکنیم .

[**۵۰۴۰۳۰۱ § تبصره** ـ] اما اگر خط **AB** مثلا ده فرض شود ، و بخواهیم خطی از آن جدا کنیم که حاصل ضرب **AB** در این خط مساوی باشد با مربع این خط بعلاوهٔ سطح دیگری که بزرگتر از مربع نصف **AB** نباشد (☆) ـ یعنی [بعلاوهٔ] عدد مفروض که [با] مستطیل E [نمایش داده شده] است . پس میخواهیم از **AB** خطی جدا کنیم که مربع آن با سطح E مساوی حاصل ضرب **AB** در این خط باشد . پس برخط **AB** ، که معلوم است ، مستطیلی مساوی سطح **E** ، که معلوم است ، اضافه میکنیم (†) که نقصان آن نسبت به سطح مضاف بر تمام خط [AB] مربع باشد ،

(☆) مقصود اینست که بفرض $AB = b$ ($= 10$) و $E = a$ و $(b/2)^2 \geqslant a$ ، میخواهیم BC را چنان تعیین کنیم که $AB \,.\, BC = \overline{BC}^2 + a$.

(†) رجوع شود به ۳۰۲۰۳۰۱ § ، **و نیز به ذیل صفحهٔ ۱۷۷ .**

و چون سطح E بزرگتر از مربع نصف AB نیست ، این امر ، بنا بر آنچه اقلیدس در مقاله‌ی ششم اصول ثابت کرده ✡ ممکن است . فرض کنیم سطح مذکور AZ باشد ، و مربع ناقص CD باشد دراین صورت ، بنا برآنچه در [شکل پنجاه ونهم] معطیات ثابت شده ، ضلع CB معلوم است ، و این همان است که میخواستیم ثابت کنیم .



[۵۰۴۰۳۰۲ § -] پس معلوم شد که این صنف را حالاتی است ✡✡ ، و بعضی مسائل آن ممتنع است ، وشرایط صحت آنرا در مسائل عددی از آنچه در صنف اول آوردیم توانی دانست † .

[۵۰۴۰۴ § -] **وصنف سوم** آنست کـه **عددی وجذری معادل مال باشد .**

مربع نصف [عده‌ی] جذرها را برعدد افزوده جذر حاصل جمع را گرفته برنصف عده‌ی جذرها اضافه میکنند . آنچه حاصل شود جذر مال است †† .

(✡) شکل ۲۸ . رجوع شود به ۳۰۲۰۳۰۱ § .

(✡✡) مقصود سه حالت $a > (b/2)^2$ و $a = (b/2)^2$ و $a < (b/2)^2$ است . در حالت اول بقول خیام معادله ممتنع است .

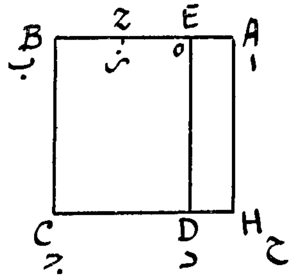
(†) مقصود از « شرایط صحت » شرایط امکان است ، و منظور خیام شرایط تحمیلی اوست برای صحیح بودن جوابها . در اینجا یکی از دو جواب ممکن است عدد صحیح باشد بدون اینکه هیچیك ازدوشرط خیام (زوج بودن b ومجذورکامل بودن $(b/2)^2 - a$)برقرار باشد . وبرای اینکه هر دو جواب هم صحیح باشند زوج بودن bلازم نیست ، ودر باب شرط دوم آنچه لازم است اینست که $(b/2)^2 - a$ بصورت $(p/2)^2$ (p صحیح است) باشد . مثال حالت اول معادله‌ی $x^2 + \sigma\alpha = (\sigma+\alpha)x$ است که درآن α صحیح و σ اصم است ؛ مثال حالت دوم معادله ی $x^2 + \alpha\beta = (\alpha+\beta)x$ است که درآن α زوج و β فرد می‌باشد .

(††) $a + bx = x^2$ ، و

$$x = (b/2) + \sqrt{a + (b/2)^2}$$

خیام درمورد معادله‌ی $x^2 = 5x + 6$ استدلال می کند . با استدلال خوارزمی درمورد معادله‌ی $x^2 = 3x + 4$ (۳۰۶۰۷ §) مقایسه کنید .

برهان آن . فرض میکنیم مربع ABCH معادل پنج جذر آن و شش عدد باشد . چون عدد را که [با] سطح AD [نمایش داده شده] است از آن کم کنیم ، سطح EC



میماند که مساوی [جملهی] عدهی جذرها (✿) است ، و آن [عده] پنج است . پس خط EB پنج است . آنرا درZ نصف میکنیم . چون خط EB در Z نصف شده ، و EA در

(✿) در بقیهی این مطلب در جبر خیام و نیز در فصل **۱۰۵** آن کتاب ، در استعمال مبهم لفظ عده (گاهی بمعنی ضریب وگاهی بمعنی جملهی معادله) ، نمونهای از درماندگی جبر لفظی (۳۰۱۰۲ § ، ص ۷۸) و جبریهائی کـه در ایـن علم در مرحلهی لفظی واماندهاند دیده میشود . خیام در نامیدن m و mx و mx^2 ، خاصه در مواردی که پای هرسه درکار است ، بسختی میافتد . گاهی m و زمانی mx را **عدهی جذرها** (یا **عدهی اضلاع**) میخواند ، و در جائی کـه قبلا از mx^2 صحبت کرده ، و سپس میخواهد بگوید که فلان چیز مساوی mx است کـه با همان ضریب و از همان مجهول ساخته شده ، می گوید « مساوی همان عده ازجذرها است که برای مالها فرض شده بود » . اینك نمونههائی از این استعمال مبهم :

(I) **ص ۱۸** ، سطرآخر: **عدةالاجذار** بمعنیضریب جملهی درجهی اولمعادله یعنیb در bx ،ولی در **لعدةاضلاعه** ، مراد از « عدة اضلاع » bx است .

(II) **ص ۱۹**

سطر دوم : **عدة الاضلاع** یعنی b (در bx) ؛

سطر هشتم : **عدةالاموال** یعنی c (در cx^2) ؛

سطر آخر : **عدةالاموال** یعنی cx^2 .

(III) **ص ۲۰**

سطور ۱ و ۲ :**عدةالاجذار** و **عدةالاضلاع** یعنی bx ؛

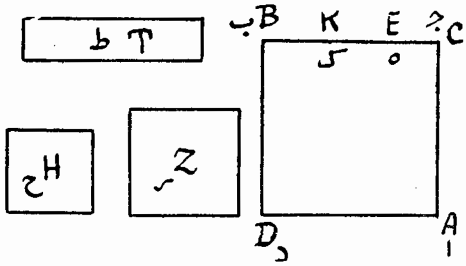
سطر ۳ : **عدةامواله** (المفروضة) یعنی cx^2 ؛

سطور ۶ـ۷ . عبارت « . . . **حا**الذی هو **عدةاجذار**ه التی فرضت للاموال » یعنی «**حا**

بقیهی در ذیل صفحهی بعد

امتداد آن بر آن افزوده شده ، [بنابر شکل ششم مقاله‌ی دوم اصول ،] حاصل ضرب BA در AE ، که مساوی سطح معلوم AD است ، بعلاوه‌ی مربع EZ ، که معلوم است ، مساوی مربع ZA است . پس مربع ZA معلوم و ZA معلوم و ZB معلوم است . پس AB معلوم است . و [حل] این صنف را براهین دیگر نیز هست ، ولی به آنکه گفته شد دل خوش دار .

[**۵۰۴۰۴۰۱** § **تبصره** ـ] و اما اگر BE که عده‌ی ✿ جذر ها است مفروض باشد و مربعی و ضلع آن مطلوب باشد چنانکه آن مربع مساوی [جمله‌ی] عده‌ی اضلاع خود بعلاوه‌ی عدد مفروضی باشد ، فرض میکنیم عدد مفروض [با] مستطیل



T [نمایش داده شده] باشد ، و مربع مساوی آن H باشد ، و مربعی میسازیم مساوی مجموع مربع H و مربع EK ــ که EK نصف عده‌ی اضلاع است ــ و فرض میکنیم

بقیه‌ی ذیل صفحه‌ی قبل

مساوی cx است ، که در آن c عده‌ی (= ضریب) مفروض مالها است ». و هکذا در سطور ۷ (از دوکلمه‌ی آخر) ــ ۸ .

مترجم در چنین موارد وظیفه‌ای بس دشوار دارد . اگر اصطلاحات امروزی را بکار برد کار خیام و دشواریها و نقائص آنرا معرفی نکرده ، و اگر به ترجمه‌ی تحت‌اللفظی اکتفا کند ، مطلب بر خواننده نا مفهوم و احیاناً موجب گمراهی خواهد بود . راهی که ما در این مورد برگزیده‌ایم همان روش عمومی است که در این ترجمه اتخاذ شده ، یعنی منحرف نشدن از کتاب خیام و جان کلام وی . منتهی ، در موردی که فعلا مورد بحث است ، هرجا « عده‌ی . . . » بمعنی‌تمام جمله‌ی معادله بکار رفته لفظ **جمله** را در داخل علامت [ ] اضافه کرده‌ایم ، و در جائی که « عده » بمعنی ضریب استعمال شده آنرا بهمان حال گذاشته‌ایم ، و بالاخره هر جا این تدابیر را برای فهمانیدن مطلب کافی ندیده‌ایم ، در ذیل صفحه توضیحات اضافی آورده‌ایم .

(✿) رجوع کنید به ذیل✿ صفحه‌ی ۱۸۱ .

Z این مربع باشد، و KC را مساوی ضلع Z جدا میکنیم ، و مربع ABCD را تمام میکنیم . مربع ABCD همان مطلوب است (✡) .

[§۵۰۴۰۵ -] پس معلوم شد که هیچیك از مسائل صنف سوم ممتنع نیست ، و در صنف اول نیز حال همین است . و اما صنف دوم بعضی مسائل ممتنع دارد ، و این صنف دارای حالات مختلف است ، ولی دو صنف دیگر چنین نیست .

[§ ۵۰۵ مقترنات سه‌تائی درجه‌ی سوم قابل تحویل بدرجه‌ی دوم (✡✡)]

[§ ۵۰۵۰۱] و اما برهان اینکه سه صنف دوم (✡✡) از این اصناف سه تائی دوازده گانه با سه صنف اول (†) متناسبند .

[§۵۰۵۰۲] صنف اول از آنها اینست که **مکعبی و مالها معادل جذر باشد** (††).

مکعب ABCDE را فرض میکنیم و AB را در امتداد آن تا Z میکشیم ، و AZ را مساوی عده‌ی مالها قرار می دهیم ، و مکعب مستطیل AZHTCD را در امتداد مکعب AE ، چنانکه معمول است ، تمام میکنیم . درین صورت ، مکعب مستطیل AT

(✡) دراینجا $BE = b$ ، $T = H = a$ ، $EK = KB = b/2$ ، و لهذا بترتیب

$$Z = H + \overline{EK}^2 = a + (b/2)^2$$
$$KC = \sqrt{a + (b/2)^2}$$
$$BC = (b/2) + \sqrt{a + (b/2)^2}$$

(†) § ۵۰۲۰۳۰۱ (✡✡) § ۵۰۲۰۳۰۲

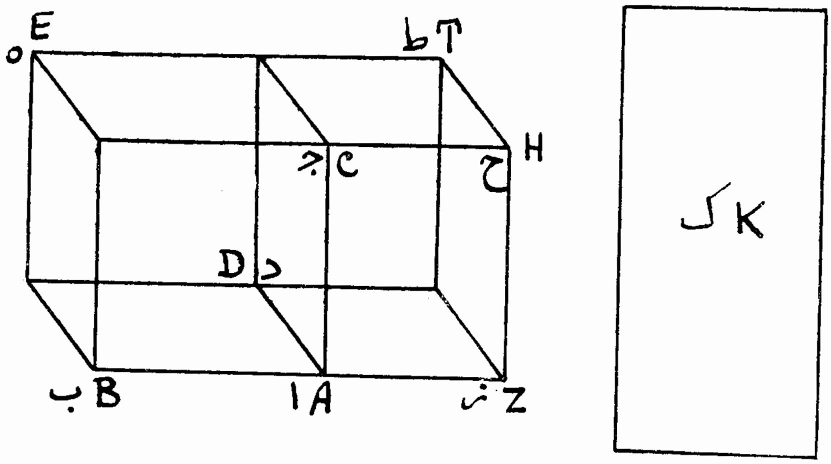
(††) استدلال خیام برای معادل بودن معادله‌ی $x^3 + cx^2 = bx$ با معادله‌ی $x^2 + cx = b$ چنین است .

فرض کنیم $ABCDE = x^3$ و $AZ = c$. چون مکعب مستطیل AT را تمام کنیم خواهیم داشت $AT = cx^2$ ؛ پس ، با توجه به معادله‌ی مفروض ،

$$BT = x^3 + cx^2 = bx.$$

اینك اگر مستطیل K را با سطح b رسم کنیم ، از طرفی $K . AD = bx$ و از طرف دیگر $HB . AD (= BT) = x^3 + cx^2 = bx$. پس مکعب مستطیل BT با مکعب مستطیلی که قاعده‌اش K و ارتفاعش AD باشد معادل است ، و لهذا ، قواعد دوجسم به نسبت عکس ارتفاعات آنهاست ، وچون ارتفاعات آنها AD است، قواعدشان متساوی است ، یعنی $K = HB$. اما $K = b$ و $HB = CB + AH = x^2 + cx$ ؛ پس $b = x^2 + cx$. البته این استدلال خالی از حشو و زواید نیست .

مساوی [جمله‌ی] عده‌ی ✡ اموال خواهد بود ، و لهذا مکعب مستطیل BT ، که مجموع مکعب [AE] و [جمله‌ی] عده‌ی مفروض اموال است ، مساوی [جمله‌ی] عده‌ی مفروض جذرها میباشد . حال مستطیل K را مساوی عده‌ی مفروض جذرها



میسازیم ـ و [مقصود از] جذر همان ضلع مکعب است ، وآن AD است . پس حاصل ضرب سطح K در AD مساوی [جمله‌ی] عده‌ی مفروض اضلاع است ، و [از طرف دیگر] از ضرب سطح HB در AD مجموع مکعب با [جمله‌ی] عده‌ی مفروض اموال آن حاصل میشود . ولی این دو جسم ـ یعنی مکعب مستطیل BT و مکعب مستطیلی که بر [قاعده‌ی] K ساخته شده و ارتفاعش AD است ـ متساویند . پس قاعده های آنها با ارتفاعاتشان متکافی‌اند ✡✡ ، و چون ارتفاعات آنها متساویند قواعدشان نیز متساوی می باشند . اما قاعده‌ی HB عبارتست از مجموع مربع CB و [مستطیل] AH که مساوی همان عده از جذرها [ی CB] است که برای مالها فرض شده بود † . پس K ، که عده‌ی مفروض جذر ها است ، مساوی است با مال و

(✡) رجوع شود به ذیل صفحه‌ی ۱۸۱.

(✡✡) رجوع شود به ۱۰۵۰٤ § ، (ص ۱۵٦) .

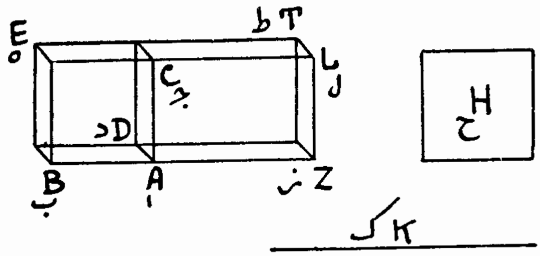
(†) اگرعده‌ی مالها (یعنی‌ضریب درجه‌ی دوم) در معادله‌ی مفروض c باشد ، مستطیل AH مساوی c برابر جذر (یعنی x) است . رجوع شود به ذیل صفحه‌ی ۱۸۱ .

همان عده از جذرها که برای مالها فرض شده بود ، و این همان است که میخواستیم ثابت کنیم .

مثال آن اینکه معادله‌ی مکعب وسه مال با ده جذر در حکم معادله‌ی مال و سه جذر با ده عدد است .

[۵۰۵۰۳§-] و **صنف دوم** از آنها [مانند اینست که] **مکعبی با دوجذر معادل سه مال باشد .**

و آن در حکم اینست که مالی بعلاوه‌ی دو معادل سه جذرش باشد . و برهانش اینست ✩ . مکعب ABCDE را که با دو جذرش معادل سه مال است می گیریم ، و شکل H را مربع و مساوی CB وخط K راسه قرار می دهیم ، پس حاصل ضرب H در K سه مالِ مکعب AE است . و بر AC مستطیلی [مانند AL] مساوی دو می سازیم ، و مکعب مستطیل AZCTD را تمام میکنیم . پس این مکعب مستطیل مساوی [جمله‌ی] عده‌ی جذر ها است . ولی [، از یك طرف ،] خط ZB چون در مربع AC ضرب شود مکعب مستطیل BT حاصل گردد . و [از طرف دیگر] مکعب



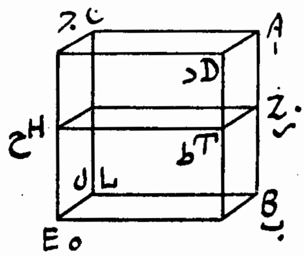
مستطیل AT مساوی [جمله‌ی] عده‌ی اضلاع است ، و بالنتیجه مکعب مستطیل

(✩) معادله‌ی مفروض : $x^3 + bx = cx^2$ ($b = 2 , c = 3$) .
فرض کنیم $ABCDE = x^3$ و $H = CB = x^2$ و $K = c$ ؛ پس $H . K = cx^2$.
اگر $AL = b$ خواهیم داشت $AZCTD = bx$ ، یا $AT = b x$. اما ، از طرفی $BT = ZB . AC^2 = ZB \cdot x^2$ ، و ازطرف دیگر $BT = AE + AT = x^3 + bx = c x^2$ ؛ پس $ZB = c$. ولی $BL = x^2 + b$ ، وچون ازطرف دیگر $BL = ZB \cdot x = c x$ ، خواهیم داشت $x^2 + b = cx$ ؛ فهوالمطلوب .

BT مساوی است با مجموع مکعب [AE] و مقداری مساوی [جمله‌ی] عده‌ی اضلاع آن ؛ پس مکعب مستطیل BT مساوی [جمله‌ی] عده‌ی مالها است . بنابراین ، بقیاس آنچه در شکل قبل ثابت شد ، خط ZB مساوی سه است . اما مستطیل BL مساوی مال و دو می‌باشد ؛ پس مال و دو معادل سه جذراست ، زیرا سطح BL ازضرب AB در سه حاصل می‌شود . و این همان است که می خواستیم ثابت کنیم .

[§۵۰۵۰۴] و **صنف سوم** از آنها [مانند] اینست که **مکعبی معادل مال و سه جذر باشد .**

دراین صورت ، مال معادل جذر وسه عدد خواهد بود .[برای اثبات ✿] مکعب مکعب ABCDE را میگیریم که معادل مال آن و سه ضلع آنست ، و ازخط AB ، که ضلع آنست ، خط AZ را مساوی عده‌ی مالها ، که واحد است ، جدا میکنیم ، ومکعب مستطیل AZTHC را تمام میکنیم . پس مکعب مستطیل AZTHC مساوی [جمله‌ی] عده‌ی مفروض مالها است ، و باقی میماند مکعب مستطیل ZE که مساوی [جمله‌ی]



عده‌ی مفروض اضلاع است . و چون ارتفاعات این دو مکعب مستطیل متساویند ، بنا بر آنچه در [شکل سی و دوم] مقاله‌ی یازدهم اصول ثابت شده ، نسبت آنها مثل

$(c = ۱ , b = ۳)\ x^۳ = cx^۲ + bx$ (✿)

فرض کنیم $ABCDE = x^۳ = cx^۲ + bx$ و $AZ = c$ ؛ پس $AH = cx^۲$ و $ZE = x^۳ - cx^۲ = bx$. چون دو جسم AH و ZE دارای یك ارتفاع (ZT) هستند ، $AH : ZE = ZC : ZL$. اما $ZC = cx$. بالنتیجه $cx^۲ : bx = cx : ZL$ ، و از آنجا $ZL = b$ پس بالاخره $CB = ZC + ZL = cx + b$ ، یا $x^۲ = cx + b$ ؛ فهو المطلوب .

نسبت قاعده‌ی ZC است به قاعده‌ی ZL . اما سطح ZC مساوی یك جذر مربع CB است ، و [بالنتیجه ،] سطح ZL عده‌ی جذرها است ، و آن سه است . پس مربع CB مساوی یك جذر و سه عدد است ، واین همانست که می خواستیم ثابت کنیم .

[۵۰۵۰۵§ **تبصره** -] و تا این براهین ازاین طریق [هندسی که ذکر شد] فهمیده نشود فن جبر جنبه‌ی علمی نخواهد داشت (☆) ، اگر چه فهم آنها از این طریق مستلزم تحمل دشواریهائی است .

[۵۰٦§ مقدمات حل معادلات درجه‌ی سوم]

[۵۰٦۰۱§] چون از ذکر این اصناف که برهان [حل] آنها بخواص دایره-یعنی به کتاب [اصول] اقلیدس - ممکن‌است فارغ شدیم ، اینك می‌پردازیم به اصنافی که برهان آنهاجز به خواص قطوع ممکن نیست ، وآن چهارده صنف است : یکی‌از آنها مفرد است ، وآن معادله‌ی عددی با مکعبی است ، و شش معادله‌ی سه‌تائی که مانده است ، و هفت معادله‌ی چهارتائی .

و پیش ازبحث ازین اصناف ، مقدماتی‌مبتنی بر کتاب‌مخروطات می‌آوریم (☆☆) تا متعلم را تمهید گونه‌ای باشد ، و درین رساله ما را به بیش از سه کتاب سابق‌الذکر - یعنی دو کتاب **اصول** و **معطیات** اقلیدس و دومقاله از کتاب **مخروطات** - حاجت نیفتد .

[۵۰٦۰۲§ **مسئله** -] می‌خواهیم دوخط بین دوخط[مفروض] بیابیم که هرچهار متوالیاً بریك نسبت باشند (†) .

(☆) خیام بار دیگر اهمیت براهین هندسی را تأکید می کند .

(☆☆) فقط اولین مقدمه (۵۰٦۰۲§) مبتنی برمخروطات است .

(†) رجوع شود به ۳۰۷۰۱§ . مقصود مسئله تعیین دوطول $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ است چنانکه

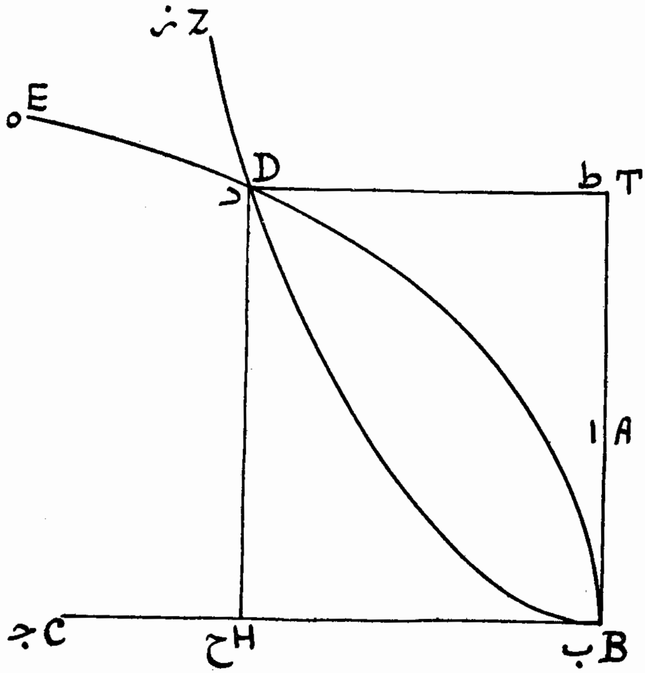
$$AB : x = x : y = y : BC .$$

خیام برای حل مسئله دو سهمی به رأس B می‌سازد که محور وضلع قائم اولی BC ، ومحور و ضلع قائم دومی AB است . اگر D محل تلاقی دو قطع باشد ، بموجب خاصیت سهمی ، $\overline{HD}^2 (= \overline{BT}^2) = BH \cdot BC$ و $\overline{DT}^2 (= \overline{BH}^2) = BA \cdot BT$. پس

$$BC : BT = BT : HB , \qquad BT : HB = HB : BA ,$$

وبالنتیجه $AB : HB = HB : BT = BT : BC$. فهوالمطلوب .

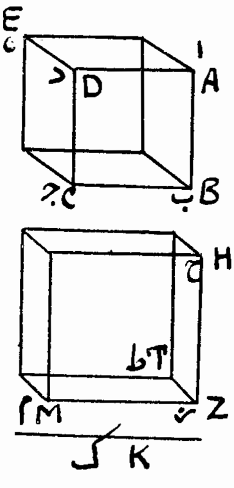
فرض کنیم AB وBC آن دوخط مستقیم [مفروض] باشند . این دوخط را چنان قرار می‌دهیم که اضلاع زاویه‌ی قائمه‌ی B باشند ، و قطع مکافیی به رأس B وسهم EC



و ضلع قائم BC می سازیم ، و آن قطع BDE است . پس قطع BDE از حیث و ضع معلوم است ، زیرا رأس وسهم آن از حیث وضع و ضلع قائم آن از حیث مقدار معلوم است . این قطع برخط BA مماس است ، زیرا زاویه‌ی B قائمه است ، وآن ، چنانکه در شکل سی و سوم مقاله‌ی اول مخروطات ثابت شده ، مساوی زاویه‌ی ترتیبِ قطع است . همچنین چنانکه آپولّونیوس در شکل پنجاه و ششم از مقاله ی اول ثابت کرده ، قطع مکافی دیگری به رأس B وسهم AB وضلع قائم AB میسازیم ، وآن قطع BDZ است . قطع BDZ برخط BC مماس است ، و بالنتیجه ، دو قطع یکدیگر را ناچار قطع می کنند . فرض کنیم D نقطه‌ی تقاطع آنها باشد . پس وضع نقطه‌ی D

معلوم است ، زیرا وضع هر دو قطع مکافی معلوم است . پس اگر ازین نقطه دو عمود DH و DT را [بترتیب] بر BC و AB بکشیم ، چنانکه در **معطیات** ثابت شده ☆ ، مقادیر این دو عمود معلوم خواهد بود . اینك گوئیم چهار خط AB و BH و BT و BC متوالیاً بریك نسبت اند . برهان آن اینست که چون خط DH از خطوط ترتیب قطع BDE است ، مربع HD مساوی حاصل ضرب BH در BC است . پس نسبت BC به HD (که مساوی خط BT است) مثل نسبت BT به HB است . و [همچنین چون] خط DT در قطع BDZ از خطوط ترتیب است ، مربع DT (که مساوی BH است) مساوی حاصل ضرب BA در BT است ؛ بالنتیجه ، نسبت BT به BH مثل نسبت BH به BA می باشد . پس خطوط چهارگانه [یعنی AB و BH و BT و BC] متوالیاً متناسبند . اما مقدار DH معلوم است ، زیرا این خط از نقطه‌ی معلومی بزاویه‌ی معلومی برخط معلومی کشیده شده ، و نیز مقدار DT معلوم است ؛ پس مقادیر دو خط BH و BT معلوم است ، و این دو خط وسطهای نسبت بین دو خط AB و BC هستند ، یعنی نسبت AB به BH مثل نسبت BH به BT ومثل نسبت BT به BC است ، واین همانست که می خواستیم ثابت کنیم .

[**§۵۰۶۰۳ مسئله**ــ] مربع ABCD مفروض و قاعده‌ی جسم متوازی السطوح و



(☆) **معطیات** ، اشکال ۳۵ و ۲۵ و ۲۶ .

قائم‌الزوایای ABCDE است ، ومربع MH [نیز] مفروض است ، ومی‌خواهیم به قاعده‌ی MH جسم متوازی السطوح قائم‌الزوایائی مساوی جسم مفروض ABCDE بسازیم .

نسبت AB به MZ را مساوی نسبت MZ به K می‌سازیم ، و سپس نسبت AB به K را مثل نسبت ZT به ED می‌سازیم ☆ ، و ZT را درنقطه‌ی Z عمود برسطح MH قرار می‌دهیم ، و مکعب مستطیل MZTH را تمام می‌کنیم .

حال گویم که این مکعب مستطیل مساوی مکعب مستطیل مفروض است . دلیل آن اینست که نسبت مربع AC به مربع MH مثل نسبت AB به K است . پس نسبت مربع AC به مربع MH مثل‌نسبت ZT است ، که ارتفاع مکعب مستطیل MTH است ، به ED ، که ارتفاع مکعب مستطیل BE است . پس ، بموجب آنچه در [شکل سی و چهارم] مقاله‌ی یازدهم اصول ثابت شده ، دو مکعب مستطیل [ازحیث حجم] متساویند ، زیرا قاعده های آنها با ارتفاعاتشان متکافی‌اند .

[۵۰۶۰۳۰۱ § **تعریف** ☆☆ــ] وهرگاه لفظ **مُجَسَّم** گوئیم مراد ماجسمی است متوازی السطوح وقائم‌الزوایا ، ونیزهرگاه سطح گوئیم مقصود سطحی‌متوازی الاضلاع وقائم‌الزوایا است .

[۵۰۶۰۴ § **مسئله** ــ] مکعب مستطیلABCD مفروض‌است ، وقاعده‌ی آن AC مربع است ، و میخواهیم مکعب مستطیلی بسازیم که قاعده‌اش مربع وارتفاعش مساوی طول مفروض ET باشد ، و [ازحیث حجم] مساوی مکعب مستطیل ACD باشد † .

(☆) مقصود اینست که طولهای K و MZ را چنان تعیین می کنیم که

$$AB : MZ = MZ : K , \qquad AB : K = ZT : ED .$$

ازین دو نتیجه می شود $\overline{AB}^2 . ED = \overline{MZ}^2 \cdot ZT$ ، و هوالمطلوب .

(☆☆) رجوع شود به ۴۰۵۰۱ § (ص ۱۵۶) .

(†) K و EZ را بوسیله‌ی تناسبات

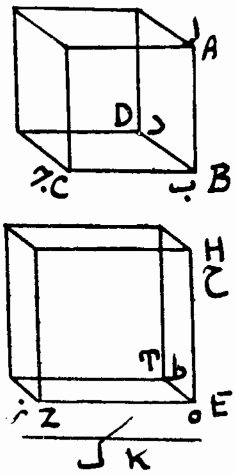
$$ET : BD = AB : K , \qquad AB : EZ = EZ : K$$

تعیین می کنیم . خواهیم داشت

$$\overline{AB}^2 : \overline{EZ}^2 = (AB : EZ) (EZ : K) = AB : K = ET : BD.$$

پس $\overline{AB}^2 \cdot BD = \overline{EZ}^2 \cdot ET$ و هوالمطلوب .

پس نسبت ET را به BD مثل نسبت AB به K می‌سازیم ، و بین AB و K واسطه‌ی هندسی می گیریم ، و آن EZ است ، و EZ را عمود بر ET قرار می‌دهیم ، و TZ را تمام می کنیم ، و EH را عمود بر سطح TZ و مساوی EZ قرار می‌دهیم ، و مکعب مستطیل



HETZ را تمام میکنیم . حال گوییم مکعب مستطیل T ، که قاعده‌اش مربع HZ و ارتفاعش خط مفروض ET است ، [ازحیث حجم] مثل مکعب مستطیل مفروض D است . برهانش اینست که نسبت مربع AC به مربع HZ مثل نسبت AB به K است . پس نسبت مربع AC به مربع HZ مثل نسبت ET است به BD . بالنتیجه دو جسم متساوی‌اند ، زیرا قواعدشان با ارتفاعاتشان متکافی است ، واین همان است که می‌خواستیم ثابت کنیم .

[**۵۰۶۰۵ § حل معادله‌ی مفرد درجه‌ی سوم**ـ] و بعد از ذکر این مطالب به صنف سوم ازه‌فردات می‌پردازیم ، و آن اینست که **کعبی معادل عددی باشد** ✡ .

(✡) $x^3 = a$. مکعب مستطیل ABCD را با شرایط $AB = BC = 1$ و $BD = a$ می‌سازیم ، و طولهای E و Z را چنان تعیین می کنیم که

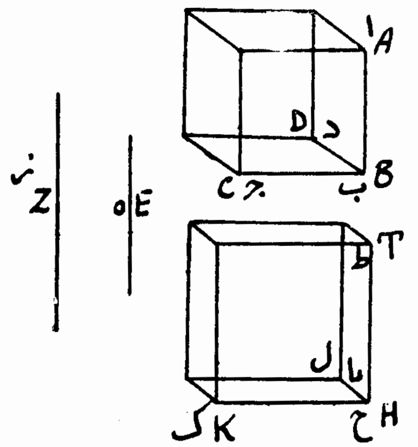
$$AB : E = E : Z = Z : BD \qquad (1)$$

ومکعب KHTL را با ضلع E می سازیم ($KH = HT = HL = E$) . بموجب (۱) :

$$AC : TK = (AB : HK)(AB : HK) = (AB : E)(E : Z) = AB : Z = E : BD = HK : AD$$

پس $AC . BD = TK . HK$ ، یا $a = \overline{HK}^3$. پس $x = HK$ ، وهوالمطلوب .

عدد را، چنانکه [در ۵۰۳۰۵§] گفتیم، بامکعب مستطیل ABCD نمایش‌می‌دهیم که قاعده‌اش AC است ، وآن مربع واحداست ، و ارتفاعش مساوی عدد مفروض‌است . حال می‌خواهیم مکعبی مساوی این مکعب مستطیل بسازیم . برای این منظور بین دو خط AB وBD دو خط که واسطه در نسبت باشند می گیریم ☆ . پس این دو خط بنابرآنچه [در۵۰٦۰۲ §] ثابت کردیم ، از حیث مقدار معلومند ، و این دو خط E و Z است . وHT را مساوی خط E قرار می‌دهیم ، و برآن مکعب THKL را می‌سازیم .



پس این مکعب ازحیث مقدار معلوم است ، و ضلعش از حیث مقدار معلوم می‌باشد . اینك گوئیم که این مکعب مساوی مکعب مستطیل D است .

برهان‌آن . نسبت مربع AC به مربع TK مثل نسبت AB به HK است که دو بار تکرارشود † ؛ ونسبت AB به HK که دوبار تکرارشود مثل نسبت AB به Z است ، که اولین و سومین ازخطوط چهارگانه است ، و بالنتیجه مثل نسبت HK است ، که

(☆) یعنی دو خط مانند E و Z بین AB و BD درج می کنیم که

$$AB : E = E : Z = Z : BD$$

(†) مقصود از **نسبت AB به HK که دوبار تکرار شود** $(AB : HK) \times (AB : HK)$ یعنی مربع $AB : HK$ است . و این تعبیر را ریاضیون اسلامی از یونانیان گرفته‌اند . رجوع شود به : هیث ، **سیزده مقاله** ، جلد ۲ ، صص ۱۳۲ - ۱۳۳ ؛ **تحریر اقلیدس** ، ص ۷۲ .

دومین خط است ، به BD که چهارمین خط است . پس قواعد مکعب L و مکعب مستطیل D با ارتفات آنها متکافی‌اند . پس دو جسم متساویند ، و این همان است که می‌خواستیم ثابت کنیم .

[۵۰۷ § مقترنات سه‌تائی درجه‌ی دوم]

[۵۰۷۰۱ §] و بعد ازین ، به شش صنف سه‌تائی که مانده است † می‌پردازیم .

[۵۰۷۰۲§-] **صنف اول** اینست که **مکعبی و اضلاع معادل عددی باشد** ☆ .

AB را ضلع مربعی مساوی عده‌ی جذرهامی گیریم ، و آن معلوم است . و مکعب مستطیلی می‌سازیم که قاعده‌اش مساوی مربع AB باشد ، و ارتفاعش مساوی BC باشد ، و [حجمش] مساوی عدد مفروض باشد ـ ساختن این مکعب مستطیل را در آنچه [در ۵۰۶۰۳§] گذشت بیان کردیم ـ و BC را عمود بـر AB قرار می‌دهیم . و معنی عدد مجسم را در این رساله [در ۵۰۳۰۵ §] آموختی ، و آن مکعب مستطیلی است کـه قاعده‌اش مربع واحد باشد ، و ارتفاعش مساوی عـدد مفروض باشد ، یعنی خطی باشد که نسبت آن به ضلـع قاعده‌ی مکعب مستطیل مساوی نسبت عدد مفروض به واحد باشد . حال خط AB را مستقیماً تا Z امتداد می‌دهیم ، و قطع مکافیی به رأس B و سهم

(†) § ۵۰۲۰۳۰۳

(☆) $x^3 + bx = a$

فرض کنیم $\overline{AB}^2 = b$, $\overline{AB}^2 \cdot BC = a$. سهمی HBD را به رأس B و محور BZ و ضلع قائم AB و نیمدایره‌ی CDB را بقطر BC می‌سازیم . فرض کنیم D نقطه‌ی تقاطع دو منحنی و E تصویر آن بر CB باشد ، گوئیم $x = BE$.

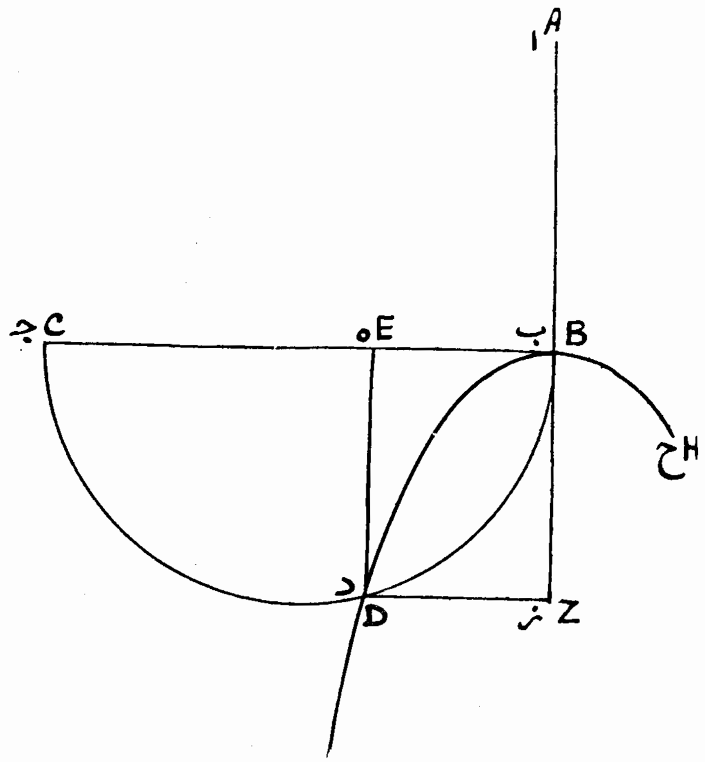
برهان . در سهمی ، $\overline{DZ}^2 = BZ \times AB$ ، و چون $DZ = BE$ و $ED = ZB$ ، خواهیم‌داشت $AB : BE = BE : ED$ (۱) . در دایره $BE : ED = ED : EC$ (۲) . از (۱) و (۲) نتیجه می شود $\overline{AB}^2 : \overline{BE}^2 = BE : EC$ ، ویا $\overline{BE}^3 = \overline{AB}^2 \cdot EC$. پس

$$\overline{BE}^3 + \overline{AB}^2 \cdot EB = \overline{AB}^2 \cdot EC + \overline{AB}^2 \cdot EB = \overline{AB}^2 \cdot BC .$$

یا $\overline{BE}^3 + b \cdot BE = a$ ، وهو المطلوب .

قطوعی که خیام در حـل ایـن معادله بکار می برد سهمی $x^2 = \sqrt{b}\, y$ و دایره ی $y^2 = x\left(\frac{a}{b} - x\right)$ است

BZ و ضلع قائم AB میکشیم ، و آن قطع BDH است . پس ، وضع قطع BDH ،



چنانکه سابقاً [در § ۵۰۶۰۲] بیان کردیم ، معلوم است . و این قطع بر خط BC مماس می‌باشد . و بر BC نیمدایره‌ای می کشیم . این نیمدایره ناچار قطع مکافی را قطع می کند . فرض کنیم آن را در D قطع کند . از D ، که چنانکه دانستی وضعش معلوم است ، دو عمود DZ و DE را [بترتیب] بر BZ و BC می کشیم . پس این دو عمود از حیث وضع و مقدار معلوم است . چون خط DZ از خطوط ترتیب قطع است ، مربع آن مساوی حاصل ضرب DZ در AB می باشد . پس نسبت AB به DZ (که مساوی BE است) مثل نسبت BE است به ED (که مساوی ZB است) . اما نسبت BE به ED مثل نسبت ED به EC می باشد . پس خطوط چهار گانه‌ی AB و BE و ED و EC متناسبند ، و بالنتیجه ، نسبت مربع AB ، که اولی

است ، به مربع BE ، که دومی است ، مثل نسبت BE است ، که دومی است ، به EC ، که چهارمی است . پس مکعب مستطیلی که قاعده‌اش مربع AB و ارتفاعش EC است ، مساوی مکعب BE است ، زیرا ارتفاعات آن دو با قاعده های آنها متکافی‌اند . حال اگر مکعب مستطیلی را که قاعده‌اش مربع AB و ارتفاعش EB است بر هر دو بیفزاییم ، مجموع مکعب BE و این مکعب مستطیل [اضافی] مساوی مکعب مستطیلی خواهد بود که قاعده‌اش مربع AB است و ارتفاعش BC ، و این مکعب مستطیل را مساوی عدد مفروض گرفته بودیم . اما مکعب مستطیلی که قاعده‌اش مربع AB است (که مساوی عده‌ی جذرها است) و ارتفاعش EB است (که ضلع مکعب است) مساوی [جمله‌ی] عده‌ی مفروض اضلاع EB است . پس مکعب EB با [جمله‌ی] عده‌ی مفروض اضلاع آن مساوی عدد مفروض است ، و هوالمطلوب .

و این صنف حالات مختلف ندارد ، و هیچیك از مسائل آن ممتنع نیست (✡) ، و بوسیله‌ی خواص دایره با خواص قطع مکافی حل شد .

[۵۰۷۰۳§-] صنف دوم از صنف های ششگانه آنست که **مکعبی وعددی معادل اضلاع باشد** (†) .

(✡)معادله‌ی $x^3+bx-a=0$ فقط یك ریشه‌ی حقیقی دارد ، وآنهم همیشه مثبت است .

$x^3 + a = bx$ (†)

فرض کنیم $b=\overline{AB}^2$ و $a = \overline{AB}^2 \cdot BC$. سهمیی به رأس B و محور AB و ضلع قائم AB وهذلولیی به رأس C که محور کانونی آن در استقامت BC و اضلاع قائم و مایل آن هریك مساوی BC باشد می‌کشیم (این هذلولی متساوی القطرین است) . اگر دو قطع نقطه‌ی مشترك نداشته باشند مسئله ممتنع است ، و الا فرض کنیم E یکی از نقاط تقاطع آنها و T و H تصاویر E بر BC و AB باشد . گوئیم $x = BT$.

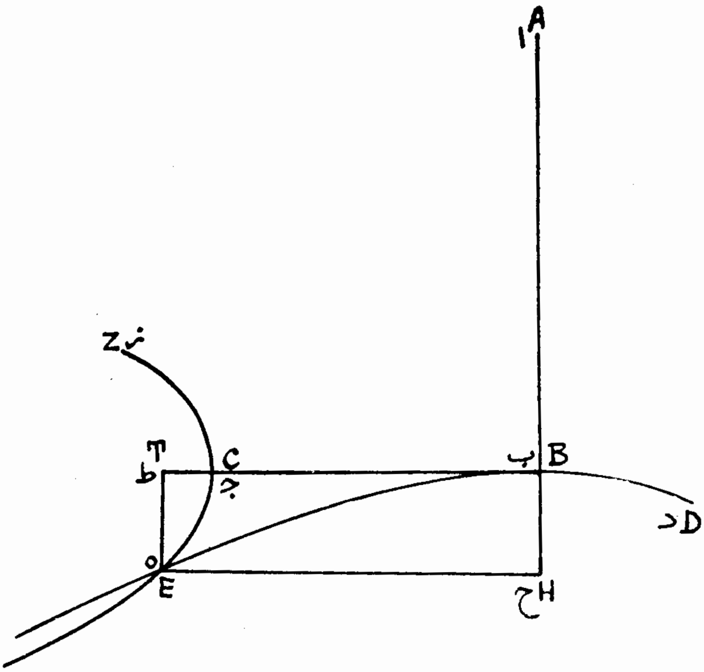
برهان . بموجب خاصیت کلی هذلولی :

$$\overline{ET}^2 : (BT \times TC) = \text{ضلع مایل : ضلع قائم}$$

پس $\overline{ET}^2 = BT \times TC$ ، وبالنتیجه $BT : ET = ET : TC$ (۱) . بموجب خاصیت سهمی $\overline{EH}^2 = BH \cdot BA$ ، و چون $EH = BT$ و $BH = ET$ ، با توجه به (۱) خواهیم داشت $AB : BT = BT : BH = BT : ET = ET : TC = BH : TC$. خلاصه آنکه

بقیه درذیل‌صفحه‌ی بعد

AB را ضلع مربعی مساوی عده‌ی جذر ها می گیریم ، و مکعب مستطیلی می‌سازیم که قاعده‌اش مربع AB باشد ، و [حجمش] مساوی عدد مفروض باشد ، وفرض می کنیم BC ، که بر AB عمود است ، ارتفاع آن باشد. حال قطع مکافیی به رأس B که



سهمش در استقامت AB و ضلع قائم آن AB باشد می کشیم ، و آن قطع DBE است ، و وضع آن معلوم می باشد . سپس قطع دیگری ، که زاید باشد ، به رأس C می‌کشیم که سهمش در استقامت BC و اضلاع قائم و مایل آن هریك مساوی BC

بقیه‌ی ذیل صفحه‌ی بعد

$$AB : BT = BT : BH = BH : TC$$

بالنتیجه $\overline{AB}^2 : \overline{BT}^2 = BT : TC$ ، یا $\overline{AB}^2 \cdot TC = \overline{BT}^3$. پس ،

$$\overline{BT}^3 + \overline{AB}^2 \cdot BC = \overline{AB}^2 \cdot TC + \overline{AB}^2 \cdot BC = \overline{AB}^2 \cdot BT,$$

یا $\overline{BT}^3 + a = b \cdot BT$ ، وهوالمطلوب .

معادلات قطوعی که خیام بکارمیبرد $x^2 = \sqrt{b}\, y$ و $y^2 = x\left(x - \frac{a}{b}\right)$ است .

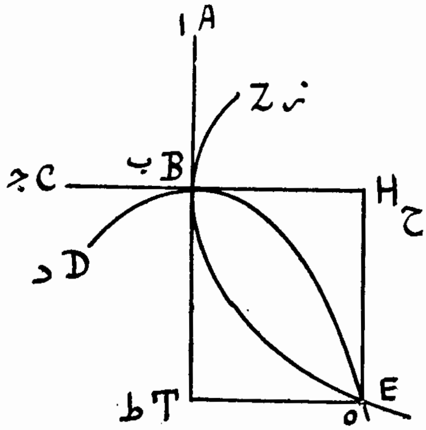
باشد ، و آن ECZ است . این قطع ، چنانکه آپولّونیوس در شکل پنجاه و هشتم مقالهٔ اول ثابت کرده است ، از حیث وضع معلوم است . این دو قطع یا متلاقی‌اند و یا یکدیگر را قطع نمی کنند . پس اگر یکدیگر را قطع نکنند مسئله ممتنع است ، و اگر در یك نقطه با یکدیگر مماس شوند یا یکدیگر را در دو نقطه قطع کنند وضع نقطهٔ تقاطع معلوم خواهد بود . فرض کنیم دو قطع در نقطهٔ E متلاقی باشند . ازین نقطه عمود های ET و EH را [بترتیب] بر دو خط BT و BH فرود می‌آوریم . پس این دو عمود ناچار وضعاً و مقداراً معلومند . و چون خط ET از خطوط ترتیب است ، بنابر آنچه آپولّونیوس در شکل بیستم مقالهٔ اول ثابت کرده است ، نسبت مربع ET به حاصل ضرب BT در TC مثل نسبت ضلع قائم است به ضلع مایل ؛ و چون اضلاع قائم و مایل متساویند ، مربع ET مساوی حاصل ضرب BT است در TC ، و بالنتیجه ، نسبت BT به TE مثل نسبت TE به TC می باشد . اما بنا بر آنچه در شکل دوازدهم مقالهٔ اول کتاب مخروطات ثابت شده ، مربع EH (که مساوی BT است) مساوی حاصل ضرب BH در BA می‌باشد . پس نسبت AB به BT مثل نسبت BT به BH و مثل نسبت BH (که مساوی ET است) به TC می باشد . پس خطوط چهارگانه متناسبند ، و بالنتیجه ، نسبت مربع AB ، که اولی است ، به مربع BT ، که دومی است ، مثل نسبت BT است ، که دومی است ، به TC ، که چهارمی است . پس مکعب BT مساوی مکعب مستطیلی است که قاعده‌اش مربع AB و ارتفاعش CT است . و چون مکعب مستطیلی را که قاعده‌اش مربع AB و ارتفاعش BC است ، و آنرا مساوی عدد مفروض ساختیم ، بر هر دو بیفزائیم ، مکعب BT با عدد مفروض مساوی خواهد بود با مکعب مستطیلی که قاعده‌اش مربع AB و ارتفاعش BT است ، و این مکعب مستطیل [جملهٔ] عدهٔ اضلاع مکعب می‌باشد .

پس ثابت شد که این صنف حالات مختلف دارد ، و بعضی مسائل آن ممتنع

است ☆، و بوسیله‌ی خواص قطع مکافی و قطع زاید حل شد.

[۵۰۷۰۴ § ـ] صنف سوم آنست که **مکعبی معادل اضلاع وعددی باشد**†.

AB را ضلع مربعی مساوی عده‌ی اضلاع قرار می‌دهیم، و مکعب مستطیلی می سازیم که قاعده‌اش مربع AB باشد، و [حجمش] مساوی عدد مفروض باشد، و



(☆) معادله‌ی $x^3 - bx + a = 0$ همواره یك ریشه‌ی حقیقی و منفی دارد که مورد توجه خیام نیست. دو ریشه‌ی دیگرش یا موهومی اند ـ و در این صورت خیام مسئله را ممتنع می شمارد ـ و یا مثبت و مساوی ($x = \sqrt{b/3}$) و یا مثبت ومتفاوت؛ و مقصود از حالاتی که خیام به آنها اشاره می کند همینها است.

(†) $x^3 = bx + a$.

ترسیمات: $\overline{AB}^2 = b$ و $\overline{AB}^2 \cdot BC = a$؛

سهمی DBE برأس B ومحور BT وضلع قائم AB؛

هذلولی متساوی القطرین ZBE برأس B ومحور کانونی BH وضلع قائم BC.

حکم: $x = BH$.

برهان. در هذلولی $\overline{EH}^2 = CH \cdot BH$، ویا بملاحظه‌ی $EH = BT$،

$$BH : BT = BT : CH \qquad (۱)$$

در سهمی $\overline{ET}^2 = AB \cdot BT$، وچون $ET = BH$،

$$AB : BH = BH : BT \qquad (۲)$$

بموجب (۱) و (۲)، $\overline{AB}^2 : \overline{BH}^2 = BH : CH$. پس

$$\overline{BH}^3 = \overline{AB}^2 \cdot CH = \overline{AB}^2 \cdot BH + \overline{AB}^2 \cdot BC،$$

یا $\overline{BH}^3 = b \cdot BH + a$، پس $x = BH$.

معادلات قطوعی که بکار رفته عبارتست از $x^2 = \sqrt{b}\, y$ و $y^2 = x(x + \frac{a}{b})$.

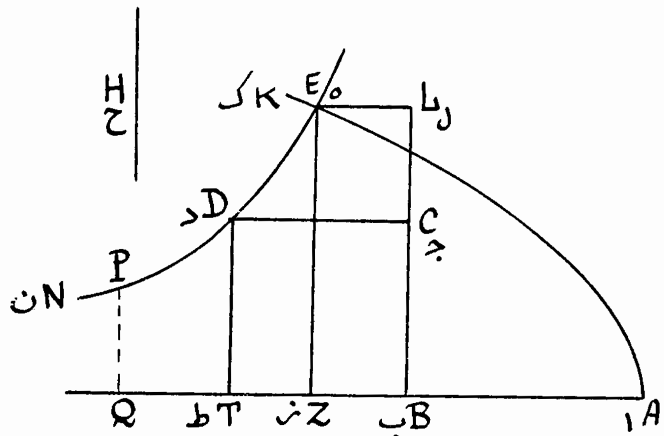
فرض می‌کنیم ارتفاع آن BC بر AB عمود باشد . و AB و BC را مستقیماً امتداد می دهیم ، و قطع مکافیی به رأس B که سهمش بر استقامت AB و ضلع قائمش AB باشد می کشیم ، و آن قطع DBE است ، و وضع آن معلوم می باشد ، و برخط BH مماس است ، چنانکه آپولّونیوس در شکل سی و سوم مقاله‌ی اول ثابت کرده است . و قطع دیگری ، که زاید باشد ، می کشیم که رأسش B باشد ، و سهمش بر استقامت BC باشد ، و هریك از اضلاع قائم و مایل آن مساوی BC باشد ، و آن قطع ZBE است ، و وضعش معلوم است ، و بر خط AB مماس می باشد . پس دو قطع ناچار تلاقی می کنند . فرض کنیم در E متلاقی شوند . وضع این نقطه معلوم است ، و اگر از نقطه‌ی E عمود های ET و EH را بکشیم وضع و مقدار آنها معلوم خواهد بود . چون EH از خطوط ترتیب [قطع زاید] می‌باشد ، بنا بر آنچه پیش از این گفتیم ، مربع آن مساوی حاصل ضرب CH در BH است . پس نسبت CH به EH مانند نسبت EH به HB می‌باشد . اما نسبت EH ، که مساوی BT است ، به HB ، که مساوی ET است و آن از خطوط ترتیب قطع دیگر است ، مثل نسبت ET است به AB که ضلع قائم قطع [مکافی] است . پس خطوط چهار گانه متناسب اند ، و نسبت AB به HB مثل نسبت HB به BT و مثل نسبت BT به CH می باشد . پس نسبت مربع AB ، که اولی است ، به مربع HB ، که دومی است ، مانند نسبت HB است ، که دومی است ، به CH ، که چهارمی است . پس مکعب HB مساوی مکعب مستطیلی است که قاعده‌اش مربع AB و ارتفاعش CH باشد ، زیرا ارتفاعات آنها با قواعد شان متکافی است . اما این مکعب مستطیل مساوی مکعب مستطیلی است که قاعده اش مربع AB و ارتفاعش BC باشد و آنرا مساوی عدد مفروض ساختیم ــ بعلاوه‌ی مکعب مستطیلی که قاعده‌ای مساوی مربع AB بر آن محیط باشد و ارتفاعش BH باشد ــ و این مکعب مستطیل مساوی [جمله‌ی] عده‌ی مفروض اضلاع مکعب BH است . پس مکعب BH مساوی عدد مفروض بعلاوه‌ی [جمله‌ی]

عده‌ی مفروض اضلاع آن مکعب است، و مطلوب همین بود.

پس ثابت شد که این صنف حالات مختلف ندارد، و در آن، یعنی در مسائل آن، چیزی ممتنع نیست ✡، و بخواص قطع مکافی و زاید با هم حل شد.

[۵۰۷۰۵ § -] **صنف چهارم** از اصناف ششگانه‌ی سه‌تائی آنست که **مکعبی و مالها معادل عددی باشد** †.

خط AB را مساوی عده‌ی اموال می‌گیریم، و مکعبی مساوی عدد مفروض



(✡) معادله‌ی $x^3 - bx - a = 0$ که موضوع بحث است همواره یك ریشه‌ی حقیقی و مثبت دارد. دو ریشه‌ی دیگرش هردو منفی یا هردو موهومی‌اند.

(†) $x^3 + cx^2 = a$

ترسیمات: $AB = c$ ، $H^3 = a$ ، $H = BC = BT$ ؛

هذلولی متساوی القطرین EDN با مجانبهای BC و BT و مارّ بر D ؛ سهمی AEK برأس A و محور AT و ضلع قائم BC.

حکم: $x = BZ$.

برهان. در سهمی: $BC : EZ = EZ : AZ$ ؛ در هذلولی $BZ : BC = BC : EZ$.

پس $\overline{BZ}^2 : \overline{BC}^2 = BC : AZ$ ، و یا

$$\overline{BC}^3 = \overline{BZ}^2 . AZ = \overline{BZ}^3 + \overline{BZ}^2 . AB,$$

یا $a = \overline{BZ}^3 + c . \overline{BZ}^2$. پس $x = BZ$.

معادلات قطوعی که بکار برده شده عبارتست از $xy = a^{2/3}$ و $y^2 = a^{1/3}(x+c)$.

می‌سازیم ، و فرض می کنیم H ضلع آن باشد ، و AB را مستقیماً امتداد می‌دهیم ، و BT را مساوی H می سازیم ، و مربع BTDC را تمام می کنیم ، و ـ چنانکه از اشکال چهارم و پنجم مقاله‌ی دوم و شکل پنجاه و نهم مقاله‌ی اول [مخروطات] استنباط می‌شود ـ بر نقطه‌ی D قطع زایدی مرور می دهیم کـه خطوط BC و BT آنرا قطع نکنند ، و آن قطع EDN است . پس قطع EDN از حیث وضع معلوم است ، زیرا وضع نقطه‌ی D معلومست ، و خطوط BC و BT از حیث وضع معلومند . و سپس قطع مکافیی برأس A و سهم AT و ضلع قائم BC می‌سازیم ، و آن قطع AK است . پس قطع AK از حیث وضع معلوم است . و دو قطع ناچار یکدیگر را تلاقی می کنند ، و اگر E نقطه‌ی تلاقی آنها باشد ، وضـع این نقطه معلوم است . حال ازین نقطه عمودهای EZ و EL را [بترتیب] بر دو خط AT و BC فرود می آوریم ؛ پس این دو عمود وضعاً و مقداراً معلومند . حال گویم ممکن نیست که قطع AEK قطع EDN را در نقطه‌ای قطع کند که عمود وارد از آن بر خط AT بر T یا خارج آن وارد آید ✡ . زیرا اگر ، در صورت امکان ، این عمود بر T وارد شود ، مربع آن مساوی حاصل ضرب AT در TB (که مساوی BC است) خواهد بود . اما این عمود مساوی عمود DT است . پس مربع TD مساوی حاصل ضرب AT در TB است ، و نیز مساوی حاصل ضرب BT در خودش می‌باشد ، و این ممتنع است . پس عمود بر T وارد نمی‌شود . و بهمین طریق خارج از آن نیز وارد نمی شود ، زیرا درین صورت

(✡) بعبارت دیگر ، محل تلاقی دو قطع نه D و نه واقع بر قسمت DN از قطع زاید (هذلولی) تواند بـود . چه اولا اگر دو قطع در D متلاقی شوند ، بمـوجب خاصیت سهمی $\overline{DT}^2 = AT . BC$ ، و چـون $BC = DT = BT$ ، $\overline{BT}^2 = AT . BT$ ، و یـا $BT = AT$ ، و این ممتنع است ، زیرا $AT = AB + BT$. ثانیاً اگر دو قطع در نقطه‌ای مانند P از قطعه‌ی DN از سهمی متلاقی‌شوند ، چون عمود PQ را بر AT فرود آوریم ، بالبداهه $PQ < DT$. پس $\overline{PQ}^2 < \overline{DT}^2$ ؛ اما $\overline{PQ}^2 = AQ . BC$ ؛ بالنتیجه $\overline{DT}^2 > AQ . BC$ ، یـا $\overline{BT}^2 > AQ . BT$ ، یا $BT > AQ$ ، و این ممتنع است زیـرا $AQ = AB + BT + TQ$.

این عمود کوتاهتر از TD خواهد بود ، و این بطریق اولی ممتنع است . پس ناچار عمود بر نقطه‌ای بین A و T وارد می‌شود ، مانند [عمود] EZ . و مربع EZ مساوی حاصل ضرب AZ در BC می باشد . پس نسبت AZ به EZ مثل نسبت EZ به BC است . و بنا بر آنچه در شکل هشتم مقاله‌ی دوم مخروطات ثابت شده ، سطح EB مساوی سطح DB است ، وبالنتیجه ، نسبت EZ به BC مثل نسبت BC به BZ می‌باشد . پس خطوط چهارگانه‌ی AZ و EZ و BC و BZ [متوالیاً] متناسبند . بالنتیجه ، نسبت مربع BZ ، که چهارمی است ، به مربع BC ، که سومی است ، مثل نسبت BC است ، که سومی است ، به AZ ، که اولی است . پس مکعب BC ــ که آنرا مساوی عدد مفروض ساختیم ــ مساوی مکعب مستطیلی است که قاعده‌اش مربع BZ و ارتفاعش AZ باشد . اما مکعب مستطیلی که قاعده‌اش مربع BZ و ارتفاعش AZ است مساوی است با مجموع مکعب BZ ومکعب مستطیلی که قاعده اش مربع BZ و ارتفاعش AB باشد ، و این مکعب مستطیلی که قاعده‌اش مربع BZ است و ارتفاعش AB است مساوی [جمله‌ی] عده‌ی مفروض مالها است . پس مکعب BZ با [جمله‌ی] عده‌ی مفروض مالهای آن مساوی عدد مفروض است ، و این همانست که می خواستیم ثابت کنیم .

و این صنف را حالات مختلف نیست ، و هیچیك از مسائل آن ممتنع نمیباشد ✿ ، و بوسیله‌ی خواص قطع مکافی و قطع زاید با هم حل شد .

[٥٠٧٠٦ § -]**صنف پنجم** از اصناف ششگانه‌ی سه‌تائی باقی مانده آنست که **مکعب و عددی معادل مال باشد** † .

(✿) معادله‌ی مورد بحث $x^3 + cx^2 - a = 0$ ، همیشه یك جواب حقیقی و مثبت دارد ، و دو ریشه‌ی دیگرش منفی یا موهومی است .

(†) چون این یکی از موارد نادری است که خیام به بحث از معادله‌ی درجه سوم برحسب ضرایب می پردازد ، شرح روش او خالی ازفایده بنظر نمی‌رسد .

معادله‌ی مورد بحث $x^3 + a = cx^2$ (۱) است که در آن a و c و x مثبت فرض می شود . خیام ابتدا بوسیله‌ی $AC = c$ (۲) و $H^3 = a$ (۳) معادله را متجانس می کند ،

بقیه درذیل‌صفحه‌ی بعد

AC را مساوی عده‌ی مالها می‌گیریم ، ومکعبی مساوی عدد مفروض می‌سازیم ،

بقیه از ذیل صفحه‌ی قبل

وبرحسب اینکه H مساوی AC یا بیشتر یا کمتر از آن باشد سه حالت تشخیص می‌دهد . سپس ثابت می‌کند که در دوحالت اول معادله ممتنع است . خلاصه‌ی استدلال وی اینست .

در حالت اول ، یعنی اگر $AC = H$ (٤) (یا $a = c^3$) ، برحسب اینکه $H = x$ یا $H < x$ یا $H > x$ ، سه فرض ممکن است . اولاً $H = x$ (٥) . بموجب (٤) و (٥) ، $H^3 = AC \cdot x^2$ ؛ یابموجب (٢) و (٣) ، $a = cx^2$ ، ولهذا $x^3 + a > cx^2$ ، و این با (١) ناسازگار است . ثانیاً $H > x$. بهمان قیاس لازم می‌آید $a > cx^2$ ، و بطریق اولی $x^3 + a > cx^2$. ثالثاً $H < x$ (٦) . بموجب (٦)و(٤) ، $AC < x$. پس $x^2 \cdot AC < x^3$. پس بنا بر (٢) ، $cx^2 < x^3$ ؛ وبطریق اولی $cx^2 < x^3 + a$ ، واین نیز با (١)متناقض است.

درحالت دوم ، یعنی اگر $AC < H$ (یا $c^3 < a$) ، بدلایل مشابه با حالت قبل معادله ممتنع می باشد .

پس فقط درحالت سوم ، یعنی وقتی $AC > H$ (٧) (یا $c^3 > a$) ، ممکن است مسئله جواب داشته باشد . در این حالت چنین قرار می دهد : $H = BC$ (٨) . بر حسب اینکه $BC = AB$ ($c/2 = \sqrt[3]{a}$) یا $AB < BC$ ($c/2 < \sqrt[3]{a}$) یـا $AB > BC$ ($c/2 > \sqrt[3]{a}$) سه حالت ممکن است اتفاق افتد . سپس ، خیام دو قطع رسم می کند :

قطع زایدی (هذلولی) با مجانبهای CA و CE و مار برنقطه‌ی D (DZ در شکل اول و DT در سایرین)

قطع مکافی (سهمی) برأس A و محور AC وضلع قائم BC (AT در شکل اول ، AL در دومی ، و AK درسومی) .

شکل اول : $AB = BC$. چون $BC \cdot AB = \overline{DB}^2$ ، سهمی از D می گذرد ، و دو منحنی نقطه‌ی تقاطع دیگری هم دارند .

خواننده می تواند تحقیق کند که اگر CA و CE را بترتیب محور های x و y بگیریم ، مختصات نقطه‌ی دیگر $x = \frac{1}{4} c(\sqrt{5} + 1)$ و $y = \frac{1}{4} c(\sqrt{5} - 1)$ است .

شکل دوم : $AB < BC$. چون $BC \cdot AB < \overline{DB}^2$ ، D درخارج سهمی است .دراین صورت خیام می گوید که اگر دو قطع نقطه‌ای مشترك داشته باشند تصویر این نقطه بر AC بین A و B است ، وبعبارت دیگر x بین c و $\sqrt[3]{a}$ است. کسی که با جبر مقدماتی امروزی‌آشنا باشد بآسانی می‌تواند این مطلب را ثابت کند .

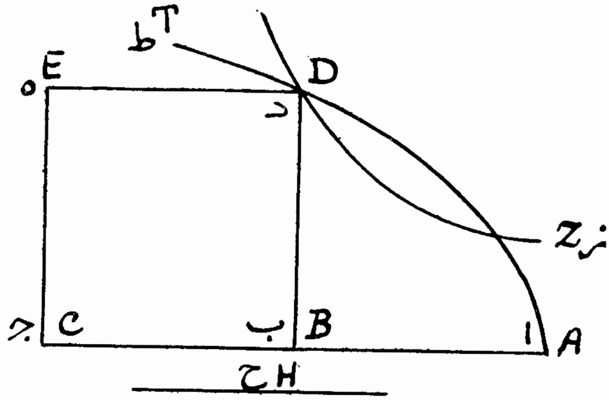
شکل سوم : $AB > BC$. نقطه‌ی D داخل سهمی است ، و دو قطع یکدیگر را در دو نقطه قطع می کنند .

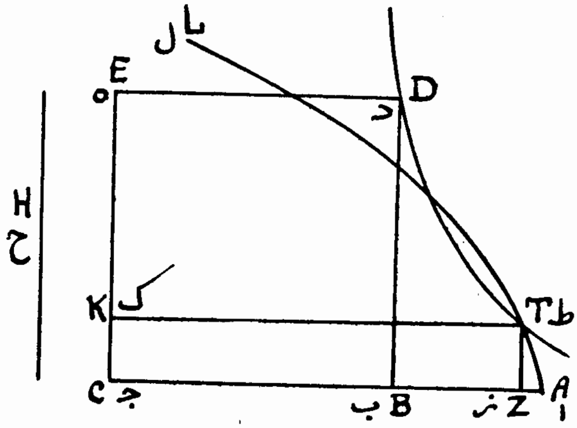
اما اثبات اینکه از نقطه‌ی نقاطع دوقطع جواب معادله بدست می‌آید شبیه همانست که در مسائل سابق آمده است .

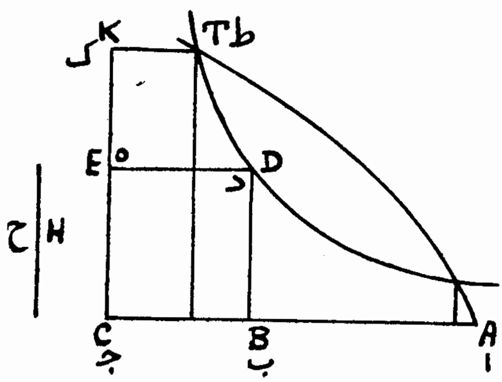
و فرض می کنیم H ضلع آن باشد. خط H از سه حال خالی نیست ؛ یا مساوی خط AC است ، و یا بزرگتر ، و یا کوچکتر از آن. پس اگر مساوی آن باشد مسئله ممتنع است ، زیرا ازسه حال‌خارج نیست : ضلع مکعب مطلوب مساوی H یا کوچکتر و یا بزرگتر از آنست. پس اگر مساوی آن باشد ، حاصل ضرب AC در مربع آن [یعنی در مربع ضلع مکعب] مساوی مکعب H خواهد بود ، و بالنتیجه ، عدد مساوی [جمله‌ی] عده‌ی مالها می گردد ، و احتیاج به افزودن مکعب [مطلوب] نیست. واگر ضلع مطلوب کمتر از آن [یعنی از H] باشد ، حاصل ضرب AC در مربع این ضلع کمتر از عدد مفروض خواهد بود ، و بالنتیجه ، [جمله‌ی] عده‌ی مالها کمتر از عدد مفروض می‌شود چه رسد باینکه چیزی [براین عدد] اضافه شود. و اگرضلع بزرگتر H باشد. مکعب آن بزرگتر از حاصل ضرب AC در مربع آن خواهد بود ، چه رسد باینکه عدد بر این مکعب افزوده شود.

سپس ، اگر H بزرگتر از AC باشد ، در هر سه حالت ، امتناع بطریق اولی پیش می‌آید. پس لازمست که H کمتر از AC باشد ، والا مسئله ممتنع است. اینك از AC [قطعه‌ی] BC را مساوی H جدا می کنیم. خط BC یا مساوی AB ، یا بزرگتر، و یا کوچکتر از آنست. فرض می کنیم در شکل اول مساوی آن و در شکل دوم بزرگتر از آن و در شکل سوم کمتر ازآن باشد ، و در اشکال سه گانه مربع DC را تمام می کنیم ، و بر نقطه‌ی D قطع زایدی می‌سازیم که خطوط AC و CE آنرا قطع نکنند ، و آن در شکل اول DZ و در اشکال دوم و سوم DT است. و قطع مکافیی می‌سازیم که رأسش نقطه‌ی A و سهمش AC و ضلع قائمش BC باشد ، و آن در شکل اول AT و در دومی AL و در سومی AK است. و هر دو قطع از جهت وضع معلومند. در شکل اول قطع مکافی از D می گذرد ، زیرا مربع DB مساوی حاصل ضرب AB در BC است ؛ پس D بر محیط قطع مکافی است. و با اندك تأملی توانی دریافت که قطع مکافی قطع زاید را در نقطه‌ی دیگری [نیز] قطع می کند. و در شکل دوم نقطه‌ی

D درخارج قطع مکافی است، زیرا مربع DB بزرگتراز حاصل ضرب AB در BC است.







درین صورت اگر دو قطع در نقطه‌ی دیگری به تماس یاتقاطع تلاقی کنند ـ و دراین حال عمود وارد[از این نقطه بر AC] تا چار بین نقاط A و B [برAB] وارد می‌شود ـ مسئله ممکن است و الا ممتنع می باشد . و هندسه‌دان فاضل ، ابوالجود ، فکرش به این تماس یا تقاطع نرسید ، و باین جهت حکم کرد باینکه اگر BC بزرگتر از AB باشد مسئله ممتنع است ، و درین حکم بخطا رفت . و ازاصناف ششگانه ، همین صنف است که ماهانی بدان دوچار شد . و در شکل سوم نقطه‌ی D داخل قطع مکافی است ، و بالنتیجه ، دو قطع یکدیگر را در دو نقطه تلاقی می کنند .

و در جمیع حالات از نقطه‌ی تلاقی عمودی بر AB فرود می‌آوریم . فرض کنیم این عمود در شکل دوم TZ باشد ✩ . و همچنین ، عمود دیگری از آن بر CE فرود می‌آوریم ، و آن TK است . پس سطح TC مساوی سطح DC است ، و بالنتیجه نسبت ZC به BC مثل نسبت BC به TZ است . وچون TZ از خطوط ترتیب قطع ATL است مربع آن مساوی حاصل ضرب AZ در BC است . پس نسبت BC به TZ مساوی نسبت TZ به AZ است . پس خطوط چهارگانه متناسبند ، و نسبت ZC به CB مثل نسبت CB به TZ و مثل نسبت TZ به ZA است . پس نسبت مربع ZC ، که اولی است ، به مربع BC ، که دومی است ، مثل نسبت BC است ، که دومی است ، به ZA ، که چهارمی است . بالنتیجه ، مکعب BC - که مساوی عدد مفروض است ـ مساوی مکعب مستطیلی است که قاعده‌اش مربع ZC و ارتفاعش ZA باشد . و چون مکعب ZC را بر هردو بیفزائیم ، مکعب ZC با عدد مفروض مساوی مکعب مستطیلی خواهد بود که قاعده اش مربع ZC و ارتفاعش AC است ، و این مکعب مستطیل مساوی

(✩) در هذلولی $ZC : BC = BC : TZ$ ؛
در سهمی $BC : TZ = TZ : ZA$ ؛
پس $BC : ZA = \overline{BC}^2 : \overline{ZC}^2$ ، یا $\overline{ZC}^2 \cdot ZA = \overline{BC}^3$. بالنتیجه

$$\overline{ZC}^3 + \overline{BC}^3 = \overline{ZC}^3 + \overline{ZC}^2 . ZA = \overline{ZC}^2 . AC ,$$

یا $\overline{ZC}^2 . c = a + \overline{ZC}^3$ ؛ پس $ZC = x$.
معادلات قطوعی که درحل معادله بکار رفته $xy = a^{2/3}$ و $y = a^{1/3} (c - x)$ است .

[جملهٔ] عدهٔ مفروض اموال است ، و هوالمطلوب . و دو حالت دیگر بر همین قیاس است ، منتهی در شکل سوم ناچار دومکعب بدست می‌آید ، زیرا ، چنانکه ثابت شد ، هر [یك از دو] عمود [وارد از دو نقطهٔ تقاطع دو قطع] ضلع مکعبی را از CA جدا می کند .

پس ثابت شد که این صنف حالات مختلفی دارد(✿) ، و بعضی مسائل آن ممتنع است ، و بوسیلهٔ قطع مکافی با قطع زاید حل شد .

[۵۰۷۰۷ § ـ] **صنف ششم** از اصناف ششگانهٔ سه‌تائی که مانده است آنست که **مکعبی معادل اموال و عددی باشد** (†) .

خط AB را مساوی عدهٔ اموال فرض می کنیم ، ومکعب مستطیلی بارتفاع AB ، که قاعده‌اش مربع باشد ، و مساوی عدد مفروض باشد ، می سازیم ، و فرض میکنیم ضلع قاعدهٔ آن BC باشد که بر AB عمود است . و مستطیل DB را تمام میکنیم ، و بر نقطهٔ C ، که وضعش معلوم است ، قطع زایدی مرور می‌دهیم که خطوط AB و AD آنرا قطع نکنند ، و آن قطع CEZ است . وقطع دیگری ، مکافی ، برأس B میکشیم

(✿) معادلهٔ $x^3 - cx^2 + a = 0$ همواره یك ریشهٔ حقیقی و منفی دارد ، و دو ریشهٔ دیگرش مثبت یا موهومی‌اند . برای بحث در حالات مختلفی که خیام به آنها اشاره کرده به ذیل ۵۰۷۰۶ § ، صص (۲۵۲ ـ ۲۵۳)رجوع کنید .

$x^3 = cx^2 + a$ (†)

ترسیمات : $AB = c$ و $AB \cdot \overline{BC}^2 = a$ ؛

هندلولی متساوی‌القطرین CEZ با مجانبهای AB و AD و مار برنقطهٔ C ؛

سهمی BEH برأس B ومحور BK وضلع قائم AB .

حکم : $x = AK$.

برهان . در هذلولی $BC : AK = EK : AB$ ؛ پس $\overline{EK}^2 : \overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 : \overline{AK}^2$.

در سهمی $AB : EK = EK : BK$ ؛ پس $BK : AB = \overline{EK}^2 : \overline{AB}^2$.

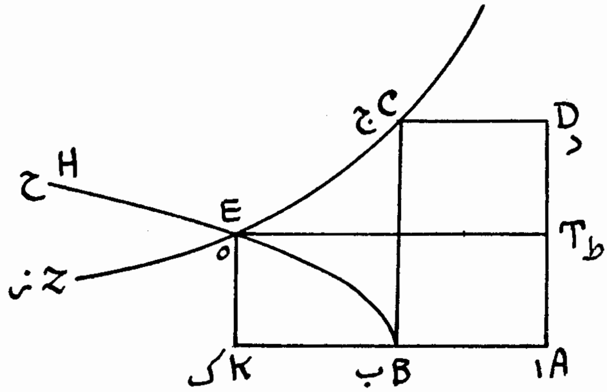
بالنتیجه $\overline{BC}^2 : \overline{AK}^2 = BK : AB$ ، یا $\overline{AK}^2 \cdot BK = AB \cdot \overline{BC}^2$. پس

$$\overline{AK}^2 \cdot AB + \overline{AK}^2 \cdot BK = \overline{AK}^2 \cdot AB + AB \cdot \overline{BC}^2$$

یا $\overline{AK}^3 = c . \overline{AK}^2 + a$. پس $x = AK$ ، وهوالمطلوب .

معادلات قطوعی که بکار برده شده $xy = \sqrt{ac}$ و $y^2 = c (x - c)$ است .

که سهمش بر استقامت AB و ضلع قائمش AB باشد ، و آن BEH است . پس این دو قطع ناچار تلاقی میکنند . فرض کنیم در E تلاقی کنند . پس وضع E معلوم است .



و از E عمودهای ET و EK را بر AB و AD میکشیم . پس سطح EA مساوی سطح CA است ، و بالنتیجه ، نسبت AK بـه BC مثل نسبت AB به EK است ، و مربعات آنها نیز متناسبند ، اما مربع EK مساوی حاصل ضرب KB در AB است ــ زیرا EK در قطع BEH خط ترتیب است ــ پس نسبت مربع AB به مربع EK مثل نسبت AB به BK است . بنا براین ، نسبت مربع BC به مربع AK مساوی نسبت BK بـه AB است ، و بالنتیجه ، مکعب مستطیلی کـه قاعده‌اش مربع BC و ارتفاعش AB است مساوی مکعب مستطیلی است که قاعده‌اش مربع AK و ارتفاعش KB است ، زیرا ارتفاعات آنها با قواعدشان متکافی‌اند . حال چون مکعب مستطیلی را کـه قاعده‌ی آن مربع AK و ارتفاعش AB است بر هر دو بیفزائیم ، مکعب AK مساوی خواهد بود با مکعب مستطیلی که قاعده‌اش مربع BC و ارتفاعش AB است ــ و این مکعب مستطیل را مساوی عدد مفروض ساختیم ــ باضافه‌ی مکعب مستطیلی که قاعده‌اش مربع AK و ارتفاعش AB است ــ و این مکعب مستطیل مساوی [جمله‌ی] عده‌ی مفروض اموال است . پس مکعب AK مساوی است با [جمله‌ی] عده‌ی مفروض مالهای آن بعلاوه‌ی عدد مفروض .

و این صنف راحالات مختلف نیست ، وهیچیك ازمسائل آن ممتنع نمیباشد ☆،
و بوسیله‌ی خواص دو قطع مکافی و زاید با هم حل شد .

[۵۰۸ § مقترنات چهارتائی سه با یك]

[۵۰۸۰۱ §] و چون اصناف سه‌تائی را آوردیم ، اینك می‌پردازیم به معادلات چهارتائی چهارگانه که هریك مرکب ازمعادله‌ی سه [مرتبه] با یك [مرتبه‌ی دیگر] است☆☆.

[۵۰۸۰۲ §] وصنف اول از چهارتائی‌های چهارگانه آنست که **مکعبی و مالها و اضلاع معادل عددی باشد** † .

BE را ضلع مربعی مساوی عـده‌ی مفروض اضلاع قرار می‌دهیم ؛ و مکعب مستطیلی می‌سازیم کـه قاعده‌اش مربع BE باشد ، و مساوی عدد مفروض باشد ، و فرض میکنیم ارتفاع آن BC عمود بر BE باشد ؛ و BD را ، بر امتداد BC ، مساوی

(☆) معادله‌ی $x^3 - cx^2 - a = 0$ همیشه یك ریشه‌ی حقیقی ومثبت دارد ، و دو ریشه‌ی دیگرش همواره موهومی‌اند .

(☆☆) § ۵۰۲۰۴۰۱

(†) $x^3 + cx^2 + bx = a$

ترسیمات : $\overline{EB}^2 = b$ و $\overline{EB}^2 \cdot BC = a$ و $BD = c$ ؛

دایره‌ی DZC بقطر DC ؛

هذلولی متساوی‌القطرین CZ با مجانبهای EA و EK و مار برنقطه‌ی C .

حکم : $x = BL$.

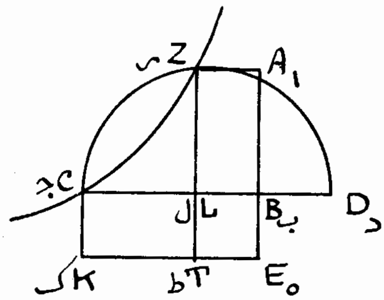
برهان . در هذلولی $ZE = BK$ ، پس $ZE - EL = BK - EL$ ، یا $ZB = LK$ ، ولهذا $EB : BL = TL : BL = ZL : LC$. بالنتیجه $\overline{ZL}^2 : \overline{LC}^2 = \overline{EB}^2 : \overline{BL}^2$. ازطرف دیگر ، در دایره $DL : LC = \overline{ZL}^2 : \overline{LC}^2$. پس $DL : LC = \overline{EB}^2 : \overline{BL}^2$ ، و از آنجا به ترتیب :

$$\overline{EB}^2 . LC = \overline{BL}^2 . DL = \overline{BL}^3 + \overline{BL}^2 \cdot BD,$$
$$\overline{BL}^3 + BD . \overline{BL}^2 + \overline{EB}^2 \cdot BL = \overline{EB}^2 . LC + \overline{EB}^2 . BL = \overline{EB}^2 . BC,$$
$$\overline{BL}^3 + c . \overline{BL}^2 + b . BL = a .$$

پس $BL = x$ ، و هوالمطلوب .

معادلات قطوعی که بکار رفته $y^2 = \left(\frac{a}{b} - x\right)(x + c)$ و $xy = \sqrt{b}\left(\frac{a}{b} - x\right)$ است .

عـده‌ی مفروض مالها می‌سازیم . سپس بقطر DC نیمدایره‌ی DZC را می کشیم ، و مستطیل BK را تمام می کنیم . و برنقطه‌ی C قطع زایدی مرور می‌دهیم کـه خطوط BE و EK آنرا قطع نکنند . پس این قطـع دایره را در نقطه‌ی C قطع می کند ،



زیرا خط مماس آنرا که CK است قطع می کند . پس لازم است که آنرا در نقطه‌ی دیگری نیز قطع کند . فرض کنیم آنرا در Z قطع کند . پس وضع Z معلوم است ، زیرا وضع دایره و قطع معلوم می‌باشد . حال از Z عمودهای ZT و ZA را برEK وEA فرود می‌آوریم . پس سطح ZE مساوی سطح BK است ، و چون EL را که مشترك است اسقاط کنیم ، نتیجه می‌شود که سطح ZB مساوی سطح LK است . بالنتیجه ، نسبت ZL به LC مثل نسبت EB به BL است ، زیرا EB مساوی TL می باشد . و همچنین مربعات آنها نیز متناسبند . اما ، بعلت [خواص] دایره ، نسبت مربع ZL به مربع LC مساوی نسبت DL به LC است . پس نسبت مربع EB به مربع BL مساوی نسبت DL به LC می‌باشد . پس مکعب مستطیلی که قاعده‌اش مربع EB و ارتفاعش LC است مساوی مکعب مستطیلی است که قاعده‌اش مربع BL و ارتفاعش DL است . اما این مکعب مستطیل اخیر مساوی است با مکعب BL باضافه‌ی مکعب مستطیلی که قاعده‌اش مربع BL و ارتفاعش BD است که [BD] مساوی عده‌ی مفروض مالها است . چون مکعب مستطیلی را که قاعده‌اش مربع EB و ارتفاعش BL است ، و مساوی [جمله‌ی] عده‌ی جذر ها است بر هر دو بیفزائیم ، مکعب مستطیلی که قاعده‌اش مربع EB و ارتفاعش BC است ، و آنرا مساوی عدد مفروض ساختیم ،

مساوی می‌شود با مکعب BL باضافه‌ی همچند [جمله‌ی] عده‌ی مفروض اضلاع آن ، باضافه‌ی همچند [جمله‌ی] عده‌ی مفروض مالهای آن ، و این همانست که می خواستیم ثابت کنیم .

پس این صنف حالات مختلف ندارد ، وهیچیك از مسائل آن ممتنع نیست (☆) ، و بخواص قطع زاید و دایره با هم حل شد .

[§ ۵۰۸۰۳] **صنف دوم** از اصناف چهار گانه‌ی چهارتائی آنست که **مکعبی ومالها و عدد معادل اضلاع باشد** (☆☆) .

AB را ضلع مربعی مساوی عده‌ی اضلاع و BC را مساوی عده‌ی مفروض مالها و عمود بر AB قرار می‌دهیم ، و مکعب مستطیلی می‌سازیم که قاعده‌اش مربع AB باشد ، و مساوی عدد مفروض باشد ، و فرض می کنیم BD ، که بر استقامت BC است ، ارتفاع آن باشد . حال ، پس از اتمام مستطیل BE ، برنقطه‌ی D قطع زایدی مرور

(☆) معادله‌ی $x^3 + cx^2 + bx - a = 0$ همواره یك ریشه‌ی حقیقی و مثبت دارد ، و دو ریشه‌ی دیگرش منفی یا موهومی‌اند .

(☆☆) $x^3 + cx^2 + a = bx$

ترسیمات : $\overline{AB}^2 = b$ و $BC = c$ و $\overline{AB}^2 \cdot BD = a$ ؛

هذلولی متساوی القطرین ZDH با مجانبهای AB و AE و مار برنقطه‌ی D ؛

هذلولی متساوی القطرین TDH برأس D و محورکانونی DL و ضلع قائم DC .

حکم : $x = BL$.

برهان . درهذلولی اول $AH = AD$ ، پس $AH - EM + DH = AD - EM + DH$ ، و یا $EL = LM$. پس $\overline{AB}^2 : \overline{BL}^2 = \overline{HL}^2 : \overline{LD}^2$.

در هذلولی دوم $\overline{HL}^2 = LD \cdot CL$ ، ولهذا $\overline{HL}^2 : \overline{LD}^2 = CL : LD$. پس بترتیب :

$$\overline{AB}^2 : \overline{BL}^2 = CL : LD,$$

$$\overline{BL}^2 \cdot LC = \overline{AB}^2 \cdot LD,$$

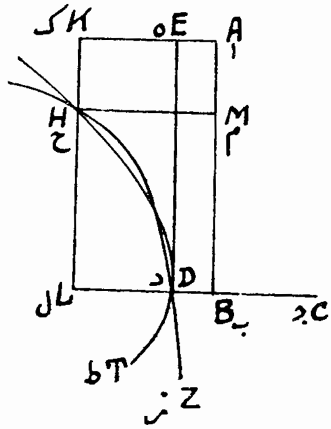
$$\overline{BL}^3 + \overline{BL}^2 \cdot BC + \overline{AB}^2 \cdot BD = \overline{AB}^2 \cdot LD + \overline{AB}^2 \cdot BD = \overline{AB}^2 \cdot BL,$$

$$\overline{BL}^3 + c \cdot \overline{BL}^2 + a = b \cdot BL .$$

پس $x = BL$.

معادلات قطوعی که بکار رفته $y^2 = (x - \frac{a}{b})(x + c)$ و $xy = \sqrt{b}\,(x - \frac{a}{b})$ است.

می دهیم که خطوط AB و AE آنرا قطع نکنند ، وآن ZDH است . و قطع زاید دیگری برأس D می سازیم که سهمش در امتداد BD باشد ، و هر یك از اضلاع قائم



و مایل آن مساوی DC باشد ، وآن TDH است . و ناچار این قطع قطع اول را در D قطع می کند . پس اگر بشود که در نقطه‌ی دیگری متلاقی شوند مسئله ممکن است ، و الا ممتنع است . و این تلاقی ، به صورت تماس یا تقاطع در دو نقطه ، مبتنی بر مقاله‌ی چهارم کتاب مخروطات است ، و حال آنکه [در ۵۰۱۰٤ §] عهد کرده بودیم که جز بدو مقاله ازین کتاب توسل نجوئیم . اما این امر مخل عهد ما نیست ، زیرا همینقدر که دو قطع متلاقی شوند تفاوتی نکند که این تلاقی بصورت تماس یا تقاطع باشد ؛ این مطلب را بدان . و تلاقی ممکن است بصورت تماس باشد یاتقاطع ؛ اما اگر یکی از دو قطع دیگری را در نقطه‌ای غیر از D قطع کند ناچار آنرا در دو نقطه [ی دیگر] قطع میکند .

و در هرحال ، از نقطه‌ی تقاطع یا تلاقی ، هر چه باشد ـ فرض کنیم نقطه‌ی H باشد ـ دوعمود HM و KHL را میکشیم . این دوعمود از حیث وضع و مقدار معلومند ، زیرا وضع نقطه‌ی H معلومست . پس سطح AH مساوی سطح AD است ، وچون EM را که مشترك است اسقاط کنیم ، MD و EH میماند که برابرند ، و اگر DH را بآنها

بیفزائیم ، ML مساوی EL خواهد بود ، وبالنتیجه اضلاع این دو متکافی‌اند ، وهمچنین است مربعات اضلاع آنها . پس نسبت مربع AB به مربع BL مثل نسبت مربع HL است به مربع LD . و اما ، چنانکه بکرات ثابت کردیم ، نسبت مربع HL به مربع LD مثل نسبت CL است به LD . پس نسبت مربع AB به مربع BL مثل نسبت CL به LD میباشد . و بالنتیجه مکعب مستطیلی که ارتفاعش LD و قاعده‌اش مربع AB است مثل مکعب مستطیلی است که قاعده‌اش مربع BL و ارتفاعش LC است . لکن این مکعب مستطیل اخیر مساویست با مجموع مکعب BL و مکعب مستطیلی که قاعده‌اش مربع BL و ارتفاعش BC است و مساوی [جمله‌ی] عده‌ی مفروض مالهاست . و چون مکعب مستطیلی را که قاعده‌اش مربع AB و ارتفاعش BD است ، و آنرا مساوی عدد مفروض ساختیم ، بهر دو بیفزائیم ، مکعب BL با [جمله‌ی] عده‌ی مالهای آن و با عدد مفروض مساوی خواهد بود با مکعب مستطیلی که قاعده‌اش مربع AB و ارتفاعش BL است و مساوی [جمله‌ی] عده‌ی مفروض اضلاع مکعب BL است ، و مقصود همین بود .

پس ثابت شد که این صنف حالات مختلف دارد ، و گاهی درمسائل آن دوضلع ، متعلق به دو مکعب ، پیدا میشود ، و گاهی در آن ، یعنی در مسائل آن ، امتناع پیش میآید ✡ ، و این صنف بوسیله‌ی خواص دو قطع زاید حل شد ، و همین بود که میخواستیم ثابت کنیم .

[§ ۵۰۸۰۴] **صنف سوم** از اصناف چهارگانه‌ی چهارتائی آنست که **مکعبی و اضلاع و عدد معادل مالها باشد** † .

(✡) معادله‌ی موردبحث ، $x^3 + cx^2 - bx + a = 0$ ، همواره یك ریشه ی حقیقی و منفی دارد ، که مورد توجه خیام نیست . دوریشه‌ی دیگرآن حقیقی ومثبت یا موهومی میباشند .

$x^3 + bx + a = cx^2$ (†)

فرض کنیم $BE = c$ و $\overline{BC}^2 = b$ و $AB = a$. $\overline{BC}^2$. بقطر AE نیمدایره‌ای میکشیم، وعمود BC را امتدادمیدهیم و CM را بموازات AE رسم می کنیم . طریقی که خیام سرانجام وپس از ذکر حالات خاص و جزئیاتی بیفایده می‌آورد اینست که مستطیلی که یك ضلعش CZ و سطحش مساوی سطح مستطیل CA باشد رسم می کند. فرض کنیم H رأس مقابل به C ازاین مستطیل باشد.

بقیه در ذیل صفحه‌ی بعد

خط BE را مساوی عده‌ی مفروض مالها میگیریم ، و BC را ضلع مربعی مساوی عده‌ی اضلاع ، و BC را عمود بر BE قرار می‌دهیم ، و مکعب مستطیلی میسازیم که قاعده‌اش مربع BC باشد ، و مساوی عدد مفروض باشد ، و فرض میکنیم ارتفاعش AB و در امتداد BE باشد ، و بر AE نیمدایره‌ی AZE را میکشیم . پس نقطه‌ی C یا داخل دایره واقع میشود ، یا بر محیط آن ، و یا در خارج آن .

اولا فرض میکنیم C داخل دایره واقع باشد ، وBC را امتداد می‌دهیم تا دایره

بقیه‌ی ذیل صفحه‌ی قبل

بر H هذلولیی با مجانبهای CZ و CM می کشیم ، و فرض می کنیم L یکی از نقاط تقاطع آن با دایره و K تصویر L بر AE باشد . گوئیم $x = BK$.

برهان . بنابر خاصیت هذلولی $LC = CH = CA$ ؛ پس $LC + CK = CA + CK$ ، یا $DK = TK$ ؛ بالنتیجه $LK . BK = KA . BC$، ولهذا $\overline{LK}^2 : \overline{KA}^2 = \overline{BC}^2 : \overline{BK}^2$.
اما چون L بر دایره است $LK : KA = KE : LK$ ؛ پس$\overline{LK}^2 : KA^2 = (LK:KA).(KE:LK)$.
$KE : KA =$. بالنتیجه $\overline{BC}^2 : \overline{BK}^2 = KE : KA$ ، و یا $\overline{BC}^2 . KA = \overline{BK}^2 . KE$. پس

$$\overline{BK}^3 + \overline{BC}^2 . BK + \overline{BC}^2 . AB = \overline{BK}^2 . KE + \overline{BK}^3 = \overline{BK}^2 . BE,$$

ویا $\overline{BK}^3 + b . BK + a = c . \overline{BK}^2$ ، و هوالمطلوب .

اما حالات بیفایده‌ای که خیام قبل از این طریقه می‌آورد ازاین قراراست که ابتداء سه‌حالت تشخیص می‌دهد :

(I) C داخل نیمدایره ($b^2 < ac$) ؛
(II) C بر نیمدایره ($b^2 = ac$) ؛
(III) C خارج نیمدایره ($b^2 > ac$) .

در حالت (I) فرض‌کنیم Z نقطه‌ی تلاقی BC با نیمدایره باشد . مستطیل CH راکه یک ضلعش CZ و همسطح CA است می‌سازد ، وسپس حالت مذکور را به سه حالت تقسیم می کند :

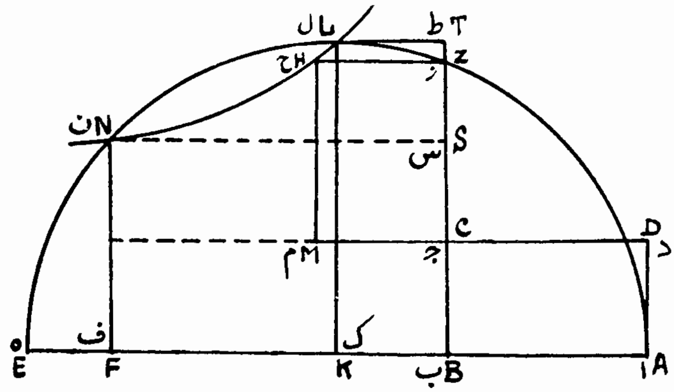
(I_1) H داخل نیمدایره ($a^{3/2} + b^2\sqrt{c} < \sqrt{a}\,bc$)
(I_2) H بر محیط نیمدایره ($a^{3/2} + b^2\sqrt{c} = \sqrt{a}\,bc$)
(I_3) H در خارج نیمدایره ($a^{3/2} + b^2\sqrt{c} > \sqrt{a}\,bc$)

در حالت I_1 قطع زاید مار بر H و با مجانبهای CZ و CM دایره را در دونقطه قطع‌می‌کند ، و اگر K و F تصاویر این دو نقطه بر AE باشند ، برطبق برهانی‌که گذشت معلوم می‌شود که BK و BF جوابهای معادله‌اند . سایر مطالب خیام را در متن ملاحظه می‌فرمایند .

معادلات قطوع سابق الذکر که در حل معادله بکار برده شده عبارتست از

$$y^2 = \left(x + \frac{a}{b}\right)(c - x), \qquad xy = \sqrt{b}\left(x + \frac{a}{b}\right).$$

را در Z قطع کند ، و مستطیل AC را تمام می کنیم ، و بر ZC مستطیلی همسطح



مستطیل AC می‌سازیم ، وآن مستطیل CH است . وضع نقطه‌ی H معلومست ، زیرا سطح CH از حیث مقدار معلومست ، و مقدار زوایای آن نیز معلوم میباشد ، و خط ZC از حیث وضع و مقدار معلومست .

و این نقطه‌ی H یا داخل دایره ، یا بر محیط آن ، و یا در خارج آنست .

اولا فرض میکنیم H داخل دایره باشد ، و بر نقطه‌ی H قطع زایدی مرور میدهیم که خطوط ZC و CM آنرا قطع نکنند . درین وضع ، قطع زاید دایره را ناچاردردو نقطه قطع می کند . فرض کنیم آنرا در دو نقطه‌ی L و N قطع کند . پس این دونقطه از حیث وضع معلومند . و از آنها عمودهای LK و NF را بر AE و از نقطه‌ی L عمود LT را بر BZ فرود می‌آوریم . سطح LC مساوی CH خواهد بود ، و CH مثل CA است . و چون CK را بهر دو بیفزائیم DK مساوی TK خواهد بود ، و لهذا اضلاع آنها متکافی‌اند ، و مربعات اضلاع آنها نیز چنین است . اما ، بعلت [خواص] دایره ، نسبت مربع LK به مربع KA مثل نسبت EK به KA است . پس لازم آید که نسبت مربع BC به مربع BK مساوی نسبت EK به KA باشد . بالنتیجه ، مکعب مستطیلی که قاعده‌اش مربع BC وارتفاعش KA است مساوی مکعب مستطیلی است که قاعده‌اش مربع BK و ارتفاعش KE باشد . لکن مکعب مستطیل اول مساوی است با [جمله‌ی

عده‌ی مفروض اضلاع مکعب BK بعلاوه‌ی همچند عدد مفروض . و چون مکعب BK را بهر دو بیفزائیم ، مکعب مستطیلی که قاعده‌اش مربع BK و ارتفاعش BE است – و مساوی [جمله‌ی] عده‌ی مفروض مالهای مکعب BK است – مساوی خواهد بود با مجموع مکعب BK با [جمله‌ی] عده‌ی مفروض اضلاع آن و با عدد مفروض ، و بهمین برهان ، مکعب BF نیز چنین است . و این در صورتی بود که نقاط C و H در داخل دایره قرار گیرند .

اما اگر H در خارج دایره واقع شود ، و قطع را بسازیم ، گاهی دایره را به تماس یا تقاطع تلاقی میکند (همین حالت ازین صنف است که ابوالجود در مسئله‌ای که بزودی آنرا خواهیم گفت ذکر کرده است) ، و مطلب به همان [حالت] که گفتیم برمی‌گردد . و اگر قطع دایره را تلاقی نکند ، باز هم مستطیل را برخطی کوتاهتر از ZC ، و یا ، در حالت دیگر، بلند تر ازآن میکشیم* . درین صورت ، اگر قطع دایره را تلاقی نکند مسئله ممتنع است ، و برهان امتناع آن معکوس آنست که گفتیم .

[ثانیاً] اگر C برمحیط دایره یا خارج آن قرار گیرد ، CZ را امتداد میدهیم، و مستطیلی رسم می کنیم که یك گوشه‌ی‌آن بر C واقع شود ، و چنان باشد که چون بر گوشه‌ی مقابل زاویه‌ی C قطعی [زاید] بهمان صفت که مذکور شد مرور دهیم ، این قطع دایره را به تماس یا تقاطع تلاقی کند ، و این امر با عده‌ی کمی امتحانات متوالی و حالتی ازیك قاعده‌ی ساده دانسته شود ، ولی از ذکر این قاعده چشم پوشیدم تاخوانندگان این رساله‌را تمرینی باشد ، چو کسی که این اندازه استنباط نتواند هیچ ازین رساله نخواهد فهمید ، زیرا این رساله مبتنی‌است بر کتابهای سه گانه که ازآنها یاد کردیم .

و امتناع حالات ممتنع را با معکوس کردن برهانی که برای حالات ممکن گفتیم ثابت میکنیم ، و آن اینکه ضلع مکعب باید از EB ، که عده‌ی مفروض مالها

(*) عملی است لغو .

است : کوتاهتر باشد ☆ ، چو اگر مساوی عده‌ی مفروض مالها باشد ، این مکعب مساوی [جمله‌ی] عده‌ی مفروض مالهای خود خواهد بود ، بدون اینکه چیز دیگری از قبیل عدد یا اضلاع آن بر آن افزوده شود . و اگر ضلع مکعب بزرگتر از عده‌ی مفروض مالها باشد ، مکعبْ خودْ بزرگتر از [جمله‌ی] عده‌ی مفروض مالهای، آن خواهد بود ، چه رسد باینکه چیز دیگری بآن اضافه شود . پس ثابت شد که ضلع مکعب باید کوچکتر از عده‌ی مفروض مالها باشد . حال از BE [جزئی] مساوی ضلع مکعب جدا می کنیم ، و فرض میکنیم [این جزء] BF باشد ، و از F عمودی [بر BE] تا محیط دایره می کشیم . سپس برهانی را که ذکر شد معکوس می کنیم . نتیجه میشود که رأس عمود بر محیط قطع زایدی قرار دارد که گفته شد ممکن نیست دایره را قطع کند ، و این محال است † .

(☆) اگر $c \geqslant x$ ، نتیجه می‌شود $x^3 \geqslant c\,x^2$ ، وبطریق اولی $x^3+bx+a > cx^2$.

(†) مقصود اثبات اینست که اگر قطوع مذکور متلاقی نباشند مسئله ممتنع است . توضیح استدلال خیام باین شرح است . ثابت شد که اگر معادله جوابی داشته باشد آن جواب از c (یعنی BE) کمتر است . پس BF را مساوی این جواب جدا کرده از F عمودی بر AE می کشیم تا دایره را در N قطع کند . چون BF جواب معادله است خواهیم داشت :

$$(1) \quad \overline{BF}^3 + \overline{BC}^2 \,.\, BF + \overline{BC}^2 \,.\, AB = BE \,.\, \overline{BF}^2$$

(رجوع شود به ذیل صفحه‌ی ۲۱٤). اما طرف دوم مساوی $\overline{BF}^2 \,.\, EF + \overline{BF}^3$ است.

پس بموجب (۱) ، $\overline{BC}^2 \,.\, BF + \overline{BC}^2 \,.\, AB = \overline{BF}^2 \,.\, EF$ ، و یا

$$(2) \quad \overline{BC}^2 \,.\, AF = BF^2 \,.\, EF \,.$$

امـا چـون N بـر دایـره است ، $\overline{NF}^2 \,.\, AF = \overline{AF}^2 \,.\, EF$. پس بمـوجـب (۲) ، $NF \,.\, FB = FA \,.\, AD$. بنابراین ، مستطیلهای SF و DF متساوی اند ، و پس از اسقاط CF نتیجه می‌شود $NC = AC = CH$. بالنتیجه ، نقطه‌ی N بر هذلولیی مار بر H و با مجانبهای ZC و CM قرار دارد ، و این خلاف فرض است . فهوالمطلوب .

در سایر حـالات « امتناع » ، خیـام ، هرگاه دو قطعی که در حل مسئله بکار می‌برد تـلاقی نکنند ، بدون استدلال حکم به امتناع می کند . استدلال فوق‌الذکر ، کـه مانند بسیاری ازحواشی این قسمت ، از جبر عمر خیام ویکـه گـرفته شده (ص ۵۳) ، با تغییر مناسب درسایراصناف نیز قابل اجراست .

و چون گمان می کنم که این امتحانات ممکن است بر بعضی از خوانندگان این رساله دشوار باشد، این طریقه را کنار میگذاریم، و قاعده‌ای می‌آوریم که ازین امتحانات بی نیاز باشد، و آن اینست که برخطی دلخواه بر استقامت BC ـ C هرجا باشد، در داخل [دایره] یا در خارج [آن] ـ مستطیلی می سازیم که یك گوشه‌ی آن بر C باشد، و مساوی سطح AC باشد. پس وضع و مقدار اضلاع آن ناچار معلوم خواهد بود. سپس بر گوشه‌ی مقابل گوشه‌ی C قطع زایدی می کشیم که خطوط ZC و CM آنرا قطع نکنند ـ و CM خطی است عمود بر [ZC از] نقطه‌ی C. پس اگر قطع دایره را به تماس یا تقاطع تلاقی کند مسئله ممکن و الا ممتنع است، و برهان بر امتناع آنست که ذکر کردیم.

[۵۰۸۰۴۰۱§ـ] و [پیش از ما] یکی از هندسه دانان دوچار این صنف شد، و آنرا حل کرد، ولی حالات مختلف آنرا ثابت نکرد، و بفکرش نرسید که گاهی مسائل این صنف، چنانکه ثابت کردیم، ممتنع است. پس این مطلب را بدان، و نیز قانون دیگر حل این صنف و تمیز مسائل ممکن آنرا از حالات ممتنع دریاب.

واین صنف بوسیله‌ی خواص دایره با خواص قطع زاید حل شد، واین‌همانست که می‌خواستیم ثابت کنیم.

و اما مسئله‌ای که یکی از متأخرین را دوچار این صنف کرد اینست: «ده را بدو قسمت چنان تقسیم کنید که مجموع مربعات دو قسمت بعلاوه‌ی خارج قسمت جزء بزرگتر بر جزء کوچکتر هفتاد و دو باشد» ✡. پس، بر طبق عادت علمای جبر در امثال این تقسیمات، یکی از دو قسمت را شیء گرفت و دیگری را ده منهای شیء. سپس مسئله منجر شد به معادله‌ی مکعبی و پنج عدد و سیزده و نیم ضلع آن

(✡) اگر یکی از اجزاء را به x نمایش دهیم معادله‌ی مسئله اینست:

$$(۱۰ - x)^{۲} + x^{۲} + (۱۰ - x)/x = ۷۲$$

یا $x^{۳} + ۱۳{,}۵x + ۵ = 10\,x^{۲}$. جوابهای این معادله عبارتند از $x = ۲$ و $x = ٤ \pm \sqrt{۷٤/۲}$. درین مسئله نقاط C و H هر دو در خارج دایره قرار دارند، و حکم بخلاف آن، که در متن آمده، ناشی از اشتباه نساخ یا خیام است.

با ده مال. ودرین مسئله دونقطه‌ی C و H درست در داخل دایره قرار می گیرند. و این مرد فاضل مسئله‌ی مذکور را ـ که جماعتی از فضلای عراق، ازجمله ابوسهل کوهی، خدا همه‌ی آنانرا رحمت کند، پس از کوشش بسیار ازحلش عاجز شدند ـ حل کرد؛ منتهی این حل کننده ـ که خداوند از او خوشنود باد ـ با مراتب فضل ومقام بلندی که در ریاضیات داشت، متوجه حالات مختلف سابق الذکر نشد، و حال آنکه در مسائل این صنف بعضی ممتنع است. واین فاضل همان ابوالجود یا شَنّی* است. و خدا داناست.

[۵۰۸۰۵§ ـ] **صنف چهارم** از اصناف چهارگانه آنست که **اعداد و اضلاع ومالها معادل مکعب باشد** †

فرض می کنیم BE ضلع مربعی مساوی عده‌ی اضلاع باشد؛ ومکعب مستطیلی

(*) ابوعبدالله محمد ابن احمد الشنی، از ریاضیون معاصر ابوالجود یا کمی پیش از زمان وی بوده است. رجوع شود به سوتر، **ریاضیون و منجمین عرب**، صص ۹۷ ـ ۹۸.

$x^3 = cx^2 + bx + a$ (†)

ترسیمات: $\overline{BE}^2 = b$ ، $\overline{BE}^2 . AB = a$ ، $BC = c$ ؛

هذلولی متساوی القطرین HTK بامجانبهای EM و ES ومار بر H ؛

هذلولی متساوی القطرین LCT با رأس C و محورکانونی CN و ضلع قائم AC ،

حکم: $x = NB$

برهان. در هذلولی اول $EA = HE = TE$ ؛ پس $TB = AS$ ، ولهذا

$$\overline{AN}^2 : \overline{TN}^2 = \overline{NB}^2 : \overline{SN}^2 = \overline{NB}^2 : \overline{BE}^2 .$$

درهذاولی دوم $\overline{TN}^2 = NC . AN$ ، یا $\overline{AN}^2 : \overline{TN}^2 = AN : NC$. پس بترتیب

$$\overline{NB}^2 : \overline{BE}^2 = AN : NC ,$$

$$\overline{BE}^2 . AN = \overline{NB}^2 . NC ,$$

$$\overline{BE}^2 . AB + \overline{BE}^2 . NB + \overline{NB}^2 . BC = \overline{NB}^2 . NC + \overline{NB}^2 . BC = \overline{NB}^3 ,$$

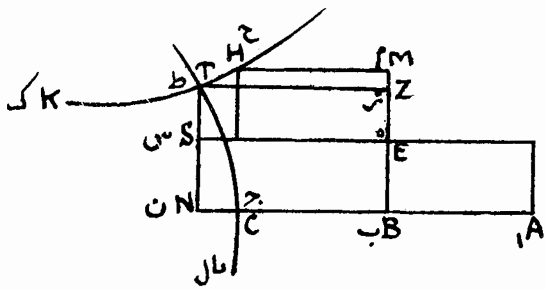
$$a + b . NB + c . \overline{NB}^2 = \overline{NB}^3 ,$$

پس $x = NB$.

معادلات قطوعی که بکار رفته عبارتست از:

$$y^2 = (x + \frac{a}{b})(x - c) . \qquad xy = \sqrt{b}(x + \frac{a}{b}) ,$$

می‌سازیم که قاعده‌اش مربع BE باشد ، و مساوی عدد مفروض باشد ، و ارتفاع آن AB را عمود بر BE می گیریم ؛ و BC را بر امتداد AB مساوی عدده‌ی مفروض مالها فرض میکنیم . سپس مستطیل AE را تمام می کنیم ، و BE را بطول دلخواه EM امتداد می‌دهیم ، و بر EM که مفروض گرفتیم مستطیلی مساوی AE می‌سازیم ، و آن EH است . پس وضع نقطه‌ی H معلومست . حال بر H قطع زایدی می‌سازیم کـه خطوط



EM و ES آنرا قطع نکنند ، و آن HTK است . پس وضع این قطع معلومست . و قطع زاید دیگری می‌سازیم که رأس آن نقطه‌ی C و سهمش در امتداد BC باشد ، و هریك از اضلاع قائم و مایل‌آن مساوی AC باشد ، و آن قطع LCT است ، و وضعش معلوم می‌باشد ، و ناچار قطع HTK را تلاقی می کند . فرض کنیم آنرا در نقطه‌ی T تلاقی کند . پس وضع T معلومست ، و چون ازآن دو عمود TZ و TN را بر BC وBM بکشیم ، این دو عمود از حیث وضع و مقدار معلوم خواهند بود ، و TE مساوی EH می‌شود که خود مساوی EA است ، و چون EN را بر هر دو بیفزائیم ، AS مساوی TB می‌شود ، و بالنتیجه ، اضلاع این دو متکافی‌اند ، و همچنین است مربعات اضلاع آنها . اما ، چنانکه بکرات ثابت کردیم ، باقتضای قطع زاید LCT ، نسبت مربع TN به مربع AN مساوی نسبت NC است به AN . پس نسبت مربع BE به مربـع BN مثل نسبت NC است به NA . پس مکعب مستطیلی که قاعده‌اش مربع BE و ارتفاعش AN است مساوی مکعب مستطیلی است که قاعده‌اش مربع BN و ارتفاع آن CN است . اما اولی مساوی مکعب مستطیلی است کـه مربع BE برآن محیط است و ارتفاعش AB

است، و آنرا مساوی عدد ساختیم، با مکعب مستطیلی که قاعده‌اش مربع BE و ارتفاعش BN است، و مساوی [جمله‌ی] عده‌ی مفروض اضلاع مکعب BN می‌باشد. حال مکعب مستطیلی را که قاعده‌اش مربع BN و ارتفاعش BC است، و مساوی [جمله‌ی] عده‌ی مفروض مالهای مکعب BN می‌باشد، به هر دو اضافه می‌کنیم. لازم می‌آید که که مکعب BN مساوی باشد با [جمله‌ی] عده‌ی مفروض مالهای آن با [جمله‌ی] عده‌ی مفروض اضلاع آن و با عدد مفروض، و این همانست که می‌خواهیم ثابت کنیم.

و این صنف حالات مختلف ندارد، و هیچیك از مسائل آن ممتنع نیست ✡.

[۰۰۹ § مقترنات چهارتائی دو با دو]

[۰۰۹۰۱ § -] و چون اصناف چهارگانه‌ی چهارتائی [سه با یك] را آوردیم، اینك می‌پردازیم به اصناف سه‌گانه ✡✡ که هر یك عبارتست از معادله‌ی دو [مرتبه] با دو [مرتبه‌ی دیگر].

[۰۰۹۰۲ § -] صنف اول ازاصناف سه‌گانه‌ی چهارتائی که مانده بود اینست که **مکعب و مالها معادل اضلاع وعدد باشد** †.

(✡) معادله‌ی $x^3-cx^2-bx-a=0$ همواره یك ریشه‌ی حقیقی و مثبت دارد، و دو ریشه‌ی دیگرش منفی یا موهومی است.

(✡✡) § ۰۰۲۰۴۰۲

(†) $x^3+cx^2=bx+a$

فرض کنیم $b=\overline{BD}^2$ ، $BC=c$ ، و $S=a$. $\overline{BD}^2$. برحسب اینکه $S<BC$ یا $S=BC$ یا $S>BC$ سه حالت تشخیص میدهیم. بحث فعلی راجع به حالت اول است.

حالت اول $S<BC$.

ترسیمات. AB را مساوی S جدا کرده مستطیل ED را مساوی مستطیل AD می‌سازیم. هذلولی‌متساوی‌القطرین EH را با مجانبهای DZ و DO بر نقطه‌ی F ، و هذلولی متساوی‌القطرین AHT را برأس A و محورکانونی AB و ضلع قائم AC می‌کشیم.

حکم: $x=KB$.

بقیه در ذیل صفحه‌ی بعد

BD را ضلع مربعی مساوی عده‌ی اضلاع می‌گیریم و CB را عده‌ی مفروض اموال، وCB عمود بر AB است. سپس مکعب مستطیلی می‌سازیم که قاعده‌اش مربع BD باشد، و مساوی عدد مفروض باشد، و فرض می‌کنیم ارتفاع آن S باشد. خط S یا بزرگتر از BC است، و یا کوتاهتر از آن، و یا مساوی آن.

اولا فرض می‌کنیم S کوتاهتر از BC باشد. و از BC [جزء] AB را مساوی S جدا می‌کنیم، و مستطیل AD را تمام می‌کنیم، و بر امتداد BD طول دلخواه DZ را میگیریم، و برDZ مستطیلی مساوی AD می‌سازیم، وآن ED است. پس وضع E معلوم است، و اضلاع مستطیل ED جملگی از حیث وضع و مقدار معلومست. سپس برE قطع زایدی مرور می‌دهیم که خطوط ZD و DO آنرا تلاقی نکنند، و آن قطع EH است. پس وضع EH معلومست. و قطع زاید دیگری می‌کشیم که رأسش نقطه‌ی A و سهمش AB و هر یك از اضلاع قائم و مایل آن مساوی AC باشد. و آن قطع AHT است، و ناچار قطع دیگر را تلاقی میکند. فرض کنیم آنرا در H تلاقی کند. پس وضع H معلومست، و چون از آن دو عمود HK و HL را بکشیم وضع و مقدار آنها معلوم خواهد بود، و مستطیل HD مساوی ED می‌شود، که خود مساوی AD

بقیه‌ی ذیل صفحه‌ی قبل

برهان. در هذلولی اول، $AD = ED = HD$؛ پس $HB = AM$، ولهذا

$$\overline{HK}^2 : \overline{KA}^2 = \overline{MK}^2 : \overline{KB}^2 = \overline{BD}^2 : KB^2 .$$

در هذلولی دوم، $\overline{HK}^2 : \overline{KA}^2 = CK : AK$.

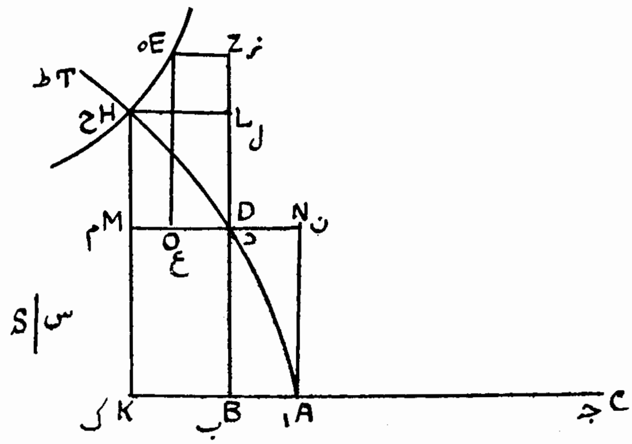
پس بترتیب:

$$\overline{BD}^2 : \overline{KB}^2 = CK : AK ,$$
$$\overline{KB}^2 . CK = \overline{BD}^2 . AK ,$$
$$\overline{KB}^3 + \overline{KB}^2 . BC = \overline{BD}^2 . KB + \overline{BD}^2 . AB,$$
$$\overline{KB}^3 + c . \overline{KB}^2 = b . KB + a .$$

پس $x = KB$.

معادلات قطوع مذکور عبارتست از $y^2 = (x + \frac{a}{b})(x + c)$ و $xy = \sqrt{b}\,(x + \frac{a}{b})$.

است ، و چون DK را برهر دو بیفزائیم ، سطح HB مساوی AM در میآید ، وبالنتیجه



اضلاع آنها متکافیاند ، و همچنین است مربعات اضلاع آنها . اما چنانکه بکرات ثابت کردیم ، باقتضای قطع AHT ، نسبت مربع HK به مربع KA مثل نسبت CK به AK است . پس نسبت مربع BD بـه مربع KB مثل نسبت CK به AK است . پس مکعب مستطیلی که قاعدهاش مربع BD و ارتفاعش AK است مساوی مکعب مستطیلی است که قاعدهاش مربع BK و ارتفاعش CK است . اما این مکعب مستطیل اخیر مساوی است با مجموع مکعب BK و مکعب مستطیلی که قاعدهاش مربع BK و ارتفاعش BC است ، و مساوی [جملهی] عـدهی مفروض اموال میباشد . و مکعب مستطیل اول مساویست با مجموع مکعب مستطیلی که قاعدهاش مربع BD و ارتفاعش AB است ــ و آنرا مساوی عدد مفروض ساختیم ــ و مکعب مستطیلی که قاعدهاش مربع BD و ارتفاعش BK است ، و مساوی [جملهی] عدهی مفروض اضلاع مکعب BK است . پس مکعب BK با [جملهی] عدهی مفروض مالهای آن مساویست با عدد مفروض و [جملهی] عدهی مفروض اضلاع آن مکعب ، و هوالمطلوب .

و[ثانیاً] اگر S مساوی BC باشد، BD خود ضلع مکعب مطلوبست ✩، وبرهان آن اینکه [از یك طرف] مکعب مستطیلی که قاعده‌اش مربع BD و ارتفاعش نیز BD است - وبرابر [جمله‌ی] عده‌ی اضلاع مکعب BD میباشد - مساویست بامکعب BD. و [از طرف دیگر،] مکعب مستطیلی که قاعده‌اش مربع BD و ارتفاعش BC است - وبرابر[جمله‌ی] عده‌ی مفروض‌مالهای مکعبBD است - مساویست بامکعب مستطیلی که قاعده‌اش مربع BD و ارتفاعش S است، و مساوی عدد مفروض میباشد. پس مکعب BD با [جمله‌ی] عده‌ی مفروض مالهای آن مساویست با عدد مفروض بعلاوه‌ی [جمله‌ی] عده‌ی مفروض اضلاع آن مکعب، و هوالمطلوب. و معلومست که درین حالت مکعب BD بعلاوه‌ی عدد مفروض مساویست با مجموع [جمله‌ی] عده‌ی مفروض مالهای آن و [جمله‌ی] عده‌ی مفروض اضلاع آن. پس [این حالت از] این صنف داخل در صنف سوم است که معادله‌ی مکعب و عدد با مالها و اضلاع باشد.

و [ثالثاً] اگر S بزرگتر از BC باشد، AB را مساوی S قرار میدهیم، و قطع دوم را بر نقطه‌ی C میگذرانیم چنانکه هر یك از اضلاع [قائم و مایل] آن مساوی AC باشد، و آن ناچار قطع دیگر را تلاقی می‌کند، و باز هم ضلع مکعب [مطلوب] BK است، و باقی عمل و برهان شبیه آنست که گذشت، الا اینکه نسبت مربع HK به مربع KA مثل نسبت AK به KC میباشد ✩.

پس ثابت شد که این صنف حالات مختلف دارد، و یکی از حالات آن داخل

(✩) **حالت دوم** $S = BC$ (رجوع شود به ذیل † صفحه‌ی ۲۲۱).

حکم: $x = BD$.

برهان. از یك طرف $\overline{BD}^3 = \overline{BD}^2 \cdot BD = b \cdot BD$، و از طرف دیگر

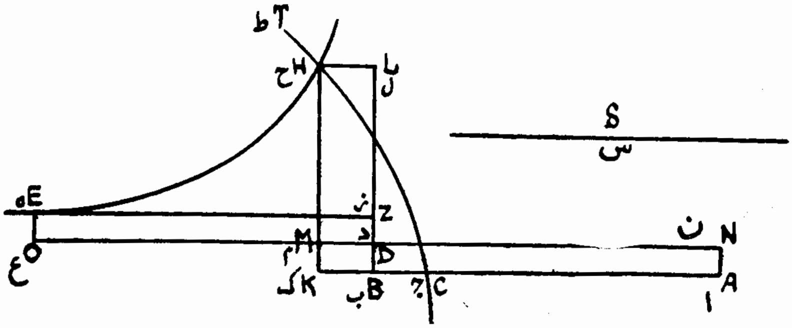
$$\overline{BD}^2 \cdot BC = \overline{BD}^2 \cdot S = a$$ پس

$$\overline{BD}^3 + \overline{BD}^2 \cdot BC = b \cdot BD + a.$$

فهوالمطلوب.

(✩) بعبارت دیگر، نقش نقاط A و C تعویض میشود.

صنف سوم است ، و هیچیك از مسائل آن ممتنع نیست [✡] ، و بـه خواص دو قطع زاید حل شد .



[§۵۰۹۰۳ ـ] صنف دوم ازاصناف سه گانه‌ی چهارتائی که مانده‌بود اینست که **مکعبی و اضلاع معادل مالها وعدد باشد** [†] .

(✡) معادله‌ی $x^3+cx^2-bx-a=0$ همیشه یك ریشه‌ی حقیقی و مثبت دارد ، و دو ریشه‌ی دیگرش منفی یا موهومی‌اند . حالاتی که خیام تشخیص می دهد مطابقست با $a<bc$ و $a=bc$ و $a>bc$.

$x^3+bx=cx^2+a$ (†)

فرض کنیم $BC=c$ ، $\overline{BD}^2=b$ ، $\overline{BD}^2\cdot S=a$. برحسب اینکه $S<BC$ یا $S=BC$ یا $S>BC$ ، خیام سه حالت تشخیص میدهد .

حالت اول : $S<BC$. قطعه‌ی AB را مساوی S جدا میکنیم ، و نیمدایره‌ای بقطر AC و هذلولی متساوی القطرینی با مجانبهای DB و DZ و مار بر A میکشیم .

بموجب خاصیت هذلولی $AD=KD$ ؛ پس $AD-MZ+AK=KD-MZ+AK$ ، یا $BK=AL$. بالنتیجه

$$\overline{KE}^2:\overline{EA}^2=\overline{LE}^2:\overline{BE}^2=\overline{BD}^2:BE^2,$$

وبموجب خواص دایره $\overline{KE}^2:\overline{EA}^2=EC:EA$ ؛ پس بترتیب :

$$\overline{BD}^2\cdot EA=\overline{BE}^2\cdot EC,$$

$$\overline{BE}^3+\overline{BD}^2\cdot EA=\overline{BE}^3+\overline{BE}^2\cdot EC=\overline{BE}^2\cdot BC,$$

$$\overline{BE}^3+\overline{BD}^2\cdot BE=BC\cdot\overline{BE}^2+\overline{BD}^2\cdot AB,$$

$$\overline{BE}^3+b\cdot BE=c\cdot\overline{BE}^2+a.$$

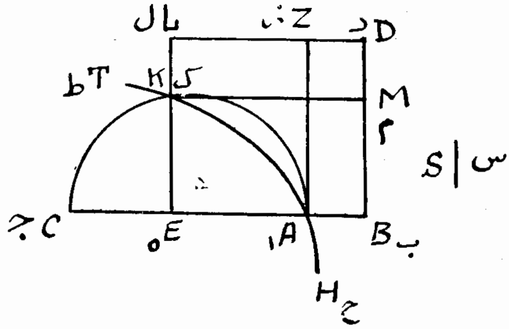
پس $X=BE$. اثبات دوحالت دیگر در ذیل صفحات ۲۲۷و۲۲۸ آمده است .

معادلات قطوعی که در حل معادله بکار رفته عبارتست از

$$y^2=(x-\frac{a}{b})(c-x).\qquad xy=\sqrt{b}\,(x-\frac{a}{q}),$$

BC را مساوی عده‌ی مفروض اموال و BD را ضلع مربعی مساوی عده‌ی اضلاع و عمود بر BC قرار می‌دهیم ، و مکعب مستطیلی مساوی عدد مفروض می‌سازیم که قاعده‌اش مربع BD باشد ، و فرض میکنیم ارتفاعش S باشد . پس S یا کوتاهتر ازBC است ، یا مساوی آن ، و یا بلندتر از آن .

اولا فرض میکنیم کوتاهتر از آن باشد ، و از BC [طول] BA را مساوی S جدا می کنیم ، و AD را تمام می کنیم ، و بر قطر AC دایره‌ی AKC را می کشیم .



پس وضع این دایره معلومست . سپس بر نقطه‌ی A قطع زایدی مرور می‌دهیم که خطوط BD و DZ آنرا قطع نکنند ، وآن قطع HAT و وضعش معلومست . و چون HAT خط AZ را که بر دایره مماس است قطع می کند ، دایره را نیز قطع می کند ، چو اگر بین آنها [، یعنی بین دایره و مماس AZ ،] واقع شود ، چنانکه آپولونیوس در شکل شصتم مقاله‌ی دوم [کتاب مخروطات] ثابت کرده است ، خواهیم توانست که از نقطه‌ی A خطی مماس بر قطع بکشیم . درین صورت ، این خط [مماس] یا بین AZ و دایره واقع میشود ، و این ممتنع است ، و یا خارج AZ قرار میگیرد ، و درین حال، AZ خط مستقیمی خواهد بود واقع بین قطع واین خط مماس ، واین نیز ممتنع‌است . پس قطع TAH بین دایره و AZ واقع نتواند بود ، و بالنتیجه آنرا قطع می کند . و ناچار آنرا در نقطه‌ی دیگری [نیز] قطع میکند . فرض کنیم آنرا در K قطع کند . پس وضع K معلومست ، و چون از آن عمودهای KM و KE را بر BC و BD بکشیم ،

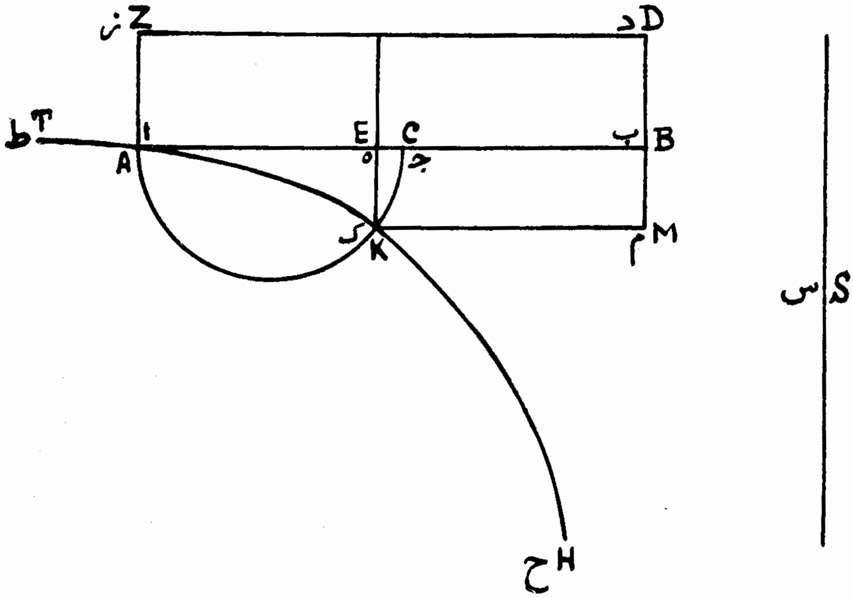
چنانکه دانستی ، وضع و مقدار این دوعمود معلوم خواهد بود . و چون مستطیل KD را تمام کنیم ، سطح AD مساوی سطح KD خواهد بود ، و اگر MZ را از هر دو اسقاط کنیم ، و AK را بیفزائیم ، BK مساوی AL در می‌آید ، و بالنتیجه ، اضلاع آنها متکافی‌اند ، و همچنین است مربعات اضلاع آنها . لکن نسبت مربع KE به مربع EA مثل نسبت EC به EA است . پس نسبت مربع BD به مربع BE مثل نسبت EC است به EA . بنابرین ، مکعب مستطیلی که قاعده‌اش مربع BD وارتفاعش EA است مساوی مکعب مستطیلی است که قاعده‌اش مربع BE و ارتفاعش EC است . و چون مکعب BE را به هر دو بیفزائیم ، مکعب مستطیلی کـه قاعده‌اش مربع BE و ارتفاعش BC است مساوی میشود با مکعب BE ومکعب مستطیلی که قاعده‌اش مربع BD وارتفاعش EA است . اما مکعب مستطیل اول مساوی است با [جمله‌ی] عده‌ی مفروض مالهای مکعب BE . حال مکعب مستطیلی را که قاعده‌اش مربع BD و ارتفاعش BA است ، و آنرا مساوی عدد مفروض ساختیم ، به هر دو می‌افزائیم . پس مکعب BE بعلاوه‌ی مکعب مستطیلی که قاعده‌اش مربع BD و ارتفاعش BE است ، و مساوی [جمله‌ی] عده‌ی مفروض اضلاع مکعب میباشد ، برابر [جمله‌ی] عده‌ی مفروض اموال مکعب بعلاوه‌ی عدد مفروض خواهد بود ، و هوالمطلوب .

و **ثانیاً** اگر S مساوی BC باشد (☆) ، BC خودْ ضلع مکعب مطلوب است . برهانش اینکه مکعب BC مساوی [جمله‌ی] عده‌ی مفروض مالها است . و مکعب مستطیلی که ارتفاعش BC و قاعده‌اش مربع BD است مساوی عدد مفروض است ، و همین مکعب مستطیل مساوی [جمله‌ی] عده‌ی مفروض اضلاع مکعب BC نیزهست . پس مکعب BC بعلاوه‌ی [جمله‌ی] عده‌ی مفروض اضلاع آن مساویست با [جمله‌ی]

(☆) **حالت دوم** : (رجوع شود به ذیل‌صفحه‌ی ۲۲۵). گوئیم اگر $S = BC$ ، $X = BC$. زیرا ازیك طرف $\overline{BC}^3 = BC \cdot BC^2 = c \cdot \overline{BC}^2$ ، وازطرف‌دیگر $S \cdot \overline{BD}^2 = \overline{BD}^2 \cdot BC$ و یا $b \cdot BC = a$. پس $\overline{BC}^3 + b \cdot BC = c \cdot \overline{BC}^2 + a$. فهوالمطلوب . ضمناً بموجب تساویهای مذکور $\overline{BC}^3 + a = c \cdot BC^2 + b \cdot BC$ ، و این معادله تعلق بـه صنف سوم (§ ۵۰۹۰۴) دارد .

عده‌ی مفروض مالهای آن با عدد مفروض [فهوالمطلوب] . و این حالت نیز داخل صنف سوم است ، زیرا [جمله‌ی] عده‌ی مفروض اضلاع مکعب BC مساوی عدد مفروض است . پس مکعب BC بعلاوه‌ی عدد مفروض مساوی است با [جمله‌ی] عده‌ی مفروض مالهای آن با [جمله‌ی] عده‌ی مفروض اضلاع آن .

و [ثالثاً(*)] اگر S بلندتر از BC باشد ، BA را مساوی S قرارمی‌دهیم ، ودایره‌ای



(*) **حالت سوم** (رجوع شود به ذیل صفحه ۲۲۵) . فرض کنیم S>BC . طول AB را مساوی S جدا کرده قطوع را میسازیم . در هذلولی AD=KD ، و لهذا EZ=EM . پس

$$\overline{KE}^2 : \overline{EA}^2 = \overline{BD}^2 : \overline{BE}^2 .$$

در دایره

$$\overline{KE}^2 : \overline{EA}^2 = EC : EA .$$

پس بترتیب :

$$\overline{BE}^2 . EC = \overline{BD}^2 . EA ,$$
$$\overline{BE}^3 = \overline{BD}^2 . EA + \overline{BE}^2 . BC ,$$
$$\overline{BE}^3 + \overline{BD}^2 . BE = \overline{BD}^2 . AB + BC . \overline{BE}^2 ,$$
$$\overline{BE}^3 + b . BE = a + c . \overline{BE}^2 .$$

فهوالمطلوب .

بقطرAC می کشیم . قطع [زاید] مارّ برA ، چنانکه ثابت کردیم ، دایره را در K قطع میکند . سپس ، چنانکه در شکل سابق عمل کردیم ، از نقطه‌ی K عمودهای KE و KM را اخراج می کنیم . درین صورت ، EB ضلع مکعب [مطلوب] است ، و برهان این‌مطلب مانندآنست که گذشت : چون مستطیل مشترك ED را اسقاط کنیم ، اضلاع EM و EZ متکافی خواهند بود ، و مربعات آنها نیز چنین است . پس برهان این حالت ، بعینه و بدون هیچ تفاوتی ، مانند آنست که گذشت .

پس معلوم شد که این صنف حالات و انواع مختلف دارد ، و یکی ازانواع آن داخل در صنف سوم است ، و هیچیك از مسائل آن غیر ممکن نیست (✩) ، و بوسیله‌ی خواص دایره و قطع زاید حل شد .

[§۵۰۹۰۴-] **صنف سوم** ازاصناف سه گانه‌ی چهارتائی که مانده بود اینست که **مکعبی و عددی مساوی اضلاع ومالها باشد** (†) .

(✩) معادله‌ی $x^3-cx^2+bx-a=0$ همیشه یك ریشه‌ی حقیقی و مثبت دارد . درحالات دوم و سوم ($a/b \geqslant c$) ، دو ریشه‌ی دیگر موهومی‌اند . ولی در حالت اول ($a/b < c$) ممکن است هرسه ریشه حقیقی ومثبت باشند ، و متأسفانه این مطلب مهم از نظر خیام پنهان مانده است(رجوع شود به § ۴۰۳۰۴۰۵) .

(†) $x^3+a=cx^2+bx$

فرض کنیم $BC=c$ ، $\overline{BD}^2=b$ ، $S=a$. $\overline{BD}^2$. برحسب اینکه $S<BC$ یا $S=BC$ یا $S>BC$ سه حالت تشخیص میدهیم .

حالت اول : $S<BC$. طول AB را مساوی S جدا میکنیم ، و دو هذلولی متساوی القطرین میسازیم ، یکی (HAT) با مجانبهای BD و DZ و مار برA ، و دیگری (KCL) با رأس C و محور کانونی CE و ضلع قائم AC .

حکم : $x=BE$.

برهان . در هذلولی اول $DA=DM$ ، پس $DA-ZN+AM=DM-ZN+AM$ ، یا $NE=ZE$. بنابراین ،

$$\overline{ME}^2:\overline{EA}^2=\overline{DB}^2:\overline{BE}^2 .$$

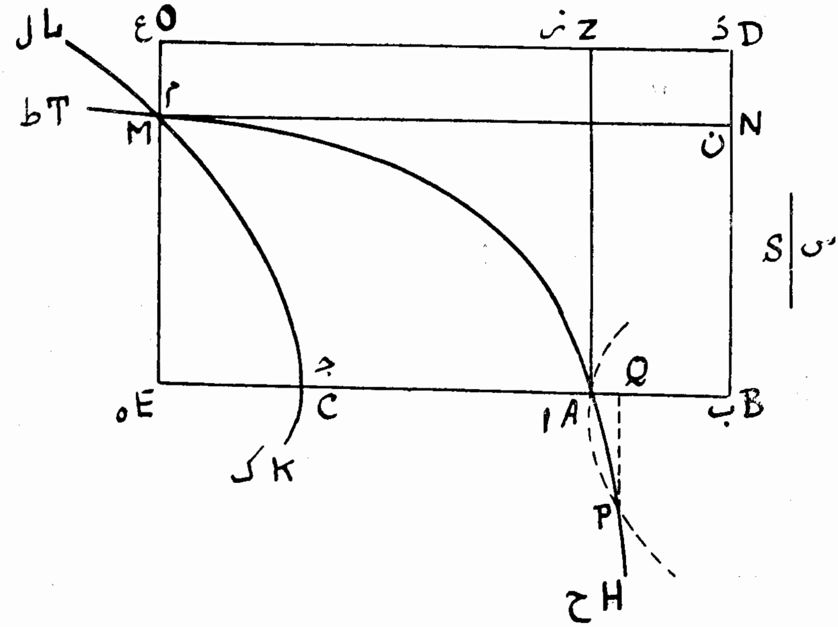
در هذلولی دوم $\overline{ME}^2:\overline{EA}^2=CE:EA$. پس بترتیب

$$\overline{BE}^2 . CE=\overline{BD}^2 . EA ,$$

بقیه در ذیل صفحه‌ی بعد

BC را عده‌ی اموال وBD را ، که بر آن عمود است ، ضلع مربعی مساوی عده‌ی جذرها میگیریم ؛ و مکعب مستطیلی می‌سازیم که قاعده‌اش مربع BD باشد ، و با عدد مفروض مساوی باشد ، و فرض می کنیم ارتفاع آن S باشد . پس خط S یا کوتاهتر از BC است ، یا مساوی آن ، و یا بزرگتر از آن .

اولا فرض می کنیم کوتاهتر از آن باشد ، و از BC [قطعه‌ی] BA را مساوی S جدا می کنیم و BZ را تمام میکنیم ، و بر نقطه‌ی A قطع زایدی می کشیم که BD



و DZ آنرا تلاقی نکنند ، و آن قطع HAT است . و قطع زاید دیگری می کشیم که

بقیه‌ی ذیل صفحه‌ی قبل

$$\overline{BE}^2 \cdot BC+\overline{BE}^2 \cdot CE\,(=\overline{BE}^3\,)=\overline{BE}^2 \cdot BC+\overline{BD}^2 \cdot EA\ ,$$
$$\overline{BE}^3+\overline{BD}^2 \cdot AB=\overline{BE}^2 \cdot BC+\overline{BD}^2 \cdot BE\ ,$$
$$\overline{BE}^3+a=c \cdot \overline{BE}^2+b\,.\,BE\,.$$

فهوالمطلوب .

معادلات قطوع مذکور $(x-c)\ (x-\frac{a}{b})=y^2$ و $xy=\sqrt{b}\,(x-\frac{a}{b})$ است .

برای سایر حالات به ذیل صفحات ۲۳۱ و ۲۳۲ رجوع شود .

رأسش نقطه‌ی C و سهمش بر استقامت BC باشد ، و هریك از اضلاع قائم و مایل آن مساوی AC باشد ، و آن KCL است ، و ناچار قطع دیگر را تلاقی می کند . فرض کنیم قطع KCL و قطع HAT در نقطه‌ی M تقاطع کنند . پس وضع نقطه‌ی M معلومست ـ زیرا وضع قطع‌ها معلوم می‌باشد ـ و چون ازین نقطه عمودهای MN و EMO را بکشیم ، وضع و مقدار این دو معلوم خواهد بود . پس سطح DA مساوی سطح DM است ، و چنانکه چندین بار ثابت کردیم ، NE مساوی ZE می‌باشد ، و بالنتیجه اضلاع آنها متکافی‌اند ، و همچنین است مربعات اضلاع آنها . اما ، باقتضای قطع KCL ، نسبت مربع ME به مربع EA مثل نسبت CE به EA است . پس نسبت مربع BD به مربع BE مثل نسبت CE به EA میباشد . بنابرین ، مکعب مستطیلی که قاعده‌اش مربع BD و ارتفاعش EA است مساویست با مکعب مستطیلی که قاعده‌اش مربع BE و ارتفاعش CE است . و چون مکعب مستطیلی را که قاعده‌اش مربع BE و ارتفاعش BC است ، و مساوی [جمله‌ی] عده‌ی مالهای مکعب BE است ، به آنها بیفزائیم ، مکعب BE مساوی [جمله‌ی] عده‌ی مفروض مالهای آن بعلاوه‌ی مکعب مستطیلی که قاعده‌اش مربع BD و ارتفاعش EA است خواهد بود . اینك مکعب مستطیلی را که ارتفاعش BA و قاعده‌اش مربع BD است ، و آنرا مساوی عدد مفروض ساختیم ، بهر دو اضافه می کنیم . نتیجه می شود که مکعب مستطیلی که قاعده اش مربع BD و ارتفاعش BE است ـ و مساوی [جمله‌ی] عده‌ی مفروض اضلاع مکعب BE می باشد ـ بعلاوه‌ی [جمله‌ی] عده‌ی مفروض مالهای مکعب BE مساویست با مکعب BE بعلاوه‌ی عدد مفروض [، فهوالمطلوب] .

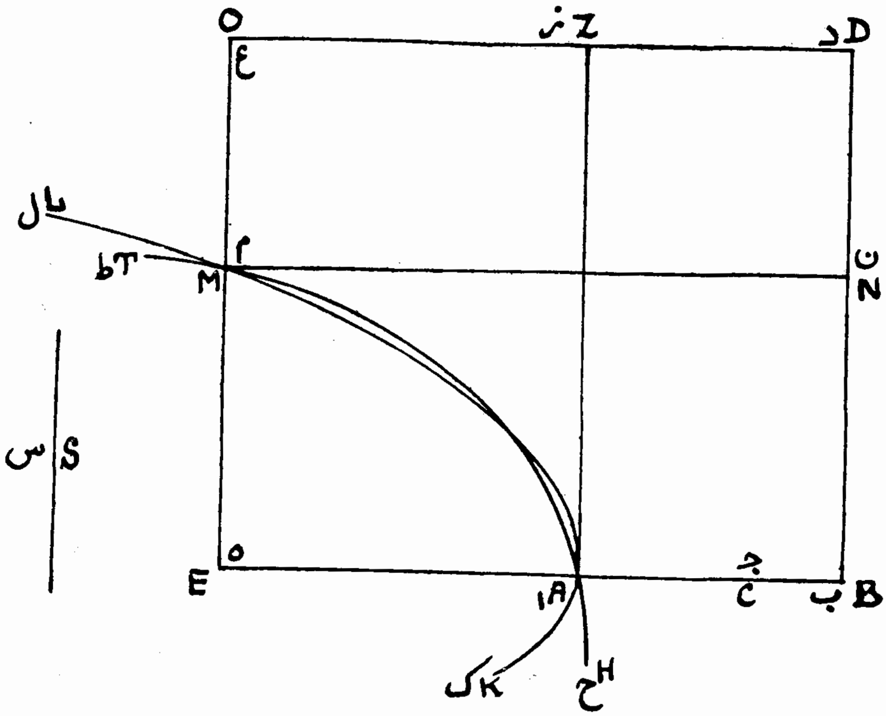
و [ثانیاً] اگر S مساوی BC باشد (☆) ، BC خودْ ضلع مکعب [مطلوب] است .

(☆) **حالت دوم** : $S = BC$ (رجوع شود به ذیل صفحه‌ی ۲۲۹) . گوئیم $x = BC$. زیرا از یك طرف $\overline{BC}^3 = BC \cdot \overline{BC}^2 = c \cdot \overline{BC}^2$ ، و از طرف دیگر $\overline{BD}^2 \cdot S = \overline{BD}^2 \cdot BC$ ، یا $a = b \cdot BC$. پس $BC^3 + a = c \cdot BC^2 + b \cdot BC$ ، و هوالمطلوب .

ضمناً $\overline{BC}^3 + b \cdot BC = c \cdot \overline{BC}^2 + a$ ، واین معادله تعلق‌به صنف‌دوم (§۵۰۹۰۳)دارد. باید دانست که دراین حالت $\overline{BD}^3 + a = c \cdot \overline{BD}^2 + b$ ، و لهذا BD نیز جواب معادله است ، ولی این جواب از نظر خیام پنهان مانده است .

برهانش آنکه مکعب BC مساوی [جمله‌ی] عده‌ی مفروض اموال آن است ، و عدد مفروض مساوی [جمله‌ی] عده‌ی مفروض اضلاع مکعب BC می‌باشد . پس مکعب BC با عدد مفروض مساویست با [جمله‌ی] عده‌ی مفروض مالهای آن با [جمله‌ی] عده‌ی مفروض اضلاع آن ، و مقصود همین بود . و [درین حالت] مکعب BC بعلاوه‌ی [جمله‌ی] عده‌ی مفروض اضلاع آن با [جمله‌ی] عده‌ی مفروض مالهای آن بعلاوه‌ی عدد مفروض نیز مساویست . پس این حالت داخل صنف دوم است .

و [**ثالثاً**] اگر S بلند تر از BC باشد (*) ، BA را مساوی S قرار می‌دهیم و مستطیل را تمام می‌کنیم ، و قطع اول را بر A و دومی را نیز بر A مرور می دهیم ، و



(*) **حالت سوم** : $S > BC$ (رجوع شود به ذیل صفحه‌ی ۲۲۹) . AB را مساوی S جدا کرده هذلولی HAT را مانند حالت اول وهذلولی KML را برأس A و محورکانونی AE وضلع قائم AC میسازیم ، و مانند همان حالت استدلال می‌کنیم .

این دو قطع تقاطع می کنند. پس اگر دگر بار تلاقی کنند ـ خواه در یك نقطه مماس شوند و یـا در دو نقطه تقاطع کنند، چنانکه ار مقالهٔ چهارم **کتاب مخروطات** معلوم است ـ مسئله ممکن است، و الا ممتنع می باشد. و اگر تقاطع کنند، چون از نقاط تقاطع دو عمود بکشیم، این دو عمود دو ضلع برای دو مکعب [که هر یك جواب معادلهٔ مورد بحث است] جدا می سازند. و برهان آن، بدون هیچ تفاوتی، مانند آنست که گذشت.

پس معلوم شد که این صنف حالات مختلف دارد، و بعضی از آنها ممتنع است (٭)، و بوسیلهٔ خواص دو قطع زاید حل شد.

[**۵۰۹۰۵ § تبصره ـ**] و معلوم شد که این سه صنف چهارتائی متداخل اند، یعنی اولی را حالتی است که عیناً از حالات صنف دوم است، و حالتی از دومی هست که حالتی از صنف سوم میباشد، وحالتی از سومی هست که بعینه حالتی از دومی است ـ چنانکه توضیح دادیم.

[۵۰۱۰ § معادلات کسری]

[**۵۰۱۰۰۱ § مقدمه ـ**] چون اصناف بیست و پنجگانه از مقدمات جبر و مقابله را به انجام رسانیدیم، و آنچه را گفتنی بود بتمامی گفتیم، و حالات هر صنف ازآنها را بدست آوردیم، و درمسائلِ اصنافی که امتناع درآنها پیش میآید، قانونی برای باز شناختن آنچه ممکن است از آنچه ممتنع است بدست دادیم، و معلوم

(٭) معادلهٔ مفروض بصورت $x^3 - cx^2 - bx + a = 0$ است. درحالت اول ($a \leqslant bc$) معادله همواره دو ریشهٔ مثبت دارد. بازاءِ $a < bc$، خیام فقط یکی از ریشهها را بدست میآورد (ریشهٔ دیگر از تقاطع هذلولی HAT با شاخهٔ دیگر هذلولی KCL بدست می آید). بازاء $a = bc$ ریشهٔ مثبت دیگـرمعادله $x = \sqrt{b}$ یا $x = BD$ است. در حالت سوم ($a > bc$)، خیام گوید دوقطع مماساند(ریشهٔ مضاعف $x = \frac{1}{3}c + \frac{1}{3}\sqrt{3b + c^2}$)، یا متقاطعند (دو ریشهٔ مثبت متفاوت)، ویایکدیگر را قطع نمیکنند (« امتناع »). باید دانست که درهرحال معادله یك ریشهٔ منفی دارد.

کردیم که اکثر آنها خالی از مسائل ممتنع است (✩) ، اینك به اجزای این اصناف می پردازیم .

[۰۲ ۵۰۱۰ § جزء ـ] جزء (†) شیء عددی است که نسبت آن به واحد مثل نسبت واحد باین شیء باشد . پس اگر آن چیز سه باشد جزئش یك سوم است ، و اگر آن چیز یك سوم باشد جزئش سه است ، و نیز اگرچهار باشد جزئش یك چهارم است ، و اگر یك چهارم باشد جزئش چهار است . و بطورکلی ، جزء هر عدد° جزئی است که از آن نام می گیرد (††) ، مانند یك سوم از سه (اگر عدد° صحیح باشد) و سه از یك سوم (اگر عدد° کسری باشد) . و نیز جزء مال جزئی است که از عدد مساوی این مال نام می گیرد ، خواه این عدد صحیح باشد یا کسری ، و همچنین است در مورد کعب . و برای اینکه این مطلب محسوس تر باشد این اجزاء را در جدولی قرار می‌دهیم :

جزء کعب		جزء مال		جزء جذر
$\frac{۱}{۸}$		$\frac{۱}{٤}$		$\frac{۱}{۲}$
واحد	جذر		مال	کعب
۱	۲		٤	۸

(✩) از ۲۵ صنف مذکور ، که در ۲۰۲ ٤۰۳۰٤ § (صـ ۱٤٥ - ۱٤٦) طبقه بندی شده ، فقط معادلات ۸ ، ۱۱ ، ۱٤ ، ۱۷ ، ۲۰ ، ۲۱ ، و ۲۵ ممکن است جواب حقیقی و مثبت نداشته باشند ، ودراین صورت ، بزعم خیام ، این معادلات ممتنع خواهند بود .

(†) آنچه خیام « جزء a » میخواند همان $1/a$ است که امروز « عکس a » نامیده میشود. « n جزء a » یعنی n/a .

کرخی در کتاب **فخری** (۳۰٤۰۵۰۷ §) درتعریف « جزء » باین معنی گوید : « جزء هر عدد چیزی است که چون درآن عدد ضرب شود واحد حاصل گردد ».

نیزباید دانست که دراصطلاح ریاضیون قدیم ، هرگاه مقداری بدفعات صحیح‌درمقداری دیگر بگنجد ، یا عدد صحیحی‌عدد صحیح دیگر را عاد کند ، مقداریا عددکوچکتر جزء دیگری خوانده میشود . (مثلا رجوع شود به **تحریر اقلیدس** ، صـ ۷۱ و ۹۹ . نیزبه هیث ، **سیزده مقاله**، جلد۲ ، صـ ۱۱۵ و ۲۸۰) .

(††) این تعبیر ازیونانیان گرفته شده است . مثلا رجوع شود به صفحه‌ی ۳ ازکتاب پول ور اکك ، مذکور درذیل صفحه‌ی ۸۲ ازکتاب حاضر.

[**۵۰۱۵۰۳§ مراتب هفتگانه ـ**] پس نسبت جزء کعب به جزء مال مثل نسبت جزء مال به جزء جذر و مثل نسبت جزء جذر به واحد و مثل نسبت واحد به جذر و مثل نسبت جذر به مال و مثل نسبت مال به کعب‌است . پس این مراتب هفت مرتبه‌اند متوالیاً بریك نسبت ☆ . و ما فقط در معادلات بین این مراتب صحبت خواهیم داشت . و اما جزء مال مال و جزءِ مال کعب و جزءِ کعب کعب و مراتب بعد ، تا هر جا پیش رود ، نیر متوالیاً متناسب اند ، ولی ما را حاجت بذکر آنها نیست ، زیرا راهی به استنباط [جواب معادلات مشتمل‌بر] آنها نداریم .

[**۵۰۱۵۰۴§ معادلات بین‌اجزاء ـ**] و بدانکه اگر یك هشتم را که جزءِ کعب است کعب انگاری ، جزء آن هشت خواهد بود که آن ، بالعکس ، همان کعب است † ، و سایر جزء ها را باید برهمین قیاس کنی . پس این چهار مرتبه ـ جزءِ کعب و جزء مال و جزء جذر و واحد ـ در حکم کعب و مال و جذر و واحد است .

مثلا اگر گفته شود که جزء مال معادل نصف جزء جذر است†† چنان باشد که گفته شود مالی معادل نصف جذر است ؛ پس مال یك چهارم است ، و آن جزء مال [مطلوب] است ، و بالنتیجه ، مال مطلوب چهار می‌باشد ، وجزءآن یك چهارم وجزء جذرش یك دوم است . و در مفردات باید بهمین قیاس عمل کرد .

و اما در معادلات مرکب . اگر گفته شود جزء مال ودوجزء جذر معادل یك و

(☆) مراتب هفتگانه‌ی مذکور عبارتند از

۱) $x^{۳}$ ۲) $x^{۲}$ ۳) x ٤) ۱ ۵) $۱/x$ ٦) $۱/x^{۲}$ ۷) $۱/x^{۳}$,

و این مراتب متناسبند :

$$\frac{۱}{x^{۳}} : \frac{۱}{x^{۲}} = \frac{۱}{x^{۲}} : \frac{۱}{x} = \frac{۱}{x} : ۱ = ۱ : x = x : x^{۲} = x^{۲} : x^{۳}.$$

(†) مقصود اینست که اگر $۱/x^{۳}$ را مثلا $z^{۳}$ بگیریم ، جزء $z^{۳}$ (یعنی $۱/z^{۳}$) همان $x^{۳}$ خواهد بود .

(††) یعنی $(۱/x)\frac{۱}{۲} = ۱/x^{۲}$.این معادله ، بازاء $z = ۱/x$ ، بصورت $z^{۲} = \frac{۱}{۲} z$ در می‌آید ، و ازاین نتیجه می‌شود $z^{۲} = ۱/٤$. پس $x^{۲} = ٤$ و $۱/x^{۲} = ۱/٤$ و $۱/x = ۱/۲$.

یك چهارم است (☆)، چنان باشد که گفته شود مالی و دو جذر معادل یك و یك چهارم است. پس بطریقی کـه ثابت کردیم، جذر را یك دوم و مال را یك چهارم بدست می‌آوریم، منتهی در مسئله جزء مال وجزء جذر گفته شده. پس یك چهارم که مال اول است جزء مال مطلوب می‌باشد. پس مال مطلوب چهار است.

و در معادلات چهارتائی نیز طریق عمل همین است. [مثلا] اگر گفته شود جزء کعب و سه جزء مال و پنج جزء جـذر معادل سه و سـه هشتم است (☆☆)، چنان باشد که گویند کعبی و سه مال و پنج جذر معادل سه و سه هشتم است. پس بطریقی که بوسیله‌ی قطوع مخروطی بیان کردیم ضلع مکعب را تعیین می کنیم، وآن جزء جذر مطلوب است. پس نسبت آنرا به واحدِ مفروض مساوی نسبت این‌واحد مفروض به خطی دیگر قرار می‌دهیم، و این خط همان ضلع مکعب مطلوب است.

پس معلوم شد که بیست و پنج صنف دیگر از اینگونه معادلات بین این چهار مرتبه هست که [هر یك] با [یکی از] بیست و پنج صنف سابق الذکر متناسب است (†).

[**۵۰۱۰۰۵ § تبصره ـ**] اما ضرب بعضی از این مراتب [هفتگانه] در برخی معلوم و از کتابهای علمای جبر آشکار است، و خواننده می‌تواند در آن بیندیشد، و ما سخن را به ذکر آن دراز نمی‌کنیم (††).

[**۵۰۱۰۰۶ § حل معادلات مراتب هفتگانه ـ**] و اما معادلات بین این چهار

(☆) $1/x^2 + 2/x = 1\frac{1}{4}$ معادله‌ی $z^2 + 2z = 1\frac{1}{4}$ را حل می‌کنیم: $z = 1/2$ و $z^2 = 1/4$. پس $x^2 = 4$.

(☆☆) $1/x^3 + 3/x^2 + 5/x = 3\frac{3}{8}$. معـادله ی $z^3 + 3z^2 + 5z = 3\frac{3}{8}$ را حل می کنیم. اگر ζ ریشه‌ای ازین معادله باشد، طول l که از $l : 1 = 1 : \zeta$ استخراج شود جواب معادله‌ی اولیه است.

(†) یعنی ۲۵ صنف حاصل از تبدیل x به $1/x$ در ۲۵ صنف سابق‌الذکر (§۴۰۳۰۴۰۲).

(††) این یادآوری مقدمه‌ایست‌برای‌حل‌معادلات هفتگانه، که درآنها حاجت به ضرب قوای مجهول در یکدیگر پیش می‌آید.

[مرتبه] و چهار [مرتبه‌ی] سابق الذکر چنانست که اینك به شرح آن می‌پردازیم .

[٥٠١٥٠٦٠١ § مفردات ـ مثال اول ـ] اگر گفته شود کعبی معادل ده جزء کعب است ـ یعنی معادل ده جزء خودش است ـ گوئیم کعب اولین مرتبه از مراتب هفتگانه (✩) است ، و اجزای کعب هفتمین آنها است . پس آنها را در یکدیگر ضرب کن ، و جذر حاصل ضرب را بگیر . آنچه بدست آید مرتبه‌ی وسطی (یعنی چهارم) است (✩✩) ، و همان کعب مطلوب می‌باشد (†) . و تفصیل مطلب اینکه هر عددی چون در جزء خود که از آن نام گرفته ضرب شود واحد حاصل شود ، و اگر در دو جزء خود ضرب شود دو حاصل گردد ، و اگر در ده جزء خود ضرب شود ده عدد بدست آید (††) . پس در مسئله‌ی مورد بحث چنانست که گفته شده باشد کدام کعب است که چون در مثل خودش ضرب شود ده حاصل گردد . پس جذر ده همان مکعب مطلوب است ، و سپس ، استخراج ضلع این مکعب بطریقی که بوسیله‌ی قطوع مخروطی بیان کردیم بعمل می‌آید .

[مثال دوم ـ] و نیز اگر گفته شود کدام مال است که معادل شانزده جزء از اجزای خود که از آن نام گرفته است باشد (×) ، واحد را در شانزده ضرب کن و جذر حاصل را بگیر ، و آن چهار است ، و همین چهار مالِ مطلوب می باشد . زیرا ، بقیاس آنچه گذشت ، [این مسئله] در حکم اینست که گفته شود کدام مال است که چون در مثل خودش ضرب شود شانزده حاصل گردد .

[مثال سوم ـ] و نیز اگر گفته شود کدام جذر است که معادل چهار جزئش باشد (××) ، چنانست که گفته شود کدام عدداست که چون درمثل‌خود ضرب شودچهار

(✩) رجوع شود به ذیل ٥٠١٥٠٣ §

(✩✩) مرتبه‌ی وسطی ، یا مرتبه‌ی چهارم ، عدد است .

(†) معادله‌ی مورد بحث $x^3 = 10/x^3$ است . استدلال خیام ، که بلافاصله بعد توضیح میدهد اینست که $10 = (10/x^3)\,x^3$ ، $x^3 \cdot x^3$ ، وبالنتیجه $x^3 = \sqrt{10}$.

(††) یعنی بطور کلی $a = x^n \cdot (a/x^n)$.

(×) $x^2 = 16/x^2$ (××) $x = 4/x$

حاصل گردد، و آن دو است.

[**مثال چهارم ـ حالات لاینحلّ ـ**]. اما اگر گفته شود کدام مال است که معادل عده‌ای از اجزای مکعب ضلعش باشد[☆]، حل آن به طرقی که بیان کردیم ممکن نشود، چو حل این مسئله محتاج به درج چهار خط است بین دو خط که هر شش خط متوالیاً بر یك نسبت باشند[☆☆]، چنانکه ابوعلی ابن هیثم[†] رحمه الله تعالی ثابت کرده است، منتهی این مطلب سخت دشوار است، و نمیشود آنرا به این کتابمان ملحق کنیم.

وهمچنین است اگر گفته شود کدام مکعب است که معادل عده‌ای ازجزءهای مال ضلعش باشد[††]، این نیز محتاج مقدمه‌ی مذکور است، ولهذا حل‌آن بوسیله‌ی راههای ما ممکن نیست.

و بطورکلی، هرگاه مراتب اول و ششم از این هفت مرتبه در یکدیگر ضرب شود[×]، چنانکه ابوعلی ابن هیثم رحمه الله تعالی ثابت کرده است، احتیاج پیدا می‌شود به درج چهارخط بین دو خط بطوری که هر شش متوالیاً بر یك نسبت باشند.

[**مثال پنجم ـ**] اما اگر گفته شود کدام مکعب معادل شانزده جزء ضلع آنست[××]، مرتبه‌ی اول را در [مخرج] مرتبه‌ی پنجم ضرب می کنیم. جذرِ جذرِ

(☆) $x^۲ = a/x^۳$. حل این معادله به معادله‌ی درجه‌ی پنجم $x^۵ = a$ برمی گردد.

(☆☆) اگر x و y و v و w چنان تعیین شود که

$$۱ : x = x : y = y : v = v : w = w : a ,$$

بآسانی معلوم توان کرد که $x^۲ = a/x^۳$.

(†) §۳۰۴۵۰۶ (††) $x^۳ = a/x^۲$

(×) یعنی هرگاه عمل به ضرب «مراتب اول وششم» (رجوع شود به ذیل §۵۰۱۵۰۳) منجر شود؛ واین درست نیست، زیرا مرتبه ی اول $x^۳$ ومرتبه‌ی ششم $۱/x^۲$ است. ظاهراً مقصود خیام از عبارت مذکور اینست که عمل منجر شود به ضرب مرتبه‌ای در مخرج مرتبه ای که، در مراتب هفتگانه (ذیل §۵۰۱۵۰۳)، نسبت به اولی‌ششمین است، واین شامل ضرب $x^۳$ درمخرج $۱/x^۲$ (درمعادله‌ی $x^۳ = a/x^۲$) وضرب $x^۲$ در مخرج $۱/x^۳$ (در معادله‌ی $x^۲ = a/x^۳$) می‌شود. مثال پنجم مذکور در متن شاهد صحت این توجیه است.

(××) $x^۳ = ۱۶/x$. حل: $x . x^۳ = (۱۶/x) . x$ یا $x^۴ = ۱۶$ یا $x = \sqrt{\sqrt{۱۶}}$.

حاصل همان ضلع مکعب مطلوب است . و در معادله‌ی هریك از این مراتب هفتگانه با مرتبه‌ای که از آن ، در تناسب متوالی ، پنجمین است به همین قیاس عمل می‌شود .

[**۵۰۱۵۰۶۰۲ § معادلات مرکب ـ مثال اول**] اما در مرکبات ، مثلاً جذری معادل واحد و دو جزء جذر است ☆ . و آن درحکم اینست که مالی معادل جذر و دو باشد ، زیرا این سه [مرتبه‌ی اخیر] با سه مرتبه‌ی مذکور متناسبند . پس آنرا [یعنی معادله‌ی اخیر را] بطریق مذکور حل می کنیم . مال مساوی چهار درمی‌آید ، و آن معادل جذر خود با دو عدد است . پس جذرِ این [مال] همان مطلوب است ، و جذر این مال دو است ، و معادل واحد و دو جزءِ جذر این مال می‌باشد .

[**مثال دوم ـ**] و نیز اگر گفته شود مالی و دو جذرآن معادل واحد و دو جزء جذر است ، درحکم اینست که کعب و دو مال معادل جذر و دو باشد . پس ضلع مکعب را چنانکه بیان کردیم بوسیله‌ی قطوع مخروطی استخراج می کنیم . و مربع این ضلع همان مال مطلوب است .

[**مثال سوم ـ**] و نیز اگر گفته شود که جذر و دو عدد و ده جزء جذر معادل بیست جزء مال است ، درحکم اینست که کعب و دو مال و ده جذر معادل بیست عدد باشد . پس ضلع مکعب را از راه مخروطات استخراج می کنیم ؛ و آن همان جذر مطلوب است .

[**۵۰۱۵۰۶۰۳ § ملاحظات کلی در حل معادلات بین مراتب هفتگانه ـ**]
وبطورکلی [معادلات بین] چهار مرتبه‌ی متوالی ازاین مراتب هفتگانه در حکم اصناف بیست و پنجگانه‌ی مذکور است .

واما اگرمعادله‌ای پنج یا شش یا هفت مرتبه را فراگیرد † ، حل‌آن بهیچوجه

(☆) معادله‌ی $x = 1 + 2/x$ معادل $x^2 = x + 2$ است ، زیرا :

$$x : x^2 = 1 : x = (2/x) : 2 .$$

(†) لازم نیست که هر ۵ یا ۶ یا ۷ مرتبه در معادله موجود باشد . مثلاً، در مثال مذکور در متن ، معادله‌ی مسئله $x^2 + 2x = 2 + 2/x^2$ است ، که پنج مرتبه (از x^2 تا $2/x^2$) را فرا گرفته‌است ، و به معادله‌ی‌درجه‌ی چهارم $x^4 + 2x^3 = 2x^2 + 2$ بر میگردد ، که بقول خیام نمی توان آنرا حل کرد . دراین باب به § ۳۰۷۰۳ رجوع کنید .

ممکن نیست . مثال آن اینست که گفته شود مالی و دو جذر معادل دو عدد و دو جزءِ مال است ؛ و این مسئله را نمی‌توان حل کرد ، زیرا مال از مرتبه‌ی دوم و جزءِ مال از مرتبه‌ی ششم است ، و معادله پنج مرتبه را فرا می گیرد . و سایر حالات را بر همین قیاس کن .

[**۵۰۱۰۰۷§ طبقه بندی معادلات کسری**(٭) **قابل‌حل**] پس جمیع اصناف معادلات مفرد بین این هفت مرتبه بیست و یك است ، که دو صنف از آنها را نمی‌توان به راه ما (٭٭) حل کرد ، بلکه در حل آنها حاجت به مقدمه‌ی ابن هیثم می‌افتد . پس نوزده صنف باقی می ماند که بطریق ما - بعضی به خواص دایره و برخی به خواص قطوع مخروطی - قابل حل است .

جملگی معادلات مرکب از سه مرتبه ی متوالی پانزده است ، و به خواص دایره حل می‌شود .

کلیه‌ی معادلات مرکب از سه مرتبه که چهار مرتبه‌ی متوالی را فرا گیرد بیست وچهار است ، و بخواص قطوع حل می‌شود .

جملگی معادلات مرکّب از چهار مرتبه از مراتب متوالی بیست و هشت است ، و به خواصّ قطوع حلّ می‌شود .

پس کلیه‌ی اصناف معادلات واقع بین این هفت مرتبه که حل آنها به راههائی که بیان کردیم ممکن است هشتاد و شش می‌باشد ، که از آنها فقط شش صنف (†) در کتابهای پیشینیان ذکر شده است . و هر کس در مقدمات مذکور در این رساله بدقت

(٭) مقصود معادلات بین هفت‌مرتبه است. « قابل حل » بمعنی اصطلاحی خیام استعمال‌شده، یعنی بمعنی قابل حل بوسیله‌ی دایره یا سایر قطوع مخروطی . ولی‌تشخیص‌خیام دراین باره خطااست زیرا پیش از او بعضی معادلات درجه‌ی چهارم بوسیله‌ی قطوع مخروطی حل شده است . رجوع شود به ۵۰۱۵۰۶۰۳§ و ۳۰۷۰۳§ .

(٭٭) یعنی بوسیله‌ی دایره و با سایر قطوع مخروطی .

(†) $a = x$ و $a = x^2$ و $bx = x^2$ و سه معادله‌ی صحیح درجه‌ی دوم .

اندیشیده باشد ، و بعلاوه از استعداد طبیعی برخوردار و نیز در مسائل [ریاضی] کار آزموده باشد ، هیچ چیز در مسائلی که برپیشینیان سخت دشوار بود بروی پوشیده نماند .

و اینك وقت آنست که خدای تعالی را حمد گوئیم و جمیع پیغمبران وی را درود فرستیم و این رساله را ختم کنیم .

[٥٠١١ § نقد کارهای ابوالجود]

[٥٠١١٠١ § ملاحظات کلی درباب کارهای ابوالجود در حل معادلات درجه‌ی سوم و مقایسه‌ی آنها با کار های مؤلف این رساله -] در حدود پنج سال پس از تألیف این رساله ، شخصی که اطلاعی بس اندك از هندسه داشت برای من نقل کرد که ابوالجود محمد ابن لیث عالم هندسه را ، رحمة‌الله علیه، رساله‌ایست که درآن این اصناف را برشمرده و اکثرآنها را بوسیله‌ی قطوع مخروطی حل کرده ، بی اینکه حالات این اصناف و تمیزحالات ممکن از ممتنع را بتمامی آورده باشد ، بلکه برطبق نتایجی که ازمطالعه در مسائل خاص مربوط بااین اصناف بآنها رسیده است . و این دور نیست ، زیرا آن دوصنفی که گفتم از یکی از پیشینیان ماست منسوب بدوست ؛ و شخص مذکور آنها را در مجموعه‌ی تصنیفات ابولجود به خط حازمی خوارزمی دیده بود .

و یکی از این دو صنف از معادلات سه‌تائی است ، وآن اینست که مکعب و عدد معادل اموال باشد ، و این معادله را حالاتی وحالات آنرا شرایطی است ، چنانکه در این رساله مذکور شد . و اما ابوالجود شرایط آنرا بتمامی نیاورده ، و بعلاوه حُکمی که در این صنف کرده نیز باطل است ، و آن حکم اینست که اگر ضلع مکعبی که مساوی عدد است بزرگتر از نصف عده‌ی مالها باشد مسئله ممتنع است - و چنانکه توضیح دادیم چنین نیست - و این سخن باطل ناشی از این است که وی امکان تماس دو قطع یا تقاطع آنها را در این حالت آخر در نیافته است .

و دومی از معادلات چهارتائی است ، وآن اینست که مکعب و عدد و اضلاع معادل مالها باشد ، و شك نیست که وی این مسئله را ، که جماعتی از علمای هندسه پس از کوشش بسیار از حلش عاجز شده بودند ، نیکو حل کرد . اما مسئله‌ای که او حل کرد مسئله‌ی خاصی بود ، و این صنف را حالات و شرایطی است ، و بعضی از مسائل آن ممتنع می‌باشد ، و وی حق این مطالب را بتمامی ادا نکرده است .

و من این سخن را فقط برای این گفتم که کسی که هر دو رساله بدستش می رسد ـ اگر آنچه در باب این مرد فاضل بمن گفته شده راست باشد ـ بتواند رساله‌ی حاضر را بارساله‌ی منسوب باین فاضل مقایسه کند . چو گمان می کنم که من از هیچ کوششی برای اینکه مطالب مورد بحث را بتمامی بیاورم فرو گذار نکرده‌ام ، و در عین حال کوشیده‌ام که به عهد خود وفا کنم ، ولی از اطناب ملال انگیز احتراز جویم . و اگر می‌خواستم ، برای هریك از این اصناف و حالات آنها مثالی‌می‌آوردم. لکن ترسیدم که مطلب به درازا کشد ، و باین جهت ، سخن را به همین قوانین کلی کوتاه نمودم ، و در این امر به فهم متعلّم اعتماد کردم ، زیرا هر کس قوه‌ی دراکداش چنان‌باشد که مطالب این رساله در آن نقش بندد ، درحل مسائل مخصوصی که بخواهد ، و از بر گردانیدن مسئله به صنفی که این مسئله حالت خاص آنست ، در نمی ماند . و خداست که اسباب کامیابی را راست و درست گرداند ، و در هرحال اعتماد بر اوست .

[۵۰۱۱۰۳ § توضیح خطای ابو الجود ـ] و بعد ، یکی از دوستان ما از ما خواست که خطای ابوالجود محمد ابن لیث را در صنف پنجم از اصناف ششگانه‌ی سه تائی که بوسیله‌ی قطوع حل می شود ثابت کنیم ، و آن صنف اینست که مکعبی وعدد معادل مالها باشد ✩.

(✩) مقصود معادله‌ی $x^3+a=cx^2$ است . فرض کنیم $AB=c$ و $a=\overline{BC}^3$. چنانکه در۵۰۷۰٦§ ثابت شد ، شرط «امکان» معادله اینست که $BC<AB$ ($\sqrt[3]{a}<c$) ، و دراین صورت برحسب عظمت نسبی BC و $AB/2$ سه حالت اتفاق می‌افتد :

بقیه در ذیل صفحه‌ی بعد

ابوالجود گفته است که عده‌ی مالها را [مساوی] خط AB می گیریم ، و از آن ضلع مکعبی را که مساوی عدد است جدا می کنیم ، و آن BC است . پس خط BC

بقیه‌ی ذیل صفحه‌ی قبل

(I) BC = CA, (II) BC > CA , (III) BC < CA ;

یا بصورت جبری :

$\sqrt[3]{a} = c/۲$, $\sqrt[3]{a} > c/۲$, $\sqrt[3]{a} < c/۲$.

ابوالجود مربع BCDE را تمام کرده ، هذلولی متساوی القطرینی با مجانبهای AB و BE و مار بر D ، و سهمی برأس A و محور AB و ضلع قائم BC رسم میکند (اشکال صفحات ۲۴۴ و ۲۴۶ متن) [معادلات دو منحنی $xy = a^{۲/۳}$ و $(c-x)$ $y^۲ = a^{۱/۳}$ است] . آنگاه ، بقول خیام ، ابوالجود گوید :

(الف) در حالت (I) دو قطع در D بر یکدیگر مماس‌اند؛

(ب) درحالت (II) دو قطع نامتلاقی‌اند .

و مقصود از « خطای ابوالجود » ، که خیام در آغاز ۵۰۱۱۰۲ § از آن نام میبرد ، همین دوحکم است .

توضیح مطلب از این قرار است :

حالت (I) : BC = CA (شکل صفحه‌ی ۲۴۴ متن) . سهمی از D میگذرد (رجوع شود به ۵۰۷۰۶ §) ، ولی ، بشرحی که خیام توضیح‌میدهد ، دومنحنی دراین نقطه برهم مماس نیستند .

حالت(II) : BC > CA (شکل صفحه‌ی ۲۴۶ متن) . دراین حالت ، خیام ، برای اثبات خطای ابولجود ، مثالی می‌آورد ، ازاین قرار :

فرض کنیم ۱۵ = AB = c و ۶ = ZB = x . بموجب معادله ،

$$a = cx^۲ - x^۳ = x^۲(c-x) = \overline{ZB}^۲ . ZA = ۱۴۴ = \overline{BC}^۳ , \qquad (۱)$$

و لهذا BC > ۵ (زیرا ۱۴۴ < ۱۲۵ = ۵^۳) ، و بالنتیجه BC > CA . پس مثال مذکور داخل درحالت (II) است .

سپس خیام باثبات متقاطع بودن دو قطع می‌پردازد :

از (۱) نتیجه میشود :

$$\overline{ZB}^۲ : \overline{BC}^۲ = BC : ZA . \qquad (۲)$$

از طرف دیگر ، اگر H محل تلاقی عمود ZH با **هذلولی** باشد ، بموجب خاصیت عمومی هذلولی ، سطوح دو مستطیل HB و CE متساوی است ؛ پس

$$ZB : BC = BC : ZH , \qquad (۳)$$

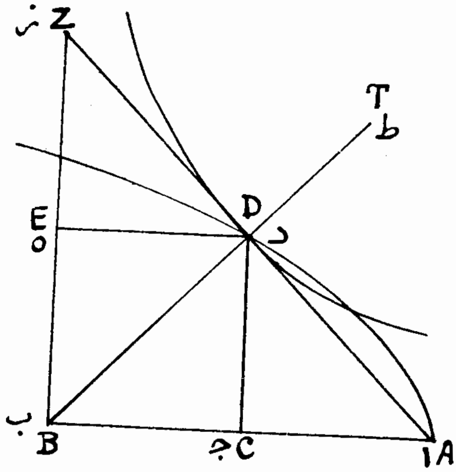
و لهذا

$$\overline{ZB}^۲ : \overline{BC}^۲ = ZB : ZH . \qquad (۴)$$

از (۲) و (۴) نتیجه میشود ، ZB : ZH = BC : ZA ، وبه تبدیل ، = BZ : BC

بقیه در ذیل صفحه‌ی بعد

یا مساوی CA است ، یا از آن بزرگتر است ، و یا از آن کوچکتر است . سپس گوید که اگر CA مساوی BC باشد ، مستطیل CE را تمام می‌کنیم و بر D قطع زایدی مرور می‌دهیم که AB و BE آنرا قطع نکنند ، و قطع مکافیی می‌کشیم که رأسش



نقطه‌ی A و سهمش AB وضلع قائمش BC باشد . پس ، چنانکه ثابت کردیم ، این‌قطع ناچار از نقطه‌ی D می‌گذرد . سپس گفته است که دو قطع در نقطه‌ی D بر یکدیگر مماس‌اند ، و این خطا است ، زیرا دو منحنی ناچارمتقاطع‌اند .

برهان آن اینست . BZ را مساوی BA می‌گیریم ، و AZ را وصل‌می کنیم . پس AZ ناچار از D می‌گذرد ، و در داخل قطع مکافی است (✡) ، و زاویه‌ی ADB قائمه

بقیه‌ی ذیل صفحه‌ی قبل

ZH : ZA . پس با توجه به (۳) ،

$$ZB : BC = BC : ZH = ZH : ZA , \qquad (۵)$$

و ازآنجا

$$ZH^2 = BC \cdot ZA . \qquad (۶)$$

بموجب (۶) ، نقطه‌ی H بر **سهمی** واقعست ، و لهذا ، برخلاف حکم ابوالجود ، دو قطع متلاقی اند .

نیز رجوع کنید به ذیل صص ۲۴۶-۲۴۸ .

(✡) مقصود قسمت AD ازآنست .

است ، و زاویه‌ی ABD مساوی زاویـه‌ی ZBD می‌باشد . و معلوم است که سهم قطع زاید زاویه‌ی محیطی قطع (✩) را نصف می‌کند . پس لازمست که خط BDT سهم قطع زاید مارّ بر D باشد . اما خط AD موازی خطوط ترتیب [قطع زاید] است ، ولهذا بر قطع زاید مماس است . پس لازم است که [قطـع] مکافی [قطـع] زایـد را قطع کند ، چون بین قطع زاید و خط مماس آن نتواند بود . زیرا اگر [قطع مکافی] بـر این خط مماس باشد ، خطوط مرسوم از D به هرنقطه‌ی دلخواهی که بر محیط [قطع مـکافی] AD فرض شود بین قطع [مـکافی] و خط مماس آن واقـع می‌شود ، و ایـن ممتنع است . پس ناچار قطع مکافی قطع زاید را در نقطه‌ی دیـگری بین A و D قطع می کند ، و این همانست که می خواستیم ثابت کنیم . چنین است و جه خطای این دانشمند درآنجا که گفت دو قطع لازمست در D بر یـکدیـگر مماس باشند .

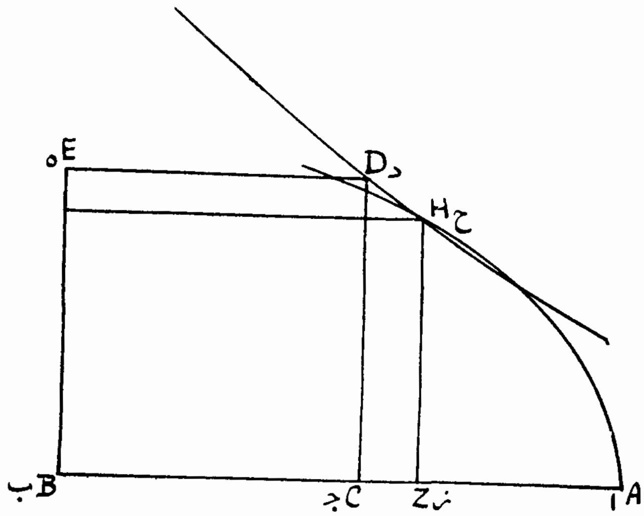
اما این گفته‌ی او : « اگر BC بلند تر از CA باشد مسئله ممتنع است ، و این از آنست که دو قطع یـکدیـگر را تلاقی نمی کنند» سخنی است باطل ، زیرا ممـکن است دو قطع به حال تقاطع یا تماس ، در یك نقطه یا دو نقطه‌ی بین A و D ، تلاقـی کنند ، چنانـکه در آنجا ثابت کردیم . و این مطلب را برهانی است کلی تر از آنچه ذکر کردیم (†) :

فرض کنیم عده‌ی مالها AB و ضلع مـکعب BC و بزرگتر از نصف AB باشد ؛ و CE را تمام می کنیم ، و دو قطع را چنانـکه دانستی میـکشیم . و فرض میـکنیم AB ده و ZB شش باشد . پس حاصل ضرب مربع ZB در ZA صد و چهل و چهار است ، و آن عدد است ، و ضلع آن [یعنی ضلع مـکعب مساوی آن] BC است ، و BC ناچار بزرگتر از پنج است ، زیـرا مـکعب پنج صد و بیست و پنج می‌باشد . اما مـکعب مستطیلی که قاعده‌اش مربع ZB و ارتفاعش ZA است مساوی مـکعب BC است . پس قاعده‌های آنها با ارتفاعاتشان متکافی‌اند ، یعنی‌نسبت مربع ZB به مربع BC مثل‌نسبت

(✩) مقصود زاویه‌ی دو مجانب است .

(†) رجوع شود به ذیل صفحه‌ی ۲٤۳ .

BC به ZA است . حال از Z عمودی می‌کشیم تا قطع زاید را در نقطه‌ی H قطع کند ، و مستطیل HB را تمام میکنیم . پس مستطیل HB مساوی CE است ، و لهذا ، اضلاع



آنها متکافی‌اند ، یعنی‌نسبت ZB به BC مثل نسبت BC به ZH است . بالنتیجه ، نسبت مربع ZB به مربع BC مثل نسبت ZB به ZH است . ولی این نسبت مثل نسبت BC به ZA بود . پس نسبت ZB به ZH مساوی نسبت BC بـه ZA است ، و بـه تبدیل نیز چنین‌است [یعنی نسبت ZB به BC مثل نسبت ZH به ZA است] . پس ، خطوط ZB و BC و ZH و ZA متوالیاً بریك نسبت اند . و لهذا ، مربع ZH مثل حاصل ضرب BC در ZA است . اما BC ضلع قائم قطع مکافیی است که سهمش AB و رأسش A است . پس ZH از خطوط ترتیب [این قطع] می‌باشد . بنابر این ، نقطه‌ی H ناچار بر محیط قطع مکافی است ، و چون بر محیط قطع زاید نیز بود ، دو قطع متلاقـی اند . پس خطای ابوالجود درین گفته که دو قطع تلاقی نمی کنند آشکار شد ، و هوالمطلوب .

و برای اینـکه مطلب آشکارتر شود (✡) AB را مساوی هشتاد می گیریم و BC را

(✡) مقصود خیام از بقیه‌ی ۵۰۱۱۰۲ § (و در واقع ۱۰۱۱۰۲ §) ، که بقول خودش آنرا برای مزید توضیح آورده ، معلوم نیست . ظاهراً پس ازفارغ شدن ازاثبات خطای ابوالجود و توضیح

بقیه در ذیل صفحه‌ی بعد

که ضلع مکعب مساوی عدد است چهل و یك ، و آن بلندتر از AC است . پس نقطه‌ی D خارج قطع مکافی واقع می‌شود . فرض کنیم مکافی از L بگذرد . درین صورت خط

بقیه‌ی ذیل صفحه‌ی قبل

اینکه در حالت (II) (رجوع شود به ذیل صفحه‌ی ۲۴۳) ممکن است معادله دارای جواب باشد ، یعنی قطوع حلال معادله متقاطع باشند ، میخواهد توضیح دهد که ممکن هم هست که درحالت (II) قطوع حلال تلاقی نکنند . برای این منظور معادله‌ی

$$x^{۳} + ۴۱^{۳} = ۸۵\, x^{۲}$$

را اختیار کرده ، ولی این معادله دو جواب مثبت دارد (تقریباً $x_1 = ۴۳٫۴$ و $x_2 = ۶۲٫۲$) ، که نظایر طولهای نقاط تقاطع دو قطع شکل صفحه‌ی ۲۴۸ متن است ابتدا از B) ؛ و استنتاج خیام نا درست است . شاید منظور وی توضیح این مطلب بوده که شکل و استدلال درمواضع خاص ممکن است گمراه کننده باشد ، وقطعها را غیرمتلاقی بنماید ، وشخص را به خطا بیندازد . ولی این توجیه بسیار مستبعد است ، زیرا در کلام خیام هیچگونه اشاره‌ای باین منظور و بـه اینکه معادله جواب دارد نیست (دراین باب به ذیل صفحه‌ی ۲۴۹ نیز رجوع شود) .

اینك توضیح استدلال وی .

فرض کنیم :

$$BC = a^{1/۳} = ۴۱ \,, \qquad AB = c = ۸۵ \,,$$

چون $CA = AB - BC = ۳۹$ ، شرط $BC > CA$ برقراراست. حال مربع CE راتمام کرده قطعها را میکشیم (شکل صفحه‌ی ۲۴۸ متن) . از

$$\overline{CD}^{۲} = CB \,.\, CB > CB \,.\, CA$$

معلوم میشود که D در خارج سهمی است . اگر L محل تلاقی سهمی و CD باشد ، $\overline{LC}^{۲} = BC \cdot CA = ۱۵۹۹$ ، ولهذا

$$LC = \sqrt{۱۵۹۹} = ۴۰ - \varepsilon \qquad (\varepsilon < ۱/۸۵).$$

اینك فرض کنیم $TC = BC = ۴۱$ و $HB = BT$ و $AK = \frac{CA}{۴} = ۹\frac{۳}{۴}$. عمود KM را میکشیم تا TH و سهمی و هذلولی را بترتیب در Z و M و N قطع کند . خط TH بر هذلولی مماس است ، و اولا $\overline{LC}^{۲} : MK^{۲} = CA : AK = ۴$ ؛ پس

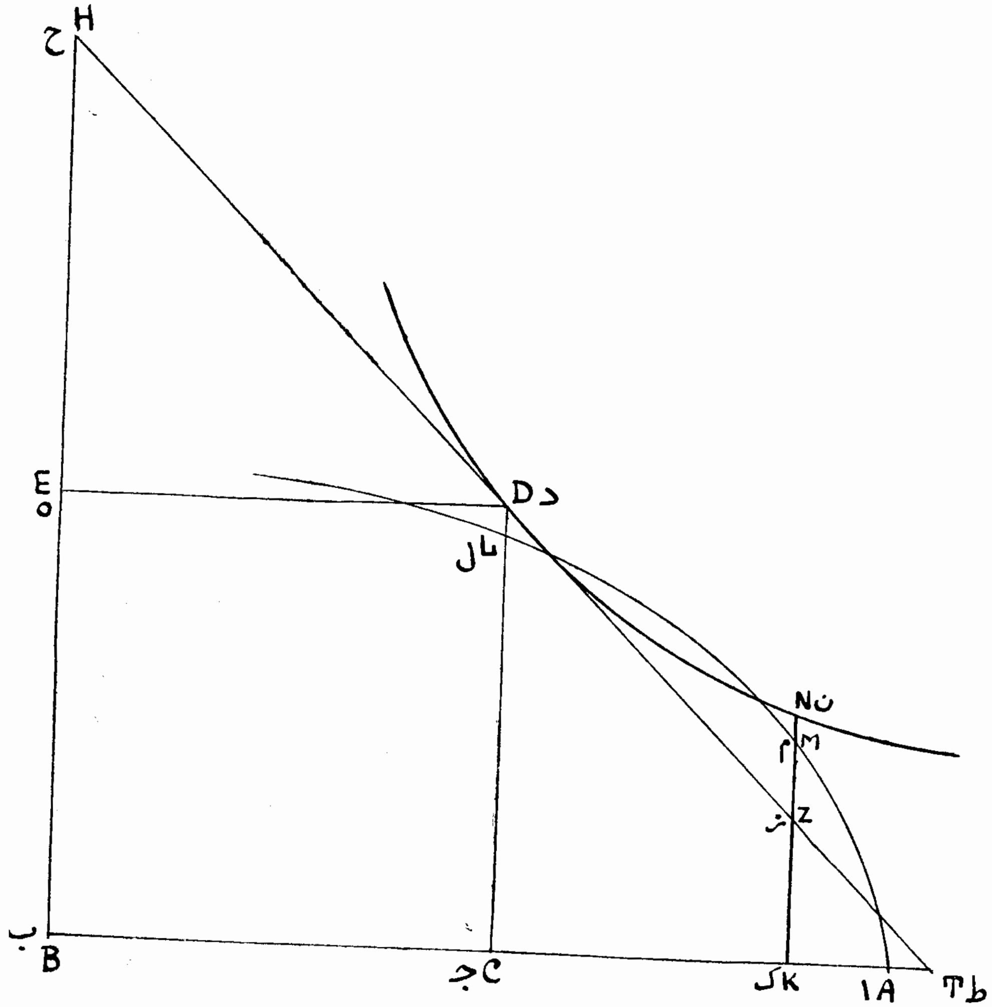
$$MK = \frac{۱}{۲} LC = ۲۰ - \frac{\varepsilon}{۲} .$$

ثانیاً $KZ : KT = HB : BT$ ؛ پس

$$KZ = KT = KA + AT = ۱۱\frac{۳}{۴} \,,$$

بقیه در ذیل صفحه‌ی بعد

LC مساوی جذر هزار و پانصد و نود و نه می‌شود ، و آن اندکی از چهل کمتر است .



بقیه‌ی ذیل صفحه‌ی قبل

$$ZM = MK - KZ = ۸\frac{۱}{٤} - \frac{٤}{۲} > ۸ .$$

ثالثاً $KN = \overline{BC}^{۲} : BK = \overline{BC}^{۲} : (AB - AK) = ۲۳,۹۳$,

(خیام‌از KN صحبتی نمیکند) . پس $KN > KM$ ، ولهذا دراین‌موضع‌دوقطع خارج یکدیگرند .

علت‌انتخاب مقدار $۹\frac{۳}{٤}$ برای AK معلوم نیست ، واگرخیام مقداری بین $۸۵ - x_۱$ و $۸۵ - x_۲$ برای AK اختیار کرده بود ، هریك از دو قطع را داخل دیگری میبافت .

حال TC را مساوی CB و BH را مساوی BT جدا می کنیم ، و TH را وصل میکنیم . چنانکه ثابت کردیم ، TH بر قطع زاید مماس است . و AK را مساوی ربع AC جدا میکنیم ، و از آن عمودی می کشیم تا قطع [مکافی] را در نقطه‌ی M قطع کند . نسبت مربع LC به مربع KM مثل نسبت AC به AK خواهد بود ، زیرا دوخط اول ازخطوط ترتیب مکافی است ــ و این مطلب را آپولّونیوس در شکل نوزدهم مقالــه‌ی اول ثابت کرده است . پس KM نصف LC خواهد بود ، و آن اند کی از بیست کمتر است . اما CT چهل ویك است ، و AK نُه وسه چهارم ، و AT دو ؛ پس خط KZ یازده و سه ربع است ، زیرا نسبت KZ به KT مثل نسبت HB به BT است ، ودوخط اخیرمتساوی‌اند. بالنتیجه ، خط ZM بزرگترازهشت است ، (*) {ودر داخل خط مماس قطع زایداست ، ودر این وضع ناچار درداخل قطع زاید است . آری گاهی‌درحالتی که BC بزرگتر از CA است دوقطع غیر متلاقی‌اند ، ولی این‌امر در جمیع انواع [معادلاتی که تحت این حالت است] ضرورت ندارد .

(*) رجوع شود به ذیل صص۲۴۶ــ۲۴۷ .

عبارت داخل { } را ما بعنوان ترجمه‌ی عبارت ذیل از متن آورده‌ایم (رجـوع شود به سطور ۵ ــ ۸ صفحه‌ی ۵۶) :

« و هو فی داخل‌الخط المماس للزائد فهو فی هذا الوضع یکـون فی داخل القطع الزائد »
« لامحاله نعم قد یکـون القطعان غیر متلاقیین اذا کان **ب ح** اعظم من **جا** لکن‌ذلك غیر واجب »
« فی جمیع‌الانواع فقد ابطل ابوالجود فی هذا الحکم . »

ویکه در **جبر عمر خیام** (صص ۸۷ ــ ۸۸) این عبـارت را چنیـن ترجمه و نقطه گذاری کرده است :

« ... و آن ابتدا از خط مماس هذلولی محسوب شده است ؛ و آن در این وضع نـاچار در آنطرف هذلولی است ؛ بطوری که انسان ناچار است تصدیق کند که وقتی BC بزرگتر از CA است دو قطع تلاقی‌نمیکنند . ولی این امر درجمیع حالات ضرورت ندارد ، و ابوالجو در این حکم به خطا رفته است » .

بنظر ما این ترجمه (و سخن دیگران که از ویکه تقلید کرده‌اند) بـا عبارت خیام (یا بعبارت اصح ، منسوب به خیام) موافق نیست ، و ترجمه‌ی عبارت وی احتمالا همان است که ما در متن آورده‌ایم . استدلال خیام اینست که چون اولا $ZM > ۸$ و ثانیاً ZM در داخل (= بالای) خط مماس‌است ، ناچاردرداخل(= زیر) هذلولی‌است ، وبنابراین ، نقطه‌ی M در زیرهذلولی‌است.

پس حکم مذکور ابوالجود باطل است} . این مطلب را بدان . و اگر بخواهی ، مثالهای عددی توانی آورد .

[**۵۰۱۱۰۲۰۱ § تبصره -**] و این مسئله [از جنبه‌ی هندسی] همان [مسئله‌ی] اضافه کردن مکعب مستطیلی است بر خط مفروض که از مکعب مستطیلی مضاف بر تمام خط بقدر مکعبی ناقص باشد ، و مساوی مکعب مستطیل [مفروض] دیگر باشد(✲) . پس اگر ضلع مکعب مساوی مکعب‌مستطیل مفروض مساوی نصف خط یا کمتر از آن باشد مسئله لزوماً ممکن است ، اما اگر ضلع مذکور بزرگتر از نصف این خط باشد ، برطبق آنچه ثابت کردیم ، ممکن است مسئله حالات ممتنع داشته باشد .

و خداست که می‌تواند حل این مشکلات را به لطف و کرم خود آسان سازد .

رساله در ظهر روز یکشنبه‌ی بیست و سوم

ماه ربیع‌الاول سنه‌ی [illegible] (†) تمام شد ، و حمد . . .

(✲) اگر c خط مفروض و a حجم مکعب مستطیل مفروض باشد ، مکعب مستطیل $x^{2}(c-x)$ ، که مضاف بر c است ، از مکعب مستطیل cx^{2} (مضاف بر **تمام** c) بقدر مکعب x^{3} ناقص است . حال باید x را چنان تعیین کرد که

$$(c-x)\,x^{2} = a . \qquad (1)$$

نظیر این مسئله در هندسه‌ی مسطحه مسئله‌ی اضافه کردن مستطیلی است بر خط مفروض که همسطح مستطیل مفروض باشد ، و نقصانش نسبت به مستطیل مضاف بر تمام خط مربع باشد (رجوع شود به ۳۰۲۰۳۰۱ § ، صص ۸۵ – ۸۷) .

معادله‌ی مسئله‌ی اخیر بصورت $cx - x^{2} = a$ است ، که بازاء $a > (c/2)^{2}$ یا $\sqrt{a} > c/2$ ممتنع است . شاید ابوالجود ، به خطا ، این شرط را بصورت $a^{1/3} > c/2$ در مورد معادله‌ی (۱) تعمیم داده است (رجوع کنید به ذیل صفحه‌ی ۲۴۳) .

(†) درباب این تاریخ به ملحقات کتاب حاضر رجوع کنید .

قسمت ششم

رساله در تحلیل یک مسئله

به معادله‌ی درجه‌ی سوم و حل آن بوسیله‌ی قطوع مخروطی

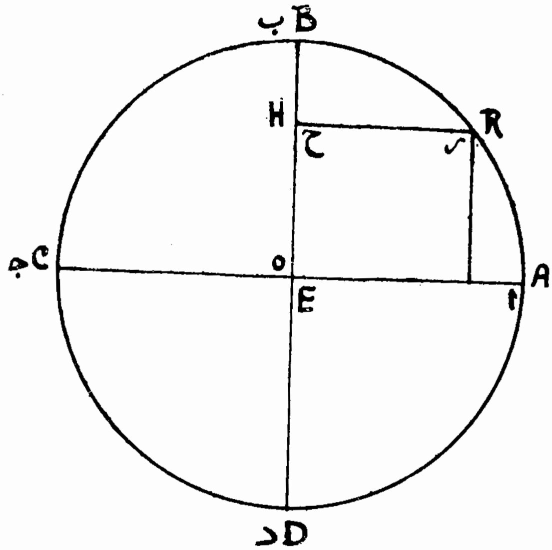
از

عمر خیام

قسمت ششم*

این رساله‌ای است از ابو الفتح عمر ابن ابراهیم خیامی

[**§۶۰۱ طرح مسئله-**] می‌خواهیم ربع دایره‌ی AB از دایره‌ای ABCD را در نقطه‌ای مانند R به دو قسمت تقسیم کنیم که اگر عمود RH را بر قطر BD فرود آوریم، نسبت AE به RH مثل نسبت EH به HB باشد. و E مرکز دایره و AE نصف قطر آنست.

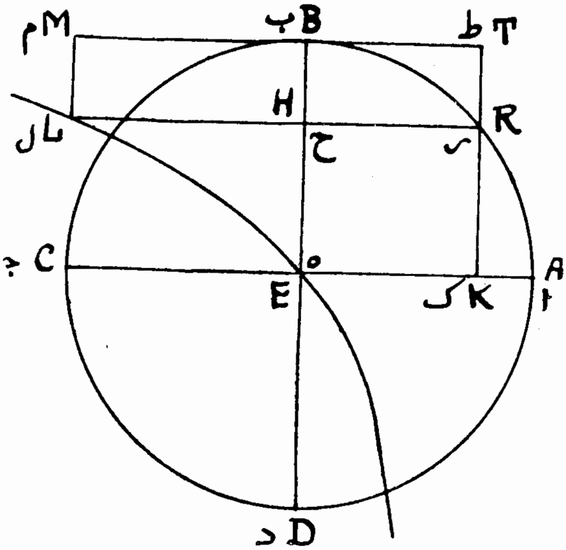


فرض می کنیم تقسیم مطلوب را بعمل آورده‌یم [، و مسئله را بتدریج تحلیل میکنیم ،] تا تحلیل به امر معلومی منجر شود. سپس ترکیب مینمائیم تا بمطلوب برسیم†.

(*) رجوع شود به §۴۰۴ (صص ۱۵۱ - ۱۵۵) .

(†) رجوع شود به ۴۰۴۰۲§ (صص ۱۵۳ - ۱۵٤) .

پس دایره‌ی ABCD را دگرباره میکشیم† ، ومرکزآن E است ، و AC و BD را چنان اخراج می‌کنیم که یکدیگر را بزاویه‌ی قائمه قطع کنند ، و عمود RH را چنان اخراج می‌کنیم که نسبت AE به آن مثل نسبت EH به HB باشد ، و دو عمود KRT و TBM را اخراج می‌کنیم ، و خط BM را مساوی AE جدا کرده مستطیل TL را تمام می‌کنیم . پس ، چون نسبت AE به RH مثل نسبت EH به HB است ، و BM مساوی AE است ، چنانکه اقلیدس در شکل شانزدهم مقاله‌ی ششم اصول ثابت



کرده ، حاصل ضرب BM در HB مساوی حاصل ضرب RH در EH است . ولی حاصل ضرب BM در HB مساوی سطح مستطیل BL است ، وحاصل‌ضرب RH در EH مساوی سطح مستطیل HK است . پس سطح BL مساوی سطح HK می‌باشد ، و چون سطح

(†) فرض کنیم مسئله حل شده باشد ، و $AE : RH = EH : HB$ (۱) ، و $BM = AE$. بالنتیجه $BM \times HB = RH \times EH$ ، یا $BL = HK$ ؛ و پس از افزودن HT به طرفین ، $TE = TL$. پس نقاط E و L بر هذلولی (متساوی القطرینی) با مجانبهای TK و TM واقعند . و خلاصه‌ی بحث دراز و بیفایده‌ی خیام اینست که معلومات کافی برای رسم این هذلولی در دست نیست .

HT را به هر دو بیفزائیم سطح TE مساوی سطح TL خواهد بود . پس اگر ، چنانکه آپولّونیوس درشکل پنجاه و نهم مقاله‌ی اول کتاب مخروطات و شکلهای ششم و پنجم از مقاله‌ی دوم این کتاب ثابت کرده است ، قطع زایدی بسازیم که خطوط KT و TM آنرا قطع نکنند و بر E بگذرد - چو این عمل بوسیله‌ی آن سه شکل انجام پذیر است - بنا بر عکس شکل هشتم از مقاله‌ی دوم کتاب مخروطات ، این قطع زاید ناچار برنقطه‌ی L می گذرد. اما وضع نقطه‌ی E معلوم‌است ، و خط BM ازحیث وضع و مقدار معلوم می‌باشد ، ولی وضع نقطه‌ی L در مرحله‌ی ترکیب غیر معلوم است ، زیرا اگر وضع این نقطه معلوم بودی وضع نقطه‌ی H نیز معلوم بودی - چو مقدار خط HL معلوم است - پس BH معلوم بودی ، و شکل معلوم بودی ، و همچنین وضع خط TK غیرمعلوم است ، چو اگر وضع آن معلوم بودی وضع نقطه‌ی T معلوم بودی، واگر وضع نقطه‌ی T معلوم بودی مقدار خط TB معلوم بودی ، و اگر مقدار خط TB معلوم بودی شکل معلوم بودی ، ونه چنین‌است ، زیرا مقصود معلوم کردن شکل است. پس [- خلاصه‌ی کلام اینکه -] اگر وضع نقطه‌ی L معلوم بودی یا وضع خط TK معلوم بودی ، اتمام شکل و رسیدن به مطلوب بوسیله‌ی ترکیب به‌آسانی ممکن شدی ، و دانستن هیچیك ازین دو آسان نیست ، فمحب✲ {هذه الطریقة للباحث المستبصر بکتاب المخروطات لایوصل الی المطلوب بطریقة اخری امکنه التفطن لهذه الطریقة} † و من این طریقه را ، بااینکه دشوار است ، بعنوان تمهید گونه‌ای جهت متعلم و برای آماده ساختن وی آوردم ، و چون بپایان رسانیدن آن دشوار و سخت محتاج مقدمات چندی از قطوع مخروطی است ، به اتمام آن و ترکیبش به طریق هندسی نمی‌پردازم ، تا کسانی از دانندگان قطوع مخروطی که بخواهند ، پس از فراگرفتن طریقی که ذکر خواهم کرد ، به اتمام‌آن بپردازند ، زیرا اگرچه طریقی که گفته خواهد شد نیز محتاج مقدماتی از قطوع مخروطی است ، از بسیاری

(✲) در اصل چنین بنظر می‌آید ، و خوانده نشد .

(†) ترکیب قطعی این‌عبارت بر مترجم و بر دوستانی که با آنان مشورت کردمعلوم‌نشد.

جهات از طریق اول آسانتر است ، و مقدمات آن فواید بیشتری دارد .

[۶۰۲§ تحلیل مسئله به مثلث مُعین ☆]

پس بیاری خدا گویم . شکل را دگرباره می کشیم ، و در طریق تحلیل ، فرض می کنیم تقسیم مطلوب انجام یافته و نسبت AE به RH مثل نسبت EH به HB باشد ، و بنابر آنچه اقلیدس در شکل شانزدهم مقالهی سوم [اصول] ثابت کرده است † ، از

(☆) خیام مسئلهی مورد بحث را به رسم مثلث قائم الزاویهای که ما آنرا مثلث معین خواندهایم باز میگرداند ، بدین طریق :

فرض کنیم مسئله حل شده باشد ، و

$$(۱) \qquad AE : RH = EH : HB .$$

مماس RT را میکشیم . ازطرفی $EH : HR = HR : HT$ ، ولهذا $\overline{HR}^2 = EH \cdot HT$؛ و از طرف دیگر $\overline{HR}^2 = DH \cdot HB$. پس $HD : EH = HT : HB$ ، و به تفضیل نسبت ،

$$ED : EH = BT : HB ,$$

پس بموجب (۱) و با رعایت $ED = AE$ ،

$$RH : HB = BT : HB ,$$

و لهذا $RH = BT$. اما $RE = EB$. پس $RH + ER = BT + EB$ ، و یا

$$(۲) \qquad RH + ER = ET .$$

پس حل مسئله برمیگردد به رسم مثلث قائم الزاویهی ERT (مثلث معین) که در (۲) صدق کند .

ضمناً رابطهی (۱) را میتوان بصورت

$$(۳) \qquad ER : RH = EH : (ER - EH)$$

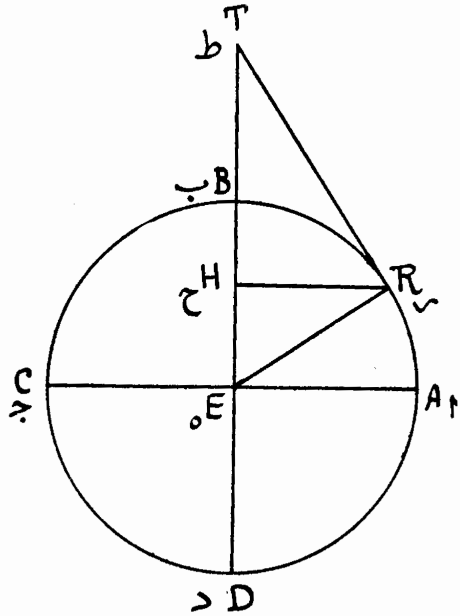
نوشت ، که فقط مربوط به اجزای مثلث ERT است ، و بدین صورت ، عکس حکم مذکور نیزصحیح است ، وبعبارت دیگر ، **شرط لازم و کافی برای اینکه درمثلث قائم الزاویهی ERT رابطهی (۳) برقرار باشد آنست که (۲) برقرار باشد .**

زیرا در مثلث قائم الزاویهی ERT همواره $ER : ET = EH : ER$ ، و بـه تفضیل $ER : (ET - ER) = EH : (ER - EH)$. حال اگر (۳) مفروض باشد نتیجه میشود $RH = ET - ER$ ؛ و بالعکس اگر (۲) مفروض باشد بالبداهه (۳) نیز برقرار است .

(†) شکل ۱۶ مقالهی سوم **تحریراقلیدس** مربوط به رسم مماس بردایره است ازنقطهای واقع در خارج آن . رسم مماس بردایره از نقطهای واقع بر محیط آن از شکل ۱۵ همان مقاله استنباط میشود .

ضمناً باید دانست که ترتیب این قضایا در **تحریراقلیدس** باترتیب آنها درکتاب **سیزده مقاله** (از هیث) متفاوت است . برای نکتهی مذکور به اول صفحهی ۴۴ ازجلد دوم کتاب هیث رجوع شود.

نقطه‌ی R خط RT را بر دایره مماس می کنیم ، و EB را امتداد می‌دهیم تا خط مماس را درنقطه‌ی T قطع کند ، و RE را وصل میکنیم . پس چون زاویه‌ی R از مثلث



ERT قائمه است ، و از رأس زاویه‌ی R عمود RH بر قاعده اخراج شده ، بنا برآنچه در شکل هشتم مقالـه‌ی ششم [اصول] ثابت شده است ، نسبت EH به HR مثل نسبت HR به HT است . پس مربع HR مساوی حاصل ضرب EH در HT می‌باشد . اما مربع HR مساوی حاصل ضرب DH در HB است . بالنتیجه ، حاصل‌ضرب DH در HB برابر است با حاصل ضرب EH در HT ، ولهذا – بموجب آنچه در شکل شانزدهم ازمقاله‌ی ششم [اصول] ثابت شده – نسبت HD بهEH مثل نسبت HT به HB می‌باشد ، وبتفضیل نسبت ، نسبت ED به EH مثل نسبت BT به BH است . ولی نسبت AE به RH مثل نسبت EH به HB [فرض شده] بود ؛ پس ، به دو تبدیل ، نسبت AE به EH برابر نسبت RH به HB است . اما نسبت DE به EH مثل نسبت BT به BH بود . پس نسبت RH به HB برابر نسبت BT به HB می‌باشد . ولی ، بموجب شکل نهم از مقاله‌ی پنجم

[اصول] ، مقادیری کـه نسبت آنها به یك شیء متساوی باشند خود نیز متساویاند . پس RH مساوی BT است . ولی RE مساوی EB است . بنابراین ، مجموع ER و RH مساوی خط ET می‌باشد . پس تحلیل منجر شد به **مثلث قائم الزاویه‌ای مشروط باینکه وتر زاویه‌ی قائمه مساوی مجموع یکی از دو ضلع محیط باین زاویه با عمود خارج از رأس آن بر وتر باشد .**

پس هر گاه مثلث قائم الزاویه‌ای با این وصف بسازیم ، خواهیم توانست این شکل را بطریق هندسی ترکیب کنیم . و این مقدمه ، یعنی مثلثی دارای خاصیت مذکور ، فایده‌ی بسیار در امثال این مسئله دارد ، و آنرا خواص دیگری است که بعضی از آنها را یاد میکنیم تا کسی که این رساله را مطالعه می کند فایده‌ی آن را در اکثر مسائل شبیه این مسئله دریابد .

[۶۰۳ § خواص مثلث معین و معادله‌ی حل آن]

[۶۰۳۰۱ §] گوییم که **این مثلث ممکن نیست متساوی الساقین باشد** ✡ .

زیرا اگرضلع ER مساوی RT باشد ، EH مساوی HT می‌شود ، و عمود [RH] مساوی هر یك از آنها می گردد ، و ET دو برابر عمود RH می‌شود ، و مجموع ER و عمود [RH] بزرگتر از وتر می گردد ، و حال آنکه آنرا مساوی وتر فرض کرده بودیم ، و این خلاف فرض است .

(✡) بفرض

$$RH+ER=ET \qquad (۱)$$

گوئیم $ER \neq RT$. اثبات به برهان خلف است . اگر $ER=RT$ ، نتیجه میشود $EH=HT=RH$ ، و لهذا

$$ET=EH+HT=۲RH \qquad (۲)$$

اما $ER>RH$ ، پس $RH+ER>۲RH$ ، و یا بموجب (۲) ، $RH+ER>ET$ ، و این با (۱) متناقض است .

[۶۰۳۰۲ §] و گویم **ER کوتاهتر از RT است** ☆ .

چو اگر ER بلندتر از آن باشد ، EH بلندتر از HT خواهد بود ، و HR که خط واسطه‌ی [هندسی] بین EH و HT است بلندتر از HT خواهدبود. اما HR مساوی TB فرض شده بود . پس TB بزرگتر از TH است ، [یعنی] جزء بزرگتر از کل است ، و این محال است .

پس ثابت شد که در مثلثی دارای چنین خاصیت ، مجموع ضلع کوتاهتر و عمود [وارد از رأس زاویه‌ی قائمه بر وتر] مساوی بلندترین ضلع مثلث است ، و این همانست که می‌خواستیم ثابت کنیم .

[۶۰۳۰۳ §] و از خواص چنین مثلثی اینست که **از دو ضلع محیط به زاویه‌ی قائمه آنکه بلند تر است مساویست با حاصل جمع ضلع کوتاهتر و قطعه‌ای که عمود [وارد از رأس زاویه‌ی قائمه بر وتر] در طرف ضلع کوتاهتر از وتر جدا می کند** † .

(☆) فرض : $ER+RH=ET$ (۱) . حکم : $ER<RT$.
اثبات به برهان خلف است . چون ثابت شد که $ER \neq RT$ ، کافی است ثابت کنیم که $ER>RT$ (۲) ممتنع است . پس (۲) را مفروض می‌گیریم ، نتیجه می‌شود $EH>HT$ ، و لهذا $\overline{HR}^2 = EH \times HT > \overline{HT}^2$. ؛ پس $HR>HT$ (۳) . ازطرف دیگر ، اگر EB را مساوی ER جدا کنیم ، از (۱) حاصل میشود $RH=BT$. پس بموجب(۳) ، $TB>TH$ ، واین ممتنع است . خیام در متن نقطه‌ی B را تعریف نکرده است .

(†) استدلال خیام خالی از تسامح نیست . توضیح آنکه موضوع قضیه مثلث قائم الزاویه‌ای مانند ERT است دارای خاصیت

$$RH+ER=ET, \qquad (۱)$$

و میخواهیم ثابت کنیم که

$$RT=ER+EH . \qquad (\text{الف})$$

برهان . بمرکز E و شعاع ER دایره‌ای میکشیم تا شکل صفحه‌ی ۲۵۶ پدیدآید . خیام گوید :

$$ED : EH = TB : BH , \qquad (۲)$$

ولی دلیل این حکم را نمیگوید ، بلکه ظاهراً حکم عکسی را که در ذیل صفحه‌ی ۲۵۵ آوردیم

بقیه درذیل صفحه‌ی بعد

ازشکل سابق مثال می‌آوریم . گوئیم مجموع ER و EH مساوی ضلع RT است . دلیلش اینست که نسبت ED به EH مثل نسبت TB به BH است . پس ، به ترکیب ، نسبت DH به HE مثل نسبت TH به HB است ؛ و به تبدیل ، نسبت DH به HT برابر نسبت EH به HB می‌باشد . و لکن نسبت EH به HB مثل نسبت ER به RH است ، و- بعلت تشابه دومثلث ERH و RHT - نسبت RE به RH مثل نسبت RT به HT می‌باشد. پس نسبت RT به HT برابر نسبت DH است بـه HT . بالنتیجه ، RT مساوی HD است . ولی HD مساوی مجموع ER و RH است . پس مجموع ER و RH مساوی RT می‌باشد ، و این همانست که می‌خواستیم ثابت کنیم .

[**۶۰۳۰۴ § معادله‌ی حل مثلث معین**(☆)] و پس از ذکر این مقدمات ، مثلث

بقیه‌ی ذیل صفحه‌ی قبل

مسلم گرفته است . بموجب آن حکم

$$ER : RH = EH : (ER - EH). \qquad (۳)$$

اما بموجب (۱) و شکل ، $ER = ED$ و $RH = ET - ER = ET - EB = TB$ و $ER - EH = EB - EH = HB$ ، و بدین ترتیب . (۳) بصورت (۲) در میآید . بقیه‌ی استدلال آسان است . از (۲) به ترکیب نسبت نتیجه میشود $DH : EH = TH : BH$ ، یا $DH : TH = EH : HB$. اما بموجب (۳) ، $ER : RH = EH : HB$. بعلاوه ، بسبب تشابه دومثلث ERH و RHT ، $RE : RH = RT : HT$. پس .

$$RT : HT = RE : RH = EH : HB = DH : TH .$$

بالنتیجه $RT = DH$. اما $DH = DE + EH = ER + EH$ ، و هوالمطلوب .

(☆) بشرحی که ملاحظه خواهد شد ، خیام معادله‌ای برای تعیین مثلث معین تشکیل میدهد .

اگر $AD = a$ و $BD = x$ فرض شود ، بنابفرض $AB + x = AC$ ، و یا

$$\sqrt{a^۲ + x^۲} + x = a + x^۲/a .$$

یا

$$x^۳ + ۲a^۲ x = ۲ax^۲ + ۲a^۳$$

که بازاء $a = ۱۰$ همان معادله‌ی خیام است :

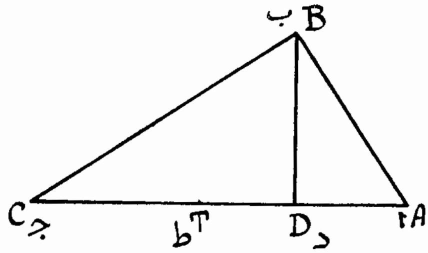
$$x^۳ + ۲۰۰x = ۲۰x^۲ + ۲۰۰۰ .$$

طریق خیام برای بدست آوردن معادله اینست .

فرض کنیم $AD = ۱۰$ و $BD = x$. اولا $\overline{AB}^۲ = ۱۰۰ + BD^۲$. ثانیاً بعلت تشابه دو مثلث ABC و ABD ، $AC : AB = AB : AD$ ؛ پس $AC . AD = \overline{AB}^۲$ ، و بالنتیجه

بقیه درذیل صفحه‌ی بعد

ABC را که زاویه‌ی B از آن قائمه است می‌کشیم ، و از نقطه‌ی B عمود BD را بر AC فرود می‌آوریم وفرض می‌کنیم مجموع ضلع AB وعمود BD مساوی AC باشد ، تا



تحلیل منجر به معلومی شود . سپس ترکیب می‌کنیم تا مثلثی با خاصیت مذکور حاصل گردد .

و چون ریاضی دانان فاضل پیشین ، در امثال این مسائل ، برای آسان کردن راههای حسی ، اصطلاحات جبریها را بکار برده‌اند ، ما نیز به آنان اقتداء می‌کنیم ، و راهی‌که ایشان رفته اند می‌رویم ، ولی استعمال اصطلاحات جبریها ضروری نیست ، و عمل یکسان است ، منتهی اگر این اصطلاحات بکار برده شود ضرب وتقسیم آسانتر خواهد بود .

بقیه‌ی ذیل‌صفحه‌ی قبل

$AC = ۱۰ + \frac{۱}{۱۰}\overline{BD}^{۲}$ ؛ و چون بفرض $AC = AB + BD$ ، خواهیم داشت $AB = ۱۰ + \frac{۱}{۱۰}BD^{۲} - BD$ ، و

$$\overline{AB}^{۲} = ۱۰۰ + ۳\overline{BD}^{۲} + \frac{۱}{۱۰}\cdot\frac{۱}{۱۰}\overline{BD}^{٤} - ۲۰\,BD - \frac{۱}{۵}\overline{BD}^{۳}$$

و این مقدار معادل $۱۰۰ + \overline{BD}^{۲}$ می‌باشد ؛ و پس از اختصار

$$۲\overline{BD}^{۲} + \frac{۱}{۱۰}\cdot\frac{۱}{۱۰}\overline{BD}^{٤} = ۲۰BD + \frac{۱}{۵}\overline{BD}^{۳}$$

یا

$$\frac{۱}{۱۰}\cdot\frac{۱}{۱۰}\overline{BD}^{۳} + ۲\,BD = \frac{۱}{۵}\overline{BD}^{۱} + ۲۰$$

یا بالاخره

$$BD^{۳} + ۲۰۰\,BD = ۲۰\,\overline{BD}^{۲} + ۲۰۰۰$$

$$(x^{۳} + ۲۰۰x = ۲۰x^{۲} + ۲۰۰۰)\,.$$

پس خط AD را با طولی منطق، مثلا ده، می گیریم، و BD را شیء فرض می کنیم، و آنرا در مثل خـودش ضرب می کنیم تا مال حاصل شود، و ده را در مساوی خودش ضرب می کنیم تا صد حـاصل شود، و این دو را جمع می کنیم، صد و مال حـاصل می شود، و آن ـ چنـانکه در شکل چهل و هفتم مقاله‌ی اول [اصول] ثابت شده ـ مربـع AB است. و چون ـ بعلت تشابـه دو مثلث ABC و ABD ـ نسبت AC به AB مثل نسبت AB به AD است، حاصل ضرب AC در AD [نیز] مساوی مربع AB است. پس اگرمربع AB را که [مساوی] صد بعلاوه‌ی مال است بر AD که ده است تقسیم کنیم، خارج قسمت مساوی ده عدد و یك دهم مال خواهد بود، وآن AC است. ولی فرض کرده بودیم که AC مساوی مجموع AB و BD است. پس مجموع AB و BD [مساوی] ده عدد و یك دهم مال می‌باشد. ازآن BD را که شیء است کم می کنیم، باقی می‌ماند ده عدد و یك دهم مال منهای شیء، و آن AB است. چون آنرا درمثل خودش ضرب کنیم حاصل می‌شود صدد عدد و سه مال و یك دهم یك دهم مال مال منهای بیست شیء ومنهای یك پنجم مکعب، که معادل‌صدد عدد و مال است. پس جبر می کنیم و مقابله می کنیم و اسقاط می کنیم، نتیجه می‌شود که دو مال و یك دهم یك دهم مال مال معادل بیست شیء و یك پنجم مکعب است. سپس همه را به شیء تقسیم می کنیم تابه کمترین چهار جنسی ☆ که بر همین نسبت‌اند باز گردد. پس از تقسیم چنین حاصل می‌شود که یك دهم یك‌دهم مکعب و دو شیء معادل یك پنجم مال و بیست عدد است. سپس یك دهم یك دهم را بوسیله‌ی ضرب کردن‌آن در صد کامل می کنیم، وهم‌چنین تمام مراتب را در صد ضرب میکنیم، نتیجه می‌شود که **مکعب ودویست شیء معادل بیست مال ودو هزار عدداست.**

پس، تحلیل منجر شد به معادله‌ی چهار جنس، و این را، بدان سبب که

(☆) معادله‌ای که بدست آمده $\frac{1}{5}x^3 + 20x = \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}x^4 + 2x^2$ است. خیـام بوسیله‌ی تناسب مراتب عدد و شیء و مال و کعب وغیره (مثلا رجوع شود به ذیل††، § ۵۰۱۰۳، صفحه‌ی۱۶۲)معادله رابمعادله‌ی درجه‌ی سوم $\frac{1}{5}x^2 + 20 = \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}x^3 + 2x$ برمی گرداند.

مکعب درآن جای دارد ، نمی‌توان بوسیله‌ی هندسه‌ی مسطحه حل کرد ، و در حلش احتیاج به قطوع مخروطی‌است .

[۶۰۴ § کلیاتی درباب معادلات]

[۶۰۴۰۱ § مقدمه ـ] و پیش از اینکه در آشکار ساختن مطلوب بوسیله‌ی قطوع مخروطی سخن گوئیم ، نکته‌ای می‌آوریم که مطالعه کنندگان این رساله را بطلب دانش و استوار ساختن مطالبی که ایشان را بر آنها می‌آگاهانیم تحریص کند ؛ ونعمتهائی را که خدای تعالی به بعضی بندگان خود اعطا فرموده شکرانی باشد، زیرا بزبان آوردن نعمتها شکر گذاری بزرگی نسبت به نعمت دهنده است ـ چنانکه در قرآن می‌فرماید و **اما بنعمة ربك فحدث** . پس‌خواننده‌ی این رساله گمان نبرد که سخن را برای خودستائی باین مرحله کشانیدیم ، چو این ازعادات درماندگان گزاف گوی خود بین است ، و خودبینی دون همتان را سزد ، زیرا روان آنانرا جز برای درك اندکی از علوم گنجایش نباشد ، و چون آنرا دریابند چنین پندارند که همه‌ی علوم همین و به همین محصور است ، و پناه به خدا میبریم از اینکه نفس ما آرائی را در نظر ما خوب جلوه دهد که ما را گمراه کنند، واز رسیدن بحقایق و نیل به مقصد و رستگاری باز دارند .

[۶۰۴۰۲ § مراتب مجهول ـ] گویم آن چیزی را که جبریها مال مال می‌خوانند در مقادیر متصل[✪] امری موهوم است ، و بههیچوجه وجود خارجی ندارد ، و اطلاق الفاظ مال مال و مال کعب و کعب کعب و جز آنها بر مقادیر متصل از جهت اطلاق عدد بر این مقادیر است[✪✪] ؛ زیرا اعداد و مقادیر جملگی از جنس کمیت هستند ، و بیان این مطلب را علمای حکمت اولی برعهده دارند .

اما چیزهائی که جبریها بکار می‌برند ، و درخارج و در مقادیر متّصل جود دارد

(✪) رجوع شود به ۵۰۱۰۲ § .

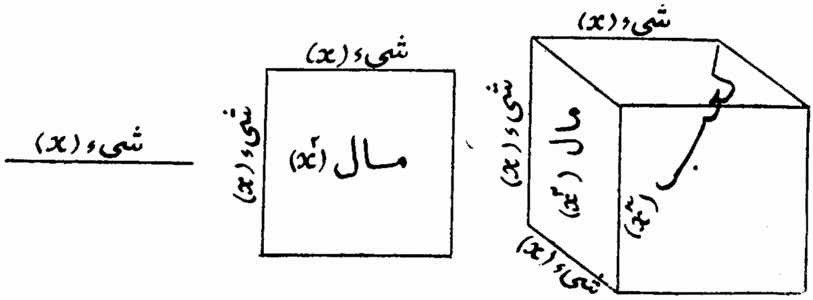
(✪✪) رجوع شود به ذیل صفحه‌ی ۱٦٤ و ٤۰۲۰۱ § (ص ۱۳۸) .

چهار است : عدد و شیء و مال و مکعب . اما عدد [مطلق] آنست که عددْ مجرّد از همه‌ی مادّه ها در ذهن اندیشیده شود ، و آن وجود خارجی ندارد ، زیرا عدد چیزی است معقول و کلّی که فقط آنگاه وجود خارجی پیدا می کند که بوسیله‌ی مادّه متشخّص شود .

اما شیء در مقادیر متصل به منزله خط مستقیم است . و اما مال بمنزله‌ی چهار ضلعی متساوی‌الاضلاع وقائم‌الزاوایائی است که ضلعش مساوی خط مستقیمی باشد که نام شیء بر آن اطلاق شده است(☆) . و مکعب آنچنان جسمی است که شش سطح چهار ضلعی و متساوی و دارای اضلاع مساوی و زوایای قائمه بر آن محیط باشند ، وضلعش همان خط مستقیمی باشد که اسم شیء بر آن اطلاق شده ، و هرسطح آن مربعی است که نام مال بر آن اطلاق شده . پس ، مکعب از ضرب کردن شیء در مثل خودش ، و سپس ، ضرب کردن این حاصل ضرب در شیء حاصل می‌شود ، و توضیح ساختن آن و برهان آنرا اقلیدس در شکل بیست و هفتم مقاله‌ی یازدهم کتاب خود در اصول [هندسه] آورده است .

و اما مال مال ، که جبریها آنرا حاصل ضرب مال در مال می‌دانند ، در مقادیر متصل معنی ندارد ؛ زیرا چگونه می‌توان مربع را که سطح است در مثل خودش ضرب کرد (†) . چو سطح چیزی است دارای دو بُعد ، و حاصل ضرب دو بعد

(☆)



(†) رجوع شود به ۴۰۲۰۱ § (ص ۱۳۸) .

در دو بعد چهـار بعد می‌شود ، و جسم را ممکن نیست بیش از دو بعد باشد .

پس هرآنچه به جبر استخراج می‌شود ازهمین چهار مرتبه استخراج میگردد ، و آنکه گمان کرده است کـه جبر حیله‌ای در استخراج اعداد مجهول است امر نا معقولی را گمان برده است ، ونباید باینکه جبر وهندسه در ظاهر مختلف‌اند توجه کرد ، بلکه جبر و مقابله اموریست هندسی که بوسیله‌ی اشکال پنجم و ششم مقالـه‌ی دوم **اصول** مبرهن می‌شود ✿ .

[**٦۰۴۰۳۰۱** § **تبصره** ـ] و اما آنکه گفته است که مال مال و سه مال معادل بیست و هشت است ، وسپس عده‌ی مالها را نصف کرده ، و [حاصل را] درخودش ضرب کرده ، و عدد را برآن افزوده و جذر حاصل را گرفته ـ و آن پنج و نیم شده ـ و از آن نصف عده‌ی مالها را کم کرده ، و چهار مانده ، وگفته است که آن مال است و مال مال شانزده است ، و سپس پنداشته که مال مال از راه جبر استخراج شده ، گمانش سخت ضعیف است † ، چو وی مال مال را استخراج نکـرده ، بلکه مال را بدست آورده است ، و مانند اینست که مال و سه جذر معادل بیست و هشت باشد ، و سپس جذر را بر طبق مقاله‌ی دوم [کتاب **اصول**] استخراج کند ، و اصرار ورزد که جذری که استخراج کرده جذر مال مال است . و این سری است که بوسیله‌ی‌آن براسراری

(✿) اشکال مذکور معادل دستورهای

$$x(a-x)+\left(\frac{a}{۲}-x\right)^{۲}=\left(\frac{a}{۲}\right)^{۲}$$
$$x(a+x)+\left(\frac{a}{۲}\right)^{۲}=\left(\frac{a}{۲}+x\right)^{۲}$$

است . رجوع شود به حل معادله‌ی درجه‌ی دوم در ٤۰٥ § .

(†) یعنی اگر در حل معادله‌ی $x^{٤}+۳x^{۲}=۲۸$ بگوئیم

$$x^{۲}=\sqrt{(۳/۲)^{۲}+۲۸}-(۳/۲),$$

و یا $x^{۲}=٤$ ولهذا $x^{٤}=١٦$ ، (بزعم خیام) $x^{٤}$ را بطریق جبری استخراج نکرده‌ایم ،بلکه ، چون معادله‌ی مذکور قابل تحویل بصورت $z^{۲}+۳z=۲۸$ است ، نباید مقدار $z\ (=x^{۲})$ را که از این معادله استخراج کرده‌ایم جذر $x^{٤}$ بدانیم !

آگاه خواهی شد .

[§۶۰۴۰۳ طبقه بندی معادلات ✩]

و اینك باز می گردیم بموضوعی که در بحث آن بودیم .

گوئیم که معادلات سه مرتبه‌ی اول ، یعنی اعداد و جذرها و مالها ، به شش شعبه باز میگردد : سه معادله‌ی مفرد و سه معادله‌ی مقترن . و مجهولات آنها را میشود به مقاله‌ی دوم [اصول] استخراج کرد ، چنانکه در کتاب جبریها گفته و شرح داده شده است . اما اگر مکعب مورد نظر قرار گیرد ، و بین آن و سایر مراتب معادله‌ای قرار داده شود ، درین صورت [برای حل این معادله] احتیاج به هندسه‌ی مجسمه و مخصوصاً مخروطات و قطوع مخروطی پیدا می‌شود ، زیرا مکعب جسم است . اما مفردات آن ✩✩ سه است : **مکعبی که معادل مالها باشد** ، و آن [درحکم] اینست که جذرهایی معادل اعداد باشد ؛ و **مکعبی که معادل جذرها باشد** ، و آن در حکم اینست که مالهائی معادل اعداد باشد ؛ **مکعبی که معادل اعداد باشد** ، و برای حل [عددی] این معادله راهی نیست مگر راههای عددی که برای استخراج کعبها آماده است † ، و یا راههای هندسی که بوسیله‌ی آنها جسمی متوازی السطوح مساوی جسم متوازی السطوح مفروض دیگرساخته میشود ، و در اینگونه اعمال ناچار به قطوع مخروطی ، و یا ــ برای کسانی که مخروطات نمی‌دانند ــ به آلاتی †† احتیاج می‌افتد .

اما مقترنات آن × دو صنف است : سه تائی و چهارتائی . سه‌تائی‌ها عبارتست از **مکعب و مالها معادل اعداد است** ، و آن جز بوسیله‌ی قطوع حل نمی‌شود ؛ و **مکعب واموال معادل جذرها است** ، وحکم آن همان حکم معادله‌ی مال و جذرها

(✩) رجوع شود به ۵۰۲ § و ۴۰۲ § ومخصوصاً ۳۰۶۰۶ § .
(✩✩) یعنی مفردات درجه‌ی سوم .
(†) رجوع شود به ۵۰۲۰۲ § .
(††) دراین باب به ۴۰۴۰۲ § (ص ۱۵۵) رجوع شود .
(×) یعنی مقترناتی که شامل مکعب است ، وبعبارت دیگر ، مقترنات درجه‌ی سوم .

با عدد است ؛ و **مکعب و اعداد معادل جذرها است** ، و آن جز بوسیله‌ی قطوع حل نمیشود ؛ و **مکعب و اعداد معادل مالها است** ، و آن جز بوسیله قطوع حل نمیشود ؛ و **مکعب و جذرها معادل اعداد است** ، و آن جز بوسیله‌ی قطوع حل نمی‌شود ؛ و**مکعب و جذرها معادل مالها است** ، و آن در حکم معادله‌ی مال وعدد با جذر است ؛ و **مالها و جذرها معادل مکعبی است** ، و آن در حکم معادله‌ی جذرها واعداد با مال است ؛ و **مالها وعدد معادل مکعب است** ، وآن جز بوسیله‌ی قطوع حل نمی‌شود ؛ و **جذرها واعداد معادل مکعب است** و آن جز بوسیله‌ی قطوع حل نمیشود .

و اینها که ذکرشد نه نوع سه تائی است که سه از آنها بوسیله‌ی [مقاله‌ی] دوم **اصول** حل می‌شود ، و شش دیگر جز بوسیله‌ی قطوع مخروطی حل نمی‌شود .

و اما چهارتائی‌ها اینست که **مکعب معادل مالها و جذرها و اعداد است** ؛ **مکعب وجذرها واعداد معادل‌مالهااست** ؛ **مکعب ومالها واعداد معادل‌جذرها است** ؛ **مکعب و مالها وجذرها معادل‌اعداد است** ؛ **مکعب ومال‌معادل جذرها و اعداداست** ؛ **مکعب وجذرها معادل مالها و اعداد است** ؛ **مکعب واعداد معادل مالها وجذرها است** . و اینها هفت نوع چهارتائی است که هیچیك جز بوسیله‌ی قطوع مخروطی حل نمی‌شود .

پس ، از معادلات مرکب (✿) سیزده نوع حاصل شد که جزء به قطوع مخروطی حل نمی‌شود ، و نوعی ازمفردات هست که جزبوسیله‌ی قطوع مخروطی حل نمیشود ، وآن مکعبی است که معادل عدد باشد .

[۶۰۴۰۴ § نظر اجمالی به تاریخ معادلات درجه‌ی سوم و کارهای مؤلف]

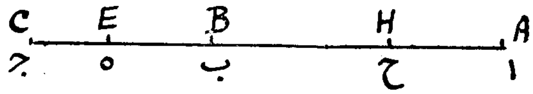
اما ریاضیون قدیم از غیر اهل زبان ما (✿✿) به چیزی ازین مقوله پی نبردند ، و

(✿) یعنی مقترن ، و بعبارت دیگر ، دارای بیش از دو جمله .

(✿✿) مقصود زبان عربی است .

[یا از اطلاعات ایشان درین باب] چیزی بما نرسیده و بزبان ما نقل نشده . ولی از متأخرین از اهل زبان ما ، اول کسی کـه به صنفی سه تائی ازین اصناف چهارده گانه دوچارشد ماهانی † مهندس است ، که دست زد به حل مقدمه‌ای که ارشمیدس درشکل چهارم ازمقاله‌ی دوم کتاب **کره واستوانه** آنرا مسلّم گرفته ، وآنچه ذکر کرده اینست✩.

ارشمیدس گفته است که دو خط AB و BC از حیث مقدار معلوم ، و بریك امتداد متصل‌اند ، و نسبت BC به BE معلومست . پس ، بنا برآنچه در معطیات ثابت شده ، CE معلومست . سپس گفته است که **نسبت HC به CE را مثل نسبت مربع AB به مربع AH قرار می‌دهیم** . ولی نمیگوید که این مطلب چگونه دانسته می‌شود ،



زیرا این مطلب ناچار محتاج به قطوع مخروطی است ، و در کتاب **کره واستوانه** ، جز درین مورد ، چیزی که مبنی بر قطوع مخروطی باشد نیامده است ، و باین جهت ارشمیدس این را نیز مسلم گرفته . و شکل چهارم [که بدان اشاره شد] عبارتست از تقسیم کره بوسیله‌ی سطحی مستوی به نسبت معلومی .

و ماهانی [در تحلیل مقدمه‌ی مذکور] اصطلاحات جبریها را بکار برد ، و چون تحلیل منجر به معادله‌ای بین اعداد و اموال و کعب‌ها شد ، و نتوانست آنرا بوسیله‌ی قطوع مخروطی حل کند ، آنرا ممتنع شمرد ، وبا مقام فضل وتقدم فاضل مزبور درین فن ، حل صنفی از اصناف مذکور براو پوشیده ماند ؛ تا ابوجعفرخازن✩✩ ظاهر شد ، و راهی برای حل آن یافت ، وآنرا در رساله‌ای آورد .

(†) §۳۰٤۰٥۰۱ .

(✩) رجوع شود به §۳۰۷۰۱ .

(✩✩) §۳۰٤۰٥۰۱ .

و ابونصر ابن عراق مولی امیرالمؤمنین ✩ ، از اهل خوارزم ، پرداخت به حل مقدمه‌ای که ارشمیدس دراستخراج ضلع هفت ضلعی [منتظم محاطی] در دایره آورده- و آن مربعی است دارای خاصیت مذکور [؟] - و او نیز اصطلاحات جبریها را بکار می‌برد ، و بالنتیجه ، تحلیل منجرشد به مکعب و مالهائی که معادل اعدادی است ، و این معادله رابوسیله‌ی قطوع مخروطی حل کرد ، و شك نیست که این‌مرد از بزرگان ریاضیون است .

و مسئله‌ای که ابو سهل کوهی✩✩وابوالوفای بوزجانی✩✩✩ وابوحامد صغانی و جماعتی از رفقای ایشان که دربغداد مقیم دربار عضدالدوله بودند از حل آن عاجز ماندند اینست که می‌خواهیم ده را به دو جزء تقسیم کنیم که مجموع مربعین آنها و خارج قسمت جزء بزرگتر برجزء کوچکتر [معادل] هفتاد و دو شود † ، و تحلیل [این مسئله] منجرشد به اموالّی که معادل مکعب و جذرها و اعداد است . واین فضلا مدت مدیدی درین مسئله حیران ماندند تا ابوالجود†† آنرا حل کرد ، و آنرا در کتابخانه‌های پادشاهان سامانی محزون نمودند .

پس‌این معادلات سه صنف ازمرکبات††† است ، که دو ازآنها سه‌تائی و یکی چهارتائی‌است ، ویگانه صنف مفرد ، یعنی‌معادله‌ی مکعب با اعداد . واین معادلات را فضلای پیش ازما حل کرده‌اند ، ولی ازآثار آنان در ده صنف دیگر، و نه باین تفصیل

(✩) مقصود ابونصر منصور ابن علی ابن عراق مولی امیرالمؤمنین ، معروف به ابونصرعراق (متوفی در ٤٥٨ ه ق) ، است که از ریاضیون و منجمین معروف و معاصر ابوریحان بیرونی بوده. برای اطلاع بیشتر رجوع شود به : دکتر محمد معین ، **چهار مقاله‌ی عروضی سمرقندی** ، صص ٤١٩ - ٢٢ .

(✩✩) § ٣٠٤٠٥٠٥   (✩✩✩) § ٣٠٤٠٥٠٣

(†) § ٥٠٨٠٤٠١   (††) § ٣٠٤٠٥٠٨

(†††) یعنی از مقترنات . این سه صنف عبارتست از :

(معادله‌ی ماهانی) $x^3 + a = cx^2$

(ابونصر عراق) $x^3 + cx^2 = a$

(ابوالجود) $x^3 + bx + a = cx^2$

[که در طبقه بندی سابق مذکور شد]، چیزی به ما نرسیده است ✩ و اگر فرصتی دست دهد ، و توفیق رفیق شود همه‌ی این اصناف چهارده گانه را با جملگی شاخه‌ها و حالات آنها و تمیز آنچه ممکن‌است از آنچه ممتنع است گرد می‌آورم ، تا رساله‌ای شامل عده‌ای از مقدمات که در اصول این فن فواید عظیم دارد پرداخته آید✩✩. و در این کار به ریسمان توفیق الاهی چنگ میزنم ، و بر او توکل می کنم ، که در همه‌ی کارها یاری دهنده همو و توانائی و نیرومندی از اوست . جلّت عظمته .

[۶۰۵ § حل معادله‌ی مثلث معین]

پس از تمهید این مقدمات به مسئله‌ی خود باز میگردیم ، و آن جستجوی مکعبی است که با دویست ضلع خود معادل بیست مربع ضلع آن و دو هزار عدد باشد †.

(✩) رجوع شود به ۵۰۱۱۰۱ § در شرح کارهای منسوب به ابوالجود دراین باب .

(✩✩) رجوع شود به ۴۰۴۰۱ § ۱ ص ۱۵۲) .

(†) $x^3 + 200x = 20x^2 + 2000$ ، وآن حالت خاصی ازصنف مذکور در ۵۰۹۰۳ § است .

ترسیمات : $AB = 20$ ، $ER = 200$ (مستطیل طرف راست) ، $EH = 1$ (همان مستطیل) ، (− پس $RH = 200$ −) ، $\overline{AC}^2 = 200$ ، $AC = \sqrt{200}$ ، $AD = 2000 : 10 = 200$ ، $DB = 100$ ؛

نیمدایره‌ی BKD بقطر BD ؛

هذلولی متساوی‌القطرین NDK مار بر D با مجانبهای CE و CA .

حکم : $AL = x$.

برهان . بموجب خاصیت عمومی هذلولی ، $EA = KC$ ؛ پس $EA - EM + DK = KC - EM + DK$ ، یا $DT = AK$. پس $DL : LK = AL : LT$ ، ولهذا

$$\overline{AL}^2 : \overline{LT}^2 = \overline{DL}^2 : \overline{LK}^2 . \qquad (1)$$

بعلت خاصیت دایره ، $DL : LK = LK : LB$ ؛ پس

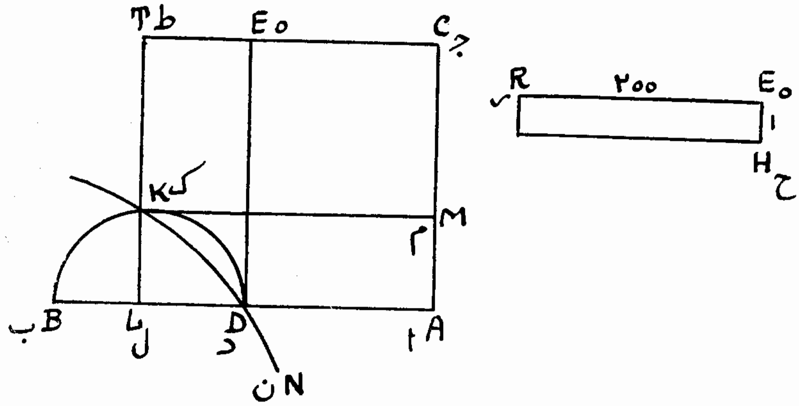
$$\overline{DL}^2 : \overline{LK}^2 = (DL : LK)(LK : LB) = DL : LB . \qquad (2)$$

بموجب (۱) و (۲) ، $\overline{AL}^2 : \overline{LT}^2 = DL : LB$. پس بترتیب ،

بقیه درذیل صفحه‌ی بعد

خط AB را مساوی عده‌ی مربعات قرار میدهیم ، و آن بیست است . و خط ER را [در قسمت طرف راست شکل] دویست ، و خط EH را [در همان قسمت شکل] واحد میگیریم . پس سطح مستطیل RH [درهمان قسمت شکل] دویست است .

اینك ، بنا بر آنچه در شکل چهاردهم مقاله‌ی دوم کتاب اصول ثابت شده ، مربعی مساوی مستطیل RH می‌سازیم ، و فرض میکنیم ضلع این مربع AC باشد ، و آن بر AB عمود است ، و مساوی جذر دویست میباشد . و AD عبارتست از خارج قسمت عدد بر عده‌ی جذرها ، و ان ده است ، زیرا عدد دو هزار است ، و عده‌ی جذرها دویست است ، و هر گاه دو هزار بر دویست تقسیم شود ده خارج میگردد . و DB نیز ده است . اینك بر [قطر] DB نیمدایره‌ی DKB را میسازیم ، و ED را موازی AC



میکشیم ، و مستطیل AE را تمام میکنیم ، و بطریقی که آپولونیوس فاضل در شکل

بقیه‌ی ذیل صفحه قبل

$$\overline{AL}^2 \cdot LB = \overline{LT}^2 \cdot DL ,$$
$$\overline{AL}^2 \cdot LB + \overline{LT}^2 \cdot AD = \overline{LT}^2 \cdot DL + \overline{LT}^2 \cdot AD ,$$
$$\overline{LT}^2 \cdot AL = LT^2 \cdot AD + \overline{AL}^2 \cdot LB ,$$
$$۲۰۰ \cdot AL = ۲۰۰۰ + \overline{AL}^2 \cdot LB ,$$
$$\overline{AL}^3 + ۲۰۰ \cdot AL = ۲۰۰۰ + \overline{AL}^2 \cdot LB + \overline{AL}^3$$
$$= ۲۰۰۰ + \overline{AL}^2 \cdot AB$$
$$= ۲۰۰۰ + ۲۰ \, \overline{AL}^2 ,$$

و هوالمطلوب .

پنجاه و نهم از مقاله‌ی اول کتاب مخروطات و شکلهای پنجم و ششم این کتاب آورده، قطع زایدی میسازیم که بر نقطه‌ی D بگذرد و خطوط AC و EC آنرا قطع نکنند، ــ چو ساختن این قطع جز بوسیله‌ی این سه شکل اتمام نپذیرد ــ و آن قطع NDK است، و دایره را در نقطه‌ی K قطع میکند. سپس از K عمود KL را بر AB اخراج میکنیم. حال گویم ضلع AL همان ضلع مکعبی‌است که با دویست ضلع خود معادل بیست مربع AL بعلاوه‌ی دو هزار عدد است.

برهان آن. LK را مستقیماً امتداد میدهیم تا خط EC را در نقطه‌ی T قطع کند، و KM راموازی AL میکشیم. چون KT موازی ED و KM موازی AD است، سطح EA که زوایای آن قائمه‌اند مساوی سطح KC است که زوایایش قائمه‌اند، زیرا دو نقطه‌ی K و D بر محیط قطع زایدی قرار دارند که خطوط AC و CT آنرا قطع نمیکنند، و از هریك از آنها دو خط به خطوطی که [قطع را] تلاقی نمی‌کنند کشیده شده که موازی دو خطی هستند که از نقطه‌ی دیگر کشیده شده ــ و برهان این مطلب را آپولّونیوس فاضل در شکل چهارم مقاله‌ی دوم کتاب مخروطات آورده است. اما وضع دایره‌ی DKB معلومست (زیرا قطر آن که DB است از حیث وضع و مقدار معلومست). و دو خط AC و CT از حیث وضع معلومند، و وضع نقطه‌ی D معلومست؛ پس وضع قطع NDK معلومست. و چون وضع دایره‌ی DKB [نیز] معلوم است، وضع نقطه‌ی K معلوم است. پس وضع خط KL معلومست؛ و لهذا، وضع نقطه‌ی L معلوم میباشد؛ و چون وضع A [نیز] معلومست، مقدار خط AL معلوم است. و این مطالب از کتاب معطیات آشکار است.

اماثابت کردیم که سطح EA مساوی سطح KC است. پس، چون سطح EM را که مشترك است اسقاط کنیم، دوسطح مساوی DM و EK باقی می‌ماند، وچون سطح DK را به هر دو بیفزائیم، سطح AK مساوی سطح DT خواهد بود؛ و چون زوایای این دو سطح متساوی اند ــ زیرا زوایای آنها قائمه‌اند ــ بنابرآنچه اقلیدس در شکل

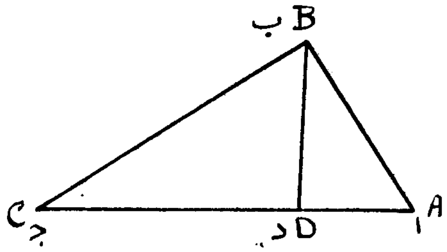
چهاردهم مقاله‌ی ششم ثابت کرده، اضلاع آنها متکافی می‌باشند، و نسبت AL به LT مثل نسبت DL به LK است. پس مربعات آنها نیز متناسبند، و نسبت مربع AL به مربع LT مثل نسبت مربع DL به مربع LK است. اما نسبت DL به LK مثل نسبت LK به LB است. پس نسبت مربع DL به مربع LK مثل نسبت DL به LB است. پس لازم می‌آید که نسبت مربع AL به مربع LT مثل نسبت DL به LB باشد. بالنتیجه، حاصل ضرب مربع AL در خط LB مساوی حاصل ضرب مربع LT در خط DL است، و چون حاصل ضرب مربع LT در AD را به هر دو بیفزائیم حاصل ضرب مربع LT در AL مساوی حاصل ضرب مربع LT در AD بعلاوه‌ی حاصل ضرب مربع AL در LB خواهد بود. اما مربع LT مساوی عده‌ی اضلاع یعنی دویست است، و AL همان ضلع مکعب. پس دویست ضلع مکعب مساوی حاصل ضرب مربعLT در ضلع AD بعلاوه‌ی حاصل ضرب مربع AL در LB است، و چنانکه گذشت، حاصل ضرب مربع LT در AD مساوی عدد است، و آن دو هزار است. پس دو هزار عدد و حاصل ضرب مربع AL در LB مساوی دویست ضلع مکعب می‌باشد، و چون مکعب AL را، که همان حاصل ضرب مربع AL در AL است، به هر دو بیفزائیم، مکعب AL و دویست AL مساوی دو هزار عدد و حاصل ضرب مربع AL در AL و حاصل ضرب مربع AL در LB خواهد بود. اما حاصل ضرب مربع AL در AL بعلاوه‌ی حاصل ضرب مربع AL درLB مساوی حاصل ضرب مربع AL در AB است، و چون AB را بیست فرض کرده بودیم، حاصل ضرب مربع AL در AB بیست مربع AL می‌باشد. پس مکعب AL با دویست خط AL مساوی دو هزار عدد با بیست مربع ضلع مکعب است، و این همانست که می‌خواستیم ثابت کنیم.

[۶۰۵۰۱ § رسم مثلث معین]

و بعد از ذکر این مقدمات، مثلث ABC را دگر باره می‌کشیم، و AD را مُنطق قرارمی‌دهیم وآن ده است. درین‌صورت خط DB همان خط AL [شکل اخیر]

است که ثابت کردیم از حیث مقدار معلومست . و اینکه میگویم مقدارش معلومست مقصودم این نیست که کمیت آن معلومست - چو این دو مطلب متفاوت‌اند - بلکه از « معلوم بودن از حیث مقدار » همان معنی را قصد دارم که اقلیدس در کتاب **معطیات** قصد داشته ، و آن اینست که مقداری مساوی آن توان یافت ☆ .

و اینك به مرحله‌ی ترکیب می‌پردازیم . خط AD را ده میگیریم ، و BD را بزاویه‌ی قائمه برآن و مساوی خط AL از شکل سابق قرار میدهیم ، و AB را وصل میکنیم ، و از نقطه‌ی B عمود BC را [برAB] می کشیم ، و AD را مستقیماً امتداد می‌دهیم تا عمود را در نقطه‌ی C قطع کند . پس ناچار لازم می‌آید کـه مثلث ABC



قائم الزوایه باشد (یعنی زاویه‌ی B از آن قائمه است) ، وخط AB با عمود BD مساوی وتر AC باشد ، و خط AB با خط AD مساوی خط BC باشد ، و این همانست کـه می‌خواستیم توضیح دهیم .

[§٦۰٦ حل مسئله‌ی §٦۰۱ †]

و اینك به ربع AB از دایره‌ی ABCD باز میگردیم ، و در آن قطرهای

(☆) §۳۰۲۰۳۰۲ .

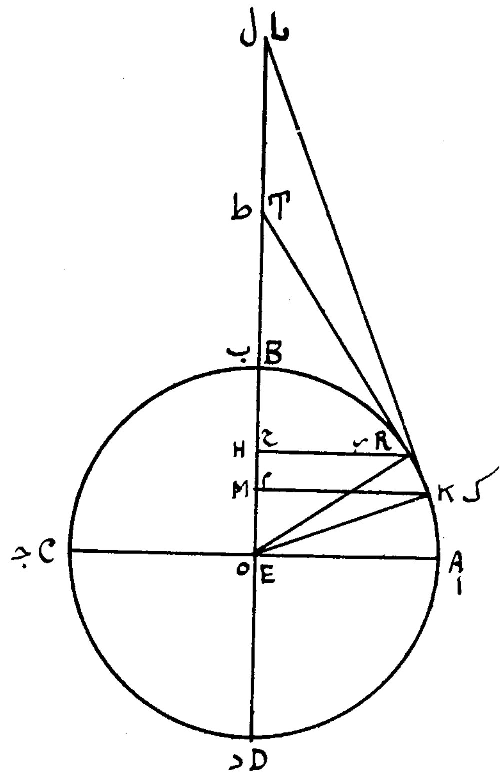
(†) پس از حل مثلث معین (§٦۰۵۰۱) ، خیام به حل مسئله‌ی موضوع رساله (§٦۰۱) میپردازد ، و چون در §٦۰۵۰۱ و نیز در §٦۰٦ حروف **ا** ، **ب** ، **ج** ، **د** ، **ط** را بکار برده ، برای تمیزآنها ، حروف مربوط به شکل§٦۰۵۰۱ را به لفظ « متقدم » مقید می کند . ما در این مورد حروف ,A و ,B و غیره را بکار می‌بریم .

اینك توضیح استدلال خیام .

چنانکه در §٦۰۵۰۱ معلوم شد ، مثلث قائم‌الزاویه‌ی ,A,B,C را واجد شرط

بقیه در ذیل صفحه‌ی بعد

AC و BD را ، که یکدیگر را بزاویه‌ی قائمه قطع می‌کنند ، می‌کشیم . و مرکز



دایره نقطه‌ی E است . و از خط CD از مثلث ABC در شکل سابق خط CT را مساوی

بقیه‌ی ذیل صفحه‌ی قبل

$$(۱) \quad A_1B_1 + B_1D_1 = A_1C_1$$

میسازیم ، و C_1T_1 را مساوی B_1D_1 جدا میکنیم . سپس دردایره‌ی مفروض نقطه‌ی H را برشعاع EB چنان تعیین می‌کنیم که

$$(۲) \quad EH : HB = A_1D_1 : D_1T_1 \text{ ،}$$

وHR و ER و مماس RT را میکشیم ، وگوئیم **مثلث ERT بامثلث $A_1B_1C_1$ متشابه است .**

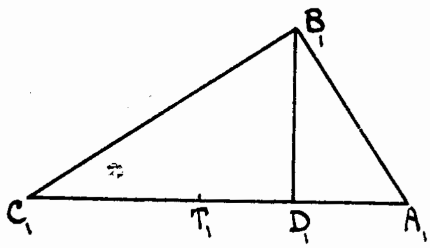
برای این منظور کافی است ثابت کنیم که زوایای REH و $B_1A_1C_1$ متساویند . اثبات بـه تشخیص حالات و برهان خلف است . اگر اولی کمتر ازدومی باشد ، چون زاویه KEB را مساوی

بقیه درذیل صفحه‌ی بعد

عمود BD جدا می‌کنیم ، و نصف قطر دایره را که خط EB در شکل حاضر است ،

بقیه‌ی ذیل صفحه‌ی قبل

دومی جدا کرده مماس KL را بکشیم ، و مثلث EKL و $A_1B_1C_1$ متشابه خواهند بود ، و لهذا



اولا با توجه به (۱) ، $EK+KM=LE$ ، و یا

$$KM=BL \qquad (۳)$$

و ثانیاً

$$LM:KM=C_1D_1:D_1B_1 \, , \qquad (٤)$$

$$T_1C_1:D_1A_1=BL:ME \, . \qquad (٥)$$

از (٤) بموجب (۳) و $C_1T_1=B_1D_1$ نتیجه میشود $LM:LB=C_1D_1:C_1T_1$ ،

و یا به تفضیل نسبت ،

$$MB:LB=D_1T_1:C_1T_1 \, . \qquad (٦)$$

از (٥) و (٦) نتیجه میشود ،

$$EM:MB=A_1D_1:D_1T_1 \, ,$$

ولهذا ، بموجب (۲) ،

$$EM:MB=EH:HB \, .$$

اما $EM<EH$ ؛ پس $MB<HB$ ، و حال آنکه HB جزء MB است . پس فرض کوچکتر بودن زاویه‌ی REH از زاویه‌ی $B_1A_1C_1$ باطل‌است . به همین‌قیاس معلوم میشود که فرض کوچکتر بودن دومی از اولی نیز باطل است . پس دو زاویه‌متساوی‌اند ، و لهذا دو مثلث ERT و $A_1B_1C_1$ متشابهند .

از تشابه دو مثلث معلوم میشود که $ER+RH=ET$ ، و لهذا $BT=RH$.

اینك گوئیم از طرفی $\overline{RH}^2=DH \cdot HB$ و از طرف دیگر $\overline{RH}^2=EH \cdot HT$. پس $DH \cdot HB=EH \cdot HT$ ، ولهذا $DH:EH=HT:HB$ ، وبه‌تفضیل‌نسبت ، $DE:EH=BT:HB$ ، و یا $AE:EH=RH:HB$ ، و یا بالاخره $AE:RH=EH:HB$ ، و هوالمطلوب .

بطریقی که اقلیدس در شکل سیزدهم مقاله‌ی ششم ثابت کرده ، در نقطه‌ی H به نسبت AD به DT از مثلث ABC شکل سابق تقسیم می کنیم ، و عمود HR را می کشیم ، و ER را وصل می کنیم ، و از نقطه‌ی R خطی میکشیم که بر دایره مماس باشد ، و آن خط RT است . سپس EB رامستقیماً امتداد می‌دهیم تا RT را در نقطه‌ی T قطع کند . پس مثلث ERT متشابه با مثلث ABC از شکل سابق است . برهانش اینکه زاویه‌ی REH مساوی زاویه‌ی BAC است ، چو اگر چنین نباشد ، یکی از آن دو ، مثلا BAC بزرگتراست . در این صورت ، از نقطه‌یE از خط EB زاویه‌ای مساوی زاویه‌ی BAC جدا می کنیم ، وآن زاویه‌ی KEB است ؛ و از نقطه‌ی K خطی بردایره مماس میکنیم، و آن خط KL است که ET را در نقطه‌ی L قطع می کند . پس مثلث EKL با مثلث ABC متشابه است ، زیرا زوایای آنها متساوی اند . و چون از نقطه‌ی K عمود KM را بر EB اخراج کنیم مجموع EK و KM مساوی LE خواهد بود ، و چون EB مساوی EK است ، BL مساوی KM است . اما نسبت LM به KM مثل نسبت CD به DB است ؛ پس نسبت ML به LB برابر نسبت CD است به BD ، و به تفضیل ، نسبت MB به BL مثل نسبت DT به CT خواهد بود . [از طرف دیگر] نسبت TC (که مساوی DB است) به DA برابرنسبت BL (که مساوی KM است) به ME است . پس ، در نسبت مساوات (✩) ، EM به MB مثل نسبت AD به DT است . ولی نسبت EH به

(✩) استدلال به قاعده‌ی **نسبت مساوات** اینست که اگر دو دسته از مقادیر مانند

$$a,\ b,\ c,\ \ldots,\ k,\ l,$$
$$A,\ B,\ C,\ \ldots,\ K,\ L,$$

اولا ازحیث عده مساوی باشند ، وثانیاً

$$a:b=A:B,\qquad b:c=B:C,\qquad \ldots,\qquad k:l=K:L,$$

می‌توان نتیجه گرفت که $a:l=A:L$.

قاعده‌ی **نسبت مساوات مضطرب** آنست که اگر

$$b:c=A:B,\qquad a:b=B:C,$$

آنگاه $a:c=A:C$.

بقیه درذیل صفحه‌ی بعد

HB را مثل نسبت AD به DT قرار داده بودیم . پس نسبت EM به MB مثل نسبت EH به HB است . ولی EM ، که اولی است ، کمتر از EH است ، که سومی است ؛ پس ، بنا برآنچه در [مقاله‌ی] پنجم اصول ، درشکل چهاردهم این مقاله ، ثابت شده ، لازم می‌آید که MB که دومی است ، کمتر از HB باشد ، که چهارمی است . ولی MB از HB بزرگتر است ، و این محال است .

پس زاویه‌ی REH کمتراز زاویه‌ی BAC از مثلث ABC سابق نیست ، و[بهمین قیاس معلوم می‌شود که] بزرگتر از آن هم نمی‌باشد . پس مثلث RET با مثلث ABC سابق متشابه است ؛ و لهذا مجموع ER و RH مساوی ET است ، و بنابراین ، BT مساوی RH است . ولی حاصل ضرب DH درHB مساوی مربع HR می‌باشد ؛ و همچنین حاصل ضرب EH درHT مساوی مربع HR است . پس حاصل ضرب DH در HB مثل حاصل ضرب EH در HT است ، و لهذا ، بنا برآنچه در شکل شانزدهم مقالـه‌ی ششم [اصول] ثابت شده ، این چهار خط اربعه‌ی متناسبه هستند . پس ، نسبت DH ، کـه اولی است ، به HE ، که دومی است ، مثل نسبت HT است ، که سومی است ، به HB ، که چهارمی است ؛ و به تفضیل ، نسبت DE به EH مثل نسبت BT است به BH . اما DE مساوی AE و BT برابرRH است . پس نسبت AE به EH مثل نسبت RH به HB است ، و به تبدیل ، نسبت AE به RH برابر نسبت EH است به HB . پس ربع دایره رابدوقسمت در نقطه‌ی R تقسیم کردیم و از R عمود RH را [برEB] کشیدیم بطوریکه نسبت AE ، که نصف قطراست ، به RH مثل نسبت EH به HB گردید ، واین همانست که می‌خواستیم ثابت کنیم .

بقیه‌ی ذیل صفحه‌ی قبل

برای مزید اطلاع رجوع‌شود به : **تحریراقلیدس** ، ص ۷۲ و صص ۸۵-۸۱ (قضایای۲۲و۲۳)؛ هیث ، **سیزده مقاله** ، جلد۲، صفحات ۱۱۵و۱۵۶-۱۵۷ و ۱۷۹-۱۸۳ .

در مورد مذکور در متن ، دو دسته مقادیر مورد بحث عبارتند از

MB, LB, ME,
DT, CT, DA.

پس بقاعده‌ی نسبت مساوات ، $MB : ME = DT : DA$ ، و لهذا $ME : MB = DA : DT$.

[۶۰۷ § در محاسبه‌ی مقدار تقریبی جواب]

و کسی که بخواهد [جواب مسئله را] به حساب بداند، چون به دقت بنگرد، راهی بدان نخواهد داشت، زیرا چیزهائی که به قطوع مخروطی استخراج می‌شود استخراج آنها به حساب ممکن نیست، و اگرجوینده به تخمین قانع باشد، براوست که به جداول اوتار مجسطی یا جداول جیبها و سهم‌ها (✿) در زیج معتمد رجوع کند، ودرجدول‌قوسی بجوید که نسبت شصت که، برحسب فرض، نصف قطر دایره است، به جیب‌آن قوس مثل جیب تمام‌آن باشد به سهمش (†)؛ واین قوس را قریب پنجاه‌وهفت درجه از تقسیماتی که برحسب آنها دایره سیصد و شصت [درجه] است، و جیب آنرا قریب پنجاه جزء و سهمش را نزدیك بیست و هفت جزء و ثلث جزء، و جیب تمام‌آنرا نزدیك سی و دوجزء و دو ثلث جزء می‌یابیم. و ممکن است در دقت [محاسبه] بیش‌از این کوشید تا جایی که تفاوت [مقدار واقعی با نتیجه‌ی محاسبه] به اندازه‌ای تقلیل یابد که بحس در نیاید.

(✿) سهم α یعنی $Cos\alpha$ -۱.

(†) اگر زاویه‌ی **BER** (شکل ص ۲۵۶) را به α نمایش دهیم، معادله‌ی مسئله چنین خواهد بود:

$$۱ : Sin\alpha = Cos\alpha : (۱ - Cos\alpha),$$

و ازآن نتیجه میشود:

$$Sin\alpha = ۰{,}۸۳۹۵, \quad \alpha = ۵۷^\circ\ ۰'\ ۳۰'', \quad Cos\alpha = ۰{,}۵۴۳۳۰$$

باید دانست که ریاضیون اسلامی، به پیروی از یونانیان، قطر دایره را به ۱۲۰ قسمت متساوی تقسیم می‌کردند، و هرقسمت را یك جزء یا جزء **قطر** میخواندند، و جزء قطررا — مانند درجه — به دقایق و ثوانی وغیره تقسیم میکردند. واضحست که هرجزء قطر برابر $۳:\pi$ درجه ولهذا کمی از درجه‌کمتر است. اینك اگر α قوسی ازدایره‌ی مثلثاتی و $Sin\alpha$ جیب معمولی آن و $\mathrm{Sin}\alpha$ جیب آن برحسب اجزای قطرباشد، واضح است که

$$\mathrm{Sin}\alpha = ۶۰ \times Sin\alpha \ (\text{جزء قطر})$$

پس، درمثال مورد بحث، $\mathrm{Sin}\alpha = ۵۰{,}۳۷$، واین مقدار برحسب اجزای قطراست (خیام مقدار ۵۰ را میدهد).

✩✩✩

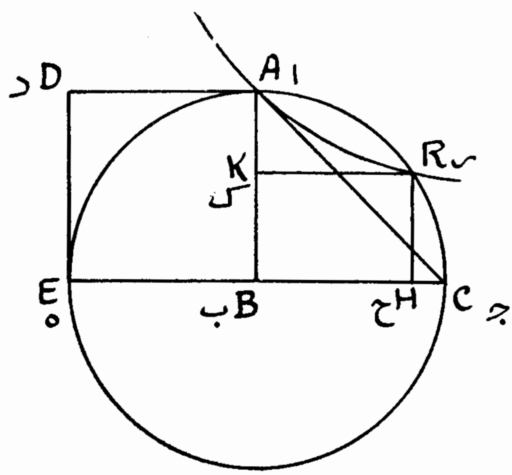
این بود آنچه ، با پراکندگی فکر و آشفتگی خاطر و گرفتاری به کار هایی که مانع پرداختن باین قبیل جزئیات است ، درین باب بر خاطرم گذشت . و اگر بلند پایگی این مجلس ـ که بلند پایگی آن بردوام بماند ـ و حق سؤال کننده‌ی این مسئله ـ که خداوند همواره او را مؤید بدارد ـ نبود ، من خیلی ازین وادی دور بودم ، چه کوشش من صرفاً معطوف به مطالبی است که در نزد من مهمتر از اینگونه مطالب جزئی است ، و همت من مصروف آنهاست . و خدای تعالی در همه حال مورد شکر وستایش است ، و امید از او اینکه توفیق کارهای خیر عنایت فرماید که اجابت دعا دردست اوست .

مسئله

ربع دایره‌ی AC به مرکز B مفروض است ، ومیخواهیم AB را چنانکه دانستی تقسیم کنیم ✿ .

برAB شکلی چهارضلعی میسازیم که اضلاعش و زوایایش متساوی باشند ، وآن AE است . پس وضع خطوط BE و ED معلوم است . و وضـع E معلوم می‌باشد . پس بر A قطع زایدی می کشیم که خطوط BE و ED آنرا قطع نکنند ، و آن قطع AR است . پس وضع این قطع معلوم می باشد . و اگر AC را وصل کنیم ناچار بر قطع مماس خواهد بود ، و چون AC در داخل دایره است لازم آید که قطع زاید دایره را قطع کند . فرض کنیم R نقطه‌ی تقاطع باشد . وضع R معلوم است . حال دو عمود RH و RK را می کشیم و گوئیم عمل تمامست .

برهانش اینکه نقاط A و R برمحیط قطع واقعند ، و از هریك دو خط اخراج شده که موازی دو خط اخراج شده از دیگری است . پس سطح RE مساوی سطح AE است ، و چون KE را که مشترك است اسقاط کنیم نتیجه می‌شود که KH مساوی KD است ، وچون زوایای این دو شکل متساویند اضلاعشان متکافی‌اند ، و نسبت AD به KR مثل نسبت BK به KA است . تمام شد .



[دراین شکل RK را تا محل تلاقی آن با ED امتداد دهید]

(✿) یعنی بطوری که $BC : KR = BK : KA$.

عکس

رساله‌ی خیام

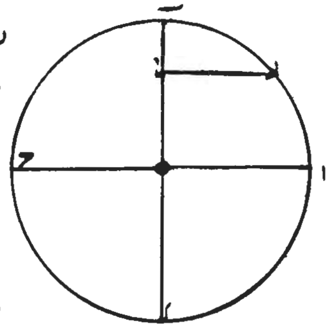
در تحلیل یك مسئله به معادله‌ی درجه‌ی سوم

که اصل آن در

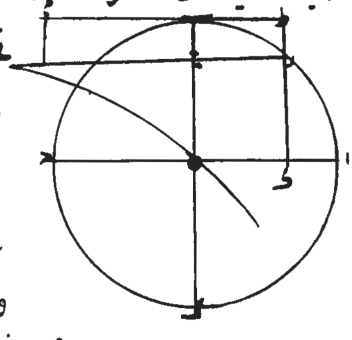
کتابخانه‌ی مرکزی دانشگاه تهران

مضبوط است

هذه رسالة بسم الله الرحمن الرحيم وبه ثقتي وعليه شعر لابي الفتح عمر بن ابرهيم الخيامي
نريد ان نقسم ربع دائرة اب من دائرة ا ب جـ د بقسمين على نقطة مثل ز ونخرج عمود زح
على قطر بـ د فيكون نسبة اه الى زح كنسبة هح الى حب و ه مركز الدائرة و اه نصف القطر

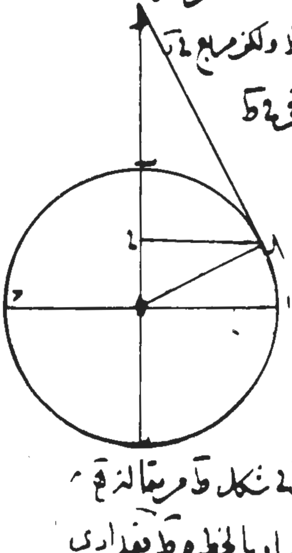


نصف القطر فانا نزل انا قد فعلنا حتى نؤدي التحليل الى امر معلوم ثم
نركب على تلك الصفة فنفيد ان ربع اب قد قسم على ز ومركزها ه ونخرج اد
بـ د متقاطعتان على زوايا قائمة ونخرج عمود زح فيكون نسبة اه
الى زح كنسبة هح الى حب ونخرج عمودي ى ز ه ط ط م ونتمم سطح ط ا
بعد ان جعلنا خط ح م مثل اه فلان نسبة اه الى زح كنسبة هح
الى حب و ح م مثل اه يكون نسبة ح م الى زح ضرب ح م في ح ب مساويا لضرب زح في هح كما
بينه اقليدس في يو من الاصول وضرب ح م في ح ب مثل سطح ط ا وضرب زح في هح مثل سطح

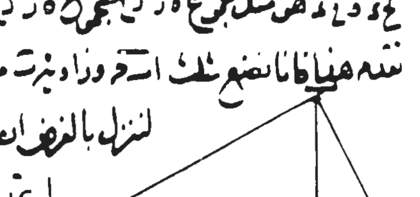


ه ى فيكون سطح ط ا مساويا لسطح ه ى ونجعل سطح ح ط
مشتركا فيكون سطح ط ه مساويا لسطح ط ا فان عملنا قطعا زائدا
لا يلقاه خطا ه ط ط م ويمر على نقطة ز كما بينه ابلونيوس
في نط من المقالة الاولى من كتاب المخروطات والشكل د
و ه من المقالة الثانية من هذا الكتاب اذ هذا العمل تمم هذه
الاشكال الثلثة فان ذلك القطع الزائد يمر على نقطة ا لا محالة كما تبين من عكس الشكل الثاني من
المقالة الثانية من كتاب المخروطات ونقطة ه معلومة الوضع وخط ح م معلوم الوضع والقدر لا
ان نقطة ا عند التركيب غير معلومة الوضع لانها لو كانت معلومة الوضع لكانت نقطة ح معلومة
الوضع لان خط ه ا معلوم القدر فيكون خط ح ب معلوم القدر ولكان الشكل معلوما وكذلك

خط طه غير معلوم الوضع لانه لو كان معلوم الوضع لكانت نقطة ط معلومة الوضع ولو كانت نقطة
ه معلومة الوضع لكان خط ده معلوم القدر ولو كان خط ده معلوم القدر لكان الشكل معلوما
وليس كذلك اذ المقصود علم الشكل فلو كانت نقطة ه معلومة الوضع او خط طه معلوم الوضع لكان
يمكن ان يعمل الشكل وينال المقصود عند التركيب بسهولة وليس الموقف بواحد منهما سهلا لذا نبحث
هذه الطريقة للباحث المستبصر بكتاب المخروطات لان يصل الى المطلوب بطريقة اخرى لكنه لم يفطن
لهذه الطريقة وانما اوردت هذه الطريقة مع صعوبتها ليكون شبه تمهيد للمتعلم وتوطئة له ولم
اتمها ولم اركبها على الوجه الهندسي لصعوبتها وكثرة افتقارها الى عدة مقدمات وغيره من المقطوع
مخروطية فليتمم من شاء من العالمين بقطوع المخروط بعدما حصلت له الطريقة التي اذكرها فانها وان
كانت ايضا مفتقرة الى مقدمات مخروطية فهي اسهل بكثير من الاولى ومقدماتها اعم نفعا فاقول
يمكن ان يبين الشكل بعينه وننزل بالتحليل انا قد عملنا ما اردنا وصارت نسبة اه الى دج
كنسبة هج الى جب ونخرج من نقطة د خطا مماس الدائرة وهو دك على ما بين اقليدس في يز من ج
ونخرج هب على استقامة من جهة ب تقطع الخط المماس على نقطة ط ونصل ده فلان مثلث هدط
زاوية د منه قائمة وخرج من زاوية د عمود دج الى القاعدة يكون على ما بين في ح من و يكون نسبة
طج الى جد كنسبة جد الى جه فيكون مربع جد مساويا لضرب هج في جط ولكن مربع جد
مساو لضرب دج في جب فيكون ضرب دج في جب مساويا لضرب هج في جط



فيكون نسبة جد الى هج كنسبة جط الى جب على ما بين في يو من و
فبالتفصيل يكون نسبة هد الى هج كنسبة بط الى بج وقد كان
نسبة اه الى دج كنسبة هج الى جب فبالتبديل يكون نسبة اه
الى هج كنسبة دج الى جب وقد كانت نسبة ده الى هج كنسبة بط
الى بج فيكون نسبة دج الى جب كنسبة بط الى بج والمقادير
التي نسبتها الى شيء واحد بعينه متساوية فانها ايضا متساوية كما بين في ط من ه فتكون
فيكون دج مساويا لبط ودا مثل دب فيكون مجموع هد دج مساويا لخط هط فقد ادى
التحليل الى مثلث قائم الزاوية بشرط ان يكون وتر الزاوية القائمة مساويا لاحد الضلعين المحيطين

بالزاوية مجموعا الى العمود الخارج منها لا دترها نكلما عملنا مثلثا قائم الزاوية بهذه الصفة امكنا ترتيبها
ان كلها على القصد الهندسي وان هذه المقدمة اعني هذا المثلث بهذه الصفة عظيمة المنفعة في امثال
هذه الاشكال ولها خواص اخرى نذكر بعضها حتى ننبطن لها اظ لمنفعتها في اكثر اشباه هذه المسئلة
اقول ان هذا المثلث لا يمكن ان يكون متساوي الساقين لانه لو كان ضلع ه ز مثل ز ط لكان
د ح مثل ح ط ولكان العمود مساويا لكل واحد منهما ولكان ه ط ضعف العمود ولكان مجموع ه ز
والعمود اعظم من الوتر وقد صار مساويا له هف واقول ان هذا المثلث ه ز اصغر من ز ط
لانه لو كان اعظم منه لكان ه د اعظم من ح ط ولكان د ز الذي هو الخط الاوسط في خطي ه ح ح ط
اعظم من ح د ونفرض ح ز مثل ط ز فيكون ه ط ز اعظم من ط ح الجزء اعظم من الكل هذا خلف وقد
تبين ان المثلث على هذه الصفة يكون الضلع الاصغر مع العمود مساويا للضلع الاعظم وذلك ما
اردنا ان نبين ونقول ايضا ان الضلع الاعظم من الضلعين المحيطين بالزاوية القائمة مساو لمجموع
الاصغر مع القطعة التي تفرزها العمود من الوتر من جانب الضلع الاصغر ولنكن مثالنا من الشكل
المتقدم اقول ان مجموع ه ز ه ح مساو لضلع ز ط برهانه ان نسبة ه ز الى ه ح كنسبة ط ز
الى ز ح فبالتركيب يكون نسبة د ح الى ح ه كنسبة ط ز الى ز ح وبالتبديل يكون نسبة د ح الى
ح ط كنسبة ه ح الى ز ح ولكن نسبة ه ح الى ز ح كنسبة ه ز الى ز ح ونسبة د ز الى د ح كنسبة ز ط
الى ح ط لتشابه مثلثي ه ز ح ز ح ط فيكون نسبة ز ط الى ح ط كنسبة د ح الى ح ط فيكون ز ط مساويا
لـ د ح و د ح هو مثل مجموع ه ز ه ح فمجموع ه ز ه ح مثل ز ط وذلك ما اردنا ان نبين ونريد ان
نبين هيهنا انا نضع مثلث ا ب ح ونجعل زاوية ب منه قائمة ونخرج من نقطة ب عمود ب د على ا ح

لنزل بالفرض ان ضلع ا ب مع عمود ب د جميعا مثل ا ح حتى يؤدي
ا عتبد الى معلوم ثم نركبه حتى يحصل لنا مثلث بالصفة
المذكورة ولكن نكمن تمثيلنا بالتسمية الا فا
من اصحاب الصناعة في تسهيل طرق المحسبة باستعمالهم الفاظا اهل الجبر في امثال هذه المسائل
فنسلك سبيلهم في ذلك وان لم نستعمل الفاظ الجبر جاز ويكون الدليل صالحا الا ان هذه
الالفاظ اذا استعملت كان الضرب والقسمة اسهل ونضع خط ا د شيئا في الفرض ولكن عشرة

زمع

ونضع ب ج شيئا ونضربه في مثله فيكون مالا ونضربه في عشرة في مثلها فيكون مساويه ونجمعها فيكون مال
ومال وهو مربع ا ب كانتين في قسمي ا د ومن ا ب نسبة ا ج الى ا ب كنسبة ا ب الى ا د لنا به مثلين
ب د اب د فيكون ضرب ا د في ب د مساويا لمربع ا ب فاذا قسمنا مربع ا ب الذي هو مال وعدد ومال
على ا د الذي هو عشرة يخرج من القسمة عشرة عدد وعشر مال وهو ا د وقد كنا فرضنا ان ا د مثل
مجموع ا ب ب د فيكون مجموع ا ب ب د عشرة عدد وعشر مال نقصنا منه ب د الذي هو الشيء بقي
عشرة عدد وعشر مال الا شيء وهو ا ب نضربه في مثله فيحصل مائة من العدد وثلثة اموال وعشر عشر
مال الا عشرين شيئا والاخر كعب يعادل مائة من العدد ومالا ينجبر ونقابل ونقاص فيبقى مالان وعشر عشر
مال يعدل عشرين شيئا وخمس كعب فنقسم الجميع على الشيء ليرجع الى الاقل بهذه المنازل على
النسبة فيخرج من القسمة عشر عشر كعب وشيئان يعدل خمس مال وعشرين من العدد فيكمل عشر
عشر كعب بان نضرب في مائة وكذلك جميع الاضعاف نضربه في مائة فيحصل كعب ومائتا شيء يعدل
عشرين مالا والفين من العدد فتعادي التحليل الى ما دلته هذه الاجناس ونحصل الاخر ان يستنبط
بالهندسية السطحية مكان الكعب ويحتاج فيها الى قطوع المخروطات ومن قبل ان نخوض في ابانة
حلها بالقطوع نقدم مقدمة تكون تحريضا للناظر في هذه الرسالة على طلب العلوم واتقانها ابدا
الله نعمه بشكر النعم اسبغها على بعض عباده فان التحدث بالنعم شكر يعظم للمنعم كما انزل الله آمرا
بنعمة ربك فحدث فلا يظنن الناظر ان هذا كلام جره الى هذا المقام حب المباهاة فان قلت
عادات البحوث المتكلفة اسمه وحق السفلة الاعجاب فان نفوسهم لا تشبع الا لتعطي شيئا من العلوم
فلما ادركوه ظنوا ان ذلك العلم هو النور صور العلوم وجمعها ونحوها باسرها ان يتوسل لنا لنفسها
لتراه ثم تسقط ونسقطها عن درجة الحقائق والفوز بها وانقطاعها اذ ليس ان هذا الذي يسميه الجبريون
ربما المربع في المقادير المتصلة ولا وجود لها في الاعيان بوجه من الوجوه وانما يطلق على
المقادير المتصلة لفظة المال والمال الكعب وكعب الكعب ونحوها على حيث الخلاف في العدد
اذ العدد والمقادير يشتركن في جنس الكمية على ما يتولى بيانه صاحب العلم الالهي فاما الامور التي
يسميها الجبريون ولها وجود في الاعيان والمقادير المتصلة اربعة العدد والشيء والمال والمكعب
اما العدد فمن ان يوجد العدد مجردا عن المواد في العقل ولا يكون له وجود في الاعيان الا العدد

معقول كلي لا يوجد الا متشخصا بالمواد واما الشيء فمنزلته من المقادير المتصلة منزلة الخط المستقيم واما
المال فهو بمنزلة المربع المتساوي الاضلاع القائم الزوايا الذي ضلعه ذلك الخط المستقيم المطلق المسمى
لفظا الشيء والمكعب هو المجسم الذي يحيط به ستة سطوح مربعة متساوية ومتساوية الاضلاع
قائمة الزوايا الذي ضلعه الخط المستقيم المطلق يطلق عليه اسم الشيء واحد سطوحه المربع المطلق يطلق عليه اسم
المال فهو الحاصل من ضرب الشيء في مثله ثم ضرب المبلغ في الشيء وقد بين [illegible] اقليدس [illegible] برهن عليه
في [illegible] من مقالته [illegible] من كتابه في الاصول واما مال المال الذي هو عند الجبريين حاصل من ضرب المال
في مثله فلا معنى له في المقادير المتصلة لان المربع الذي هو سطح كيف يمكن ان يضرب في شيء اذ السطح ما له
بعدان وبعدان في بعدين اربعة ابعاد والجسم لا يمكن ان يكون له اكثر من ثلثة ابعاد فجميع الاشيا
التي تخرج بالجبر انما تخرج من هذه الاربعة الاجناس ومن ظن من الناس ان الجبر حيلة في استخراج
الاعداد المجهولة فقد ظن محالا فلا تستغل الظاهر من المختلفين بل الجبر والمقابلة امور هندسية
برهن عليها في مقالة [illegible] من الاصول في شكلي [illegible] واما من قال مال المال ثلثة اموال
ثمنية وعشرين من العدد فضعفنا الاموال وضربه في مثله وزاد عليه العدد واخذ جذر المبلغ فكان
خمسة وستين ونقص منه نصف الاموال فبقي اربعة وهي المال ومال المال ستة عشر فظن ان مال
المال استنبط بطريق الجبر فهو ضعيف الظن جدا لانه لم يستنبط مال المال بل استنبط المال
فكانه مال وثلثة اجذاره يعدل ثمانية وعشرين ثم استخرج الجذر بالمقالة الثانية وصار على
ان ذلك الجذر هو المال وهذا سر نطلع منه على اسرار ونرجع الى ما كنا فيه فنقول ان الثلثة
الاجناس الاولى اعني الاعداد والجذور والاموال عند المعادلة ترجع الى ست مسائل ثلثة مفردة
ثلثة مقترنة ويمكن ان يعلم مجهولاتها بالمقالة الثانية على ما هو مذكور مشروح في كتب الجبريين
واما اذا نظر في المكعب ومعادلته جذورا وبما به واستخرج الى المجهولات وغاية المجهولات و
وتعلقها بالكعب [illegible] مكعبا اما مفردات نحو ثلثة كعب يعدل الاموال وهو الجذر يعدل الاعداد
ومكعب يعدل الجذور وهو اموال يعدل الاعداد ومكعب يعدل الاعداد فلا سبيل الى استخراجه
الا بالطرق العددية المعدة لاستخراج الكعاب واما بالطرق الهندسية التي تعلم بها مجسم متوازي
السطوح مساويا لمجسم آخر متوازي [illegible] طرح [illegible] لتعرف اساميه الاعمال المتعلقة بالعدد

اصفا

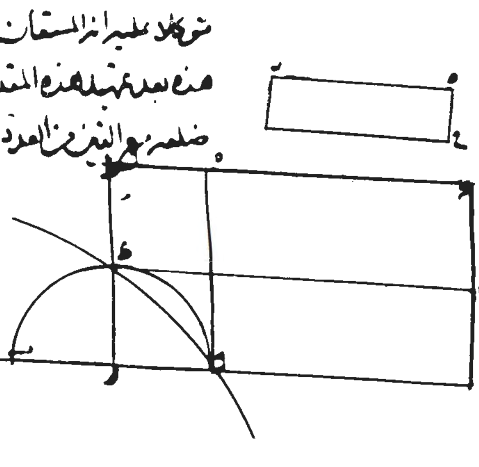
باضطرار الى آلات عند من يعرف المخروطات واما عشرة اشر فهي صنفان اما ثلاثي واما رباعي
فالثلاثي كعب واموال يعدل اعدادا ولا يخرج الا بالقطوع وكعب واموال يعدل جذورا ويكون
حكمه حكم مال وجذور يعدل اعدادا وكعب واعداد يعدل جذورا ولا يخرج الا بالقطوع و
كعب واعداد يعدل اموالا ولا يخرج الا بالقطوع وكعب وجذور يعدل اعدادا ولا يخرج
الا بالقطوع وكعب وجذور يعدل اموالا ويكون حكمه حكم مال وعدد يعدل جذورا واموال
وجذور يعدل كعبا ويكون حكمه حكم جذور واعداد يعدل مالا واموال واعداد يعدل كعبا و
لا يخرج الا بالقطوع وجذور واعداد يعدل كعبا ولا يخرج الا بالقطوع فهذه تسعة انواع ثلاثية
ثلثة منها يخرج بتاثير الاسطقسات وستة منها لا يخرج الا بقطوع المخروط واما الرباعي كعب
يعدل اموالا وجذورا واعدادا كعب وجذور واعداد يعدل اموالا كعب واموال واعداد
يعدل جذورا كعب واموال وجذور يعدل اعدادا كعب ومال يعدل جذورا واعدادا
كعب وجذور يعدل اموالا واعدادا كعب واعداد يعدل اموالا وجذورا فهذه سبعة
انواع رباعية لا يخرج شيء منها الا بقطوع المخروطات فقد حصل من المركبات ثلثة عشر نوعا
لا يخرج الا بقطوع المخروط ونوع من المفردات الا بقطوع المخروط وهو كعب يعدل اعدادا و
اما المتقدمون الرياضيون من غير اهل لساننا فلم ينقل الينا شيء من هذا فلم يصل الينا ولم ينقل
الى لساننا واما المتأخرون من اهل لساننا فاول من اضطر الى صنف ثلاثي من هذه الاصناف
الاربعة عشر هو الماهاني المهندس فانه كان يحل المقدمة التي اخذها ارشميدس مسلمة في شكل
د من مقالة ب من كتاب الكرة والاسطوانة وهو هذا الذي اذكره قال ارشميدس ان خطي
ا ب ب ج معلومي القدر ومتصلان على استقامة ونسبة ب ج الى ج د معلومة فيكون ج د
معلوما على ما تبين في المعطيات ثم قال ويجعل نسبة ب د الى د ج كنسبة مربع ا ج الى مربع
ا د ولم يبين كيف نعلم هذا لان هذا

ج ه ب ا

يحتاج الى قطوع المخروط باضطرار ولم يورد في الكتاب شيئا مبنيا على القطوع الا هذا فاخذ
هذا ايضا مسلما والشكل الرابع هو في قسمة الكرة بسطح مستو على نسبة معلومة وكان انما
يستعمل الفاظ الجبريين للتسهيل فلما ادى التحليل الى اعداد واموال وكعاب متعادلة ولم يمكنه

[illegible]

ان يستخرجه بتقطيع المخروطات ختم القول بان هذا ممتنع فهذا الفاضل مع فضله وتقدمه في هذه
للصناعة استبهم عليه حل صنف من هذه الاصناف حتى نبغ ابو جعفر الخازن وعبر عليه طريقه
الى به في رسالته وابو نصر بن عراق مولى امير المؤمنين من اهل خوارزم كان يحل المقدمة
التي اهملها ارشميدس في استخراج ضلع المسبع في الدائرة وهي المبنية على الصنف المذكور
وكان يستعمل الفاظ الجبريين فادى التحليل الى كعب واموال يعدل اعدادا فاستخرجه
بالقطوع وهذا الرجل لعمري كان من فحول الطبقة في الرياضيات والمسئلة التي عجزت ابا
الكرخي وابا الوفاء البوزجاني وابا حامد الصاغاني وجماعة من اصحابهم الذين كانوا مستظهرين
الى جناب عضد الدولة بمدينة السلام هي هذه عشرة قسمها قسمين فكان مجموع مربعيهما
مع الخارج من قسمة الكثير على القليل اثنين وسبعين عددا فكان يؤدي التحليل الى اموال يعدل
كعبا وجذورا واعدادا وهؤلاء الافاضل كانوا متحيرين في هذه المسئلة مدة مديدة حتى
استخرجها ابو الجود وحملها في خزانة كتب الملوك السامانية فهذه ثلثة اصناف اثنان منها
ثلاثيان وواحد رباعي من المركبات والمفردة الواحدة اعني المكعب الذي يعدل الاعداد وانها
قد استخرجها من تقدمنا من الافاضل ولم يصل الينا منهم كلام في العشرة الباقية ولا في هذا
التفصيل فان تراخت المدة وصحبني التوفيق اودعت هذه الاصناف الاربعة عشر بجميع شعبها
وفروعها وتمييز الممكن منها من الممتنع فان بعض اصنافه مفتقر الى شرائط حتى يصح رسالة شاملة
على عدة مقدمات لها عظيم النفع في اصول هذه الصناعة منحصرا بجملة التي تحتوي من احد
متوكلا عليه انه المستعان على جميع الامور وبه الحول والقوة جلت عظمته ولنرجع الى مسئلتنا
هذه بعد تمهيد هذه المقدمات وهي طلب مكعب يكون مع ما ثلث ضلعه عدلا لعشرين مربع
ضلعه مع اثنين من العدد فنضع خط اب مساويا لعدد المربعات وهو عشرون وخطه ب ج

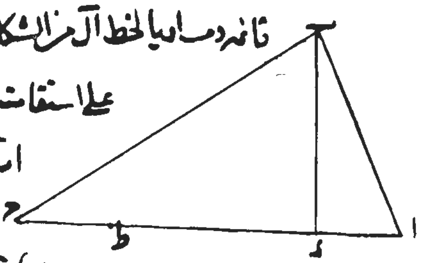


ما الثان وخط اد واحدا فيكون سطح د ج ماتين فنجعل مربعا مساويا
لسطح د ج على ما بين في شكل [illegible] من مقالة [illegible] ويكون ضلع ذلك
المربع مثل اح و اح عمود على اب وهو جذر مائتين و اد هو خارج
القسمة اذا قسم العدد على عدد الجذر وهو عشرة لان العدد ماتين

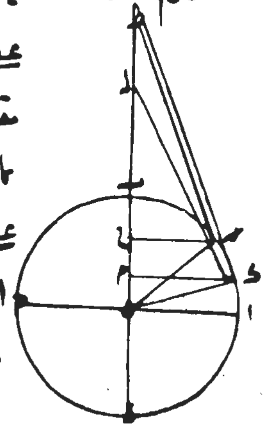
[illegible]

وعدد الجذر ط اثنان واذا قسم الالفان على ما بين يخرج عشرة وهو ت ايضا عشرة ونعمل على آز
نصف دائرة زحز ونخرج زه موازيا لـ آد ونتمم سطح آه ونعمل خطها زايدا يمر على نقطة ز ولا يلقى
خطي آد دة كما بينه ابلونيوس الفاضل في الشكل الثامن من المقالة الاولى من كتاب المخروطات
والشكل ... وقد من المقالة الثانية من ذلك الكتاب اذ هذا العمل لا يتم الا بهذه الاشكال الثلثة و
من قطع ز ... ويقطع الدائرة على نقطة ح ونخرج من نقطة ح عمود ح ك على آت فاقول ان ضلع آك
هو ضلع مكعب يكون مع ما في ضلعه عدد يلزه لعشرين سبع آح مع البينين من العدد ... فلنبين انا
نخرج آح على استقامته حتى يقطع محيط ه على نقطة ط ونخرج ط م موازي آد فلان ... موازي
زه و ... موازي آد يكون سطح آه القائم الزوايا مساويا بسطح ... القائم الزوايا لان نقطتي ...
على محيط قطع زايد لا يلقيانه خطا آد دط وقد خرج من كل واحدة منها خطان الى الخطين
اللذين لا يلقيانه موازيين لسطحيها الخارجين من انعطاف الاقرب وقد برهن عليه ابلونيوس
ايضا في شكل ... من مقالة ب من كتاب المخروطات ودائرة زحز معلومة الوضع لان
قطرها الذي هو زت معلوم الوضع والقدر وخطا آد دط معلوما الوضع ونقطة ... معلومة الوضع
فيكون قطع ز ... معلوم الوضع ودائرة زحز معلومة الوضع فيكون نقطة ح معلومة الوضع
وخط ح ك يكون معلوم الوضع فيكون نقطة ك معلومة الوضع ونقطة آ معلومة الوضع فيكون
آك معلوم القدر وهذه الاشياء ظاهرة من كتاب المعطيات وقد بينا ان سطح آه مثل سطح ... فليلقى
... المشترك يبقى سطح دم مثل سطح ... ونجعل سطح ... مشتركا فيكون سطح آك مساويا لسطح ...
وهما متساويا الزوايا لان زواياهما قوائم فيكون اضلاعهما متكافية ... كما بينه اقليدس
في شكل ... من مقالة ... فيكون نسبة آك الى ... كنسبة ... الى ... فيكون مربعاتها ايضا متناسبة
ونسبة مربع آك الى مربع ... كنسبة مربع ... الى مربع ... ونسبة ... الى ... كنسبة ... الى ...
فيكون نسبة مربع ... الى مربع ... كنسبة ... الى ... فيلزم ان يكون نسبة مربع آك الى مربع
كنسبة ... الى ... فيكون ضرب مربع آك في خط ... مساويا لضرب مربع ... في خط ... ونجعل
... مربع ... في ... مشتركا فيكون ضرب مربع ... في ... مساويا لضرب مربع ... في ... مع مربع
... لكن مربع ... هو مثل عدد الاضلاع اعني ماتين و ... هو ضلع المكعب فيكون ... ضلع

المكعب مساويا لضرب مربع لط في اد وضرب مربع آل في لب وضرب مربع لط في اد مساويا للعدد
كما فرضنا وهو الفان فيكون الفان من العدد وضرب مربع لط في لب مساويا لمال الذي ضلع المكعب
نجعل مكعب آل الذي هو ضرب مربع آل في آل مشتركا فيكون مكعب آل مساويا لالفين من العدد مع
ضرب مربع آل في آل وضرب مربع آل في لب وضرب مربع آل في آب مع ضرب مربع آد في آب هو
مساو لضرب مربع آد في اب واب قد فرضناه عشرين فضرب مربع آد في اب هو عشرون مربع
آد فيكون مكعب آد مع مائتي خط آد مساويا لالفين من العدد مع عشرين مربع ضلع المكعب وذلك
ما اردنا ان نبين ومن بعد ما تقدم هنا فانا نسبت مثلث ابج فنضع آد منطقا وهو عشرة ليكون
دب هو خط آد الذي برهنا على انه معلوم القدر ولسنا نعني بقولي معلوم القدر انه معلوم الكمية
فان بينهما فرقا بل اعني بقولي معلوم القدر ما عنى به اقليدس في كتاب المعطيات وهو الذي يمكن
ان يوجد مثله مساويا له وبالتركيب نضع خط آد عشرة ونضع دب قائما على خط آد على زوايا
قائمة ومساويا لخط آل من الشكل المتقدم ونصل اب ونقيم على نقطة ب عمود بج ونخرج آد
على استقامته حتى يلقى العمود على نقطة ج فبالضرورة يجب ان يكون مثلث
ابج قائم الزاوية اعني زاوية ب منه قائمة ولكون خط اب مع
عمود بد مساويا لخط آد وخط اب مع خط آد مساويا للخط



بج وذلك ما اردنا ان نبين ونعيد مربع دائرة اب من مربع ابج ونخرج فيها قطري آد
بج يتقاطعان على زوايا قائمة على مركز الدائرة نقطة ه ونصل خط جد فمثلث ابج في الشكل
المتقدم خط دج مساويا لعمود بج ونقسم نصف قطر الدائرة الذي هو خط هب من هذا الشكل
على نسبة آد الى ده من مثلث ابج المتقدم كما بينه اقليدس في شكل ع من
مقالة و على نقطة ح ونخرج عمود ح ط ونصل ط ب ونخرج من نقطة ط خطا
موازيا لاب وهو خط ط ك ونخرج هب على استقامته الى ان يلقى خط ط ك
على نقطة ك فيكون مثلث ه ط ك شبيها بمثلث ابج من الشكل المتقدم برهانه
ان زاوية ه ط ك مساوية لزاوية ب آد فان لم يكن فليكن احديهما اعظم
مثل ب آد فنقيم على نقطة ه من خط هب زاوية مثل زاوية ب آد ونمر



وعن

ونخرج من نقطة ز خطا يماس الدائرة وهو ز ح ونخرج ه ط على نقطة آ فيكون مثلث ه ى د شبيها بمثلث
اسع لان زاويتيهما متساويتين ونخرج من نقطة ز عمود ز م على ه ت فيكون ه ى ز م جميعا مساويا لخط
ه آ د و ت مثلث ى يكون س ز مثل ز م ونسبة ا م الى ز م كنسبة د ز الى ز ت فيكون نسبة م ز الى
د ت كنسبة ز م الى د ه وبالتفصيل يكون نسبة م ت الى س ز كنسبة د ه الى ه ز ونسبة ز ا الذي هو
مثل د ت الى ز آ كنسبة س ز الذي هو مثل ز م الى ز ه ففي نسبة المساواة يكون نسبة م الى م ت كنسبة
آ د الى د ه وقد كنا جعلنا نسبة ز الى د ت كنسبة آ د الى د ه فيكون نسبة م الى م ت كنسبة د الى
ده م الاول اصغر من ه ح الثالث يلزم ان يكون م ت الثاني اصغر من ز م الرابع على ما تبين في خامسة
الاصول في شكل يد منها الا انه اعظم هذا خلف فليست زاوية د ح ب اصغر من زاوية م آ د من مثلث آ ح
المتقدم ولا اكبر منها ايضا فيكون مثلث ده ح شبيها بمثلث ا ب د المتقدم فيكون ه ز ى ح جميعا مثل
د ط فيكون س ط مثل ى ح وضرب ز ح في ح ت مثل مربع ح ز وكذلك ضرب ه ح في ح ط مساويا لمربع
ح ز فيكون ضرب ى ح في ح ت مثل ضرب ه ح في ح ت فيكون الخطوط الاربعة متناسبة على ما تبين في
شكل يز منها نسبة ى ح الاول الى ح ه الثاني كنسبة ح ط الثالث الى ح ت الرابع وبالتفصيل
يكون نسبة د ه الى ه ح كنسبة س ط الى ح ت و د ت مثل آ ه و س ط مثل ى ح فيكون نسبة آ ه الى ه ح كنسبة
ى ح الى ح ت وبالتبديل يكون نسبة آ ه الى ى ح كنسبة ه ح الى ح ت فقد عملنا ما نبغي اي تقسيمان على
نقطة ز واخرجنا منها عمود ز ح حتى صارت نسبة آ ه الذي هو نصف القطر الى ح ز كنسبة ه ح
الى ح ت وهذا ما اردنا ان نبين ومن اراد ان يعلم بالحساب فلا سبيل له اليه اذا حاول التحقيق
فان الاشياء التي تستخرج بقطوع المخروطات لا يمكن فيها ان يحلل الى الحساب وان تيسر بالتقريب
فليطلب بجداول الاوتار من كتاب المجسطي او جداول الجيوب والسهام من زيج منه فيطلب قوسا
يكون نسبة ستين الذي هو نصف قطر الدائرة مفروضا الى جيبها كنسبة جيب تمامها الى سهمها وتجد
ذلك القوس قريبا من نح درجة بالاجزاء التي بها الدائرة شس وجيبها نه جزءا ويمكن
سهمها قريبا من كح جزءا وثلث جزء وجيب تمامها نح جزءا وثلثين وثلثي جزء
ان ما انتهى الى التدقيق حتى يبلغ التعادت بحيث لا يحس فهذا هو الذي سنح في هذا المعنى مع تقسم
الفكر وتوزع الخاطر واتصال الاشتغالات عن امثال هذه الجزئيات وبولاشرم المجلس

دام شرفه وحقا انا لذا دام الله تأييده لكن شبهنا في تعريف واسع اذ عماتى بعضه على ما هو اتم
من امثال هذه عنده وهو نصر وفقنا الله والله هو المحمود والمشكور على كل حال ولله ولي العز ان
يوفق للخيرات انه ولي الاجابة تمت الرسالة والصلوة على خاتم الرسالة مسئلة
ربع دائرة آد مفروض على مركز ب ونريد ان نقسم آب بنسبتين كما قد عرفتها فان انزلنا على ب ج مربعا متساوي
الاضلاع والزوايا وهو آه فيكون خطا ب ه معلوم الوضع ونقطة آ
معلومة الوضع فنخرج على نقطة آ قطعا زائدا لا يلقاه خطا ب ه وهو يقطع
آد فيكون معلوم الوضع ونصل آد فهو لا محالة يكون مماسا للقطع وهو في
داخل الدائرة فيلزم ان يقطع القطع الزائد الدائرة فليقطعها على نقطة
فيكون معلومة الوضع ونخرج عمودي د ح ن ح فاقول قد تم العمل بها
ان نقطة ح على محيط القطع وقد اخرج من كل واحد منها خطان الى
القطع موازيان للآخرين فيكون … مساويا لسطح آه ولمقدمة الشكل … مثلثة
هما على ان متشابها الزوايا فيكون اضلاعها متناسبة فنسبة آد الى … كنسبة خط … الى …

ملحقات

(I) مخروطات و قطوع مخروطی

(صفحات ۸۹ - ۹۲ و ۱۵۶ - ۱۵۷)

چون ترجمه‌ها و تحریرهای مخروطات آپولّونیوس بوسیله‌ی ریاضیون اسلامی، تا حدی که نگارنده اطلاع دارد، هیچیك تا کنون چاپ نشده، و از خوانندگان کمتر کسی ممکن است به‌آنها دسترس داشته باشد، و ازطرف دیگر بعضی اشخاص بی اطلاع سخنانی یاوه در تسمیه‌ی قطوع بافته‌اند ✩ که ممکن است سبب گمراهی کسانی که اهل فن نیستند بشود، مناسب دیدیم کــه برای تتمیم فایده توضیحات مختصری در مبادی مخروطات بیاوریم. در آنچه گفته میشود از کتاب **تلخیص المخروطات** ابوالفتح اصفهانـی (قرن چهارم ه ق) و کتاب مخروطات ابوالحسین عبدالملك ابن محمد شیرازی (قرن ششم ه ق) وآثار سر ت. هیث (مخصوصاً کتاب او درتاریـخ ریاضیات در یونان) استفاده شده است.

آپولّونیوس مخروط مستدیر، و به عبارت اصح، دو پرده‌ی سطح مخروطی مستدیر را بطور کلی مکان هندسی خطی مار برنقطه‌ای ثابت (رأس مخروط) و متکی

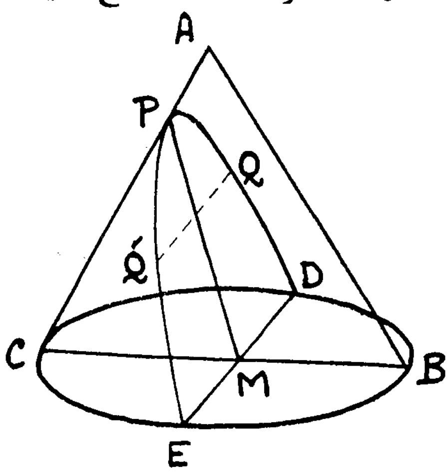
(✩) رجوع شود به: جلال همایی، **کتاب التفهیم**، تهران (۱۳۱٦ - ۱۸)، ذیل‌شماره‌ی ٤ صفحه‌ی ۲۸، که در آن گفته شده است: « دوم قطع مکافی . . . و آنرا مکافی خوانند از این جهت که **برای بدست‌آوردن مخروط از سهمی نباید چیزی کم کرد و نه چیزی افزود** [!] . . . سوم قطع زاید آنست که قاطع یك ضلع با قاعده‌ی مخروط باشد [!] . . . این قسم را زاید گویند برای‌آنکه **باید چیزی افزود تاتبدیل به مخروط شود** [!] . . . چهارم قطع ناقص‌آنست که قاطع دوضلع باشد بدون قاعده [!]، و اینجا شکل بیضی پیدا میشود، **و ازاوچیزی بایدکاست تا مخروط بدست‌آید** [!] ».

معذلك، نویسنده‌ی این اراجیف « مخروطات ابلونیوس » را جزء «مآخذ نگارنده درتصحیح و توضیحات » قلمداد کرده است (صفحه‌ی « قکح » در مقدمه‌ی همان کتاب).

بر دایره‌ای مفروض (قاعده) تعریف میکند. **سهم** یا **محور** مخروط خط واصل بین رأس و مرکز قاعده است، و اگر این خط بر صفحه‌ی قاعده عمود باشد مخروط قائم و الا مایل است.

فصل مشترك مخروط با صفحه‌ای مار بر محور آن مثلثی است که قاعده‌اش قطری از قاعده‌ی مخروط است، و چنین مثلثی مثلث محوری مخروط است.

سپس، آپولّونیوس در هر مخروط مستدیر دو رشته صفحه‌ی قاطع مشخص میکند که مقاطع آنها با مخروط دایره است: یکی صفحات موازی قاعده، و دیگر صفحاتی که نسبت به صفحه‌ی قاعده متقابل‌اند. آنگاه به تعریف سهمی و هذلولی و بیضی بوسیله‌ی مقاطع مخروط مستدیر میپردازد، وبرای این منظور، **صفحه‌ی قاطع را چنان میگیرد که فصل‌مشترك آن باقاعده‌ی مخروط برقاعده‌ی مثلث محوری عمود باشد** ☆. و مقدمةً ثابت می‌کند که **در این صورت، فصل مشترك صفحه‌ی قاطع با مثلث محوری قطری است ازمقطع نظیر امتداد فصل مشترك**



صفحه‌ی قاطع با قاعده‌ی مخروط. بعبارت دیگر، اگر A رأس مخروط، ABC مثلث محوری آن، DE (که بر BC عمود فرض می‌شود) فصل مشترك صفحه‌ی قاطع

(☆) این قید خللی درکلیت احکام وارد نمیکند، چو هرگاه مخروط و صفحه‌ی قاطعی مفروض باشد، همواره میتوان مثلث محوری را چنان انتخاب کرد که شرط مورد بحث برقرارشود.

با قاعده‌ی مخروط ، و PM فصل مشترك صفحه‌ی قاطع با مثلث محوری باشد ، خط PM هر وتری از مقطع را مانند QQ' کـه موازی DE باشد نصف مـی کند . ضمناً آپولّونیوس تذکر میدهد که اگرمخروط قائم باشد DE برPM عمود است ، ولی اگر مخروط مایل باشد ، فقط وقتی DE بر PM عمود است که صفحه‌ی مثلث محوری بر قاعده‌ی مخروط عمود باشد .

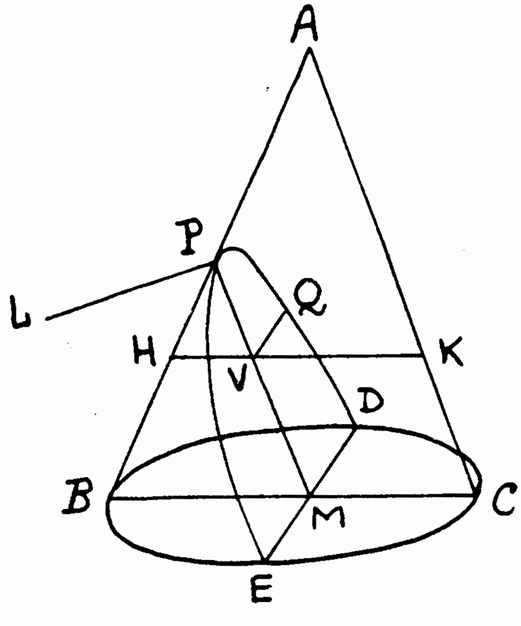
اینك پرده‌ی ABC ازمخروط مستدیری به رأس A وقاعده‌ی BC را اختیار کرده سایر حروف را نیز بهمان طریق که ذکرشد تعریف میکنیم ، و مانند گذشته ، ED را عمود بر BC میگیریم . سه حالت ممکن است اتفاق افتد :

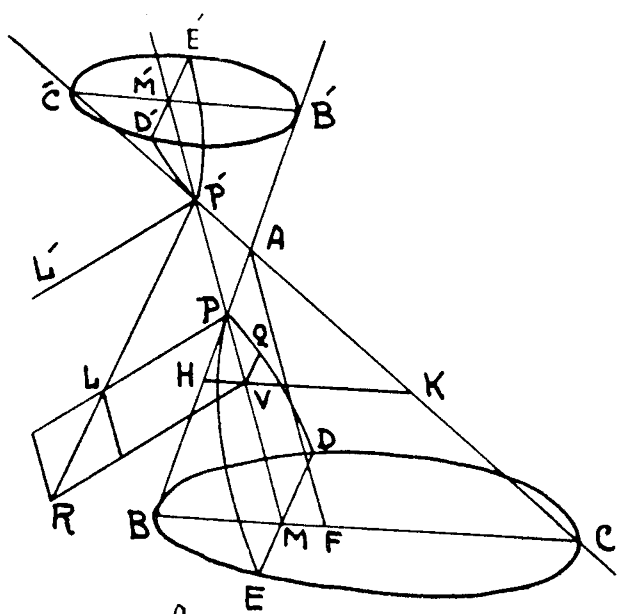
(I) PM موازی AC است ؛

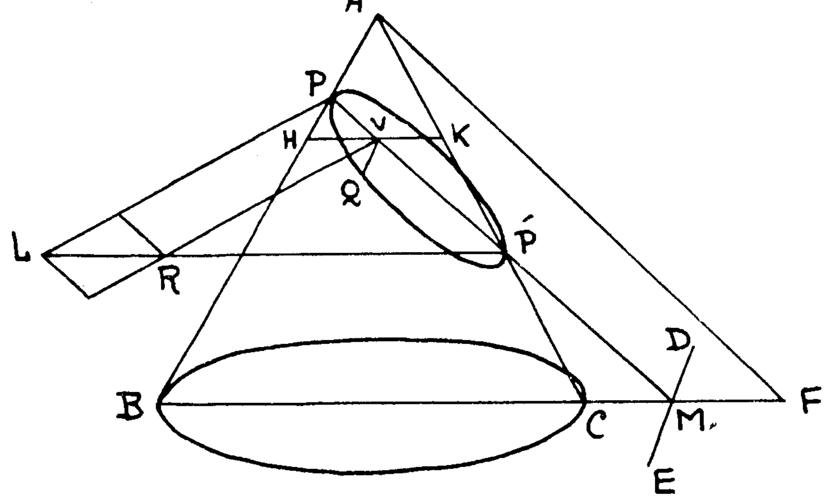
(II) PM پرده‌ی **دیگر** مخروط را درنقطه‌ای مانند P' قطع میکند .

(III) PM **همین** پرده‌ی ABC از مخروط را در نقطه‌ی دیگری مانند P' قطع می کند .

در حالات II و III ، خط AF را بموازات PM میکشیم ، و در هر سه حالت از







نقطه‌ی P خط PL را در صفحه‌ی مقطع بـر PM عمود میکنیم ، و بر آن طول PL را **در حالت I** از روی

$$PL : PA = \overline{BC}^2 : (BA \cdot AC)\,, \qquad \text{(الف)}$$

و **در حالات II** و III از روی

$$PL : PP' = (BF \cdot FC) : \overline{AF}^{2} \qquad (ب)$$

جدا می کنیم .

اینك فرض کنیم Q نقطه‌ی دلخواهی ازمقطع باشد . QV را موازی DE میکشیم تا قطرPM را در V قطع کند . در حالات II و III ، خط VR را موازی PL میکشیم تا P'L را در R قطع کند . در هرحال ، اگر از V خط HK را بموازات BC بکشیم ، HK قطر مقطع مستدیر مخروط بوسیله‌ی صفحه‌ی QHK است ، و لهذا

$$\overline{QV}^{2} = HV \cdot VK . \qquad (ج)$$

پس از ذکر این مقدمات گوئیم ✩

در حالت I ، $\overline{QV}^{2} = PL \cdot PV$.

در حالات II و III ، $\overline{QV}^{2} = PV \cdot VR$.

برهان حالت I . بالبداهه

$$HV : PV = BC : CA ,$$
$$VK : PA = BC : BA .$$

پس بموجب (ج) و (الف) .

$$\overline{QV}^{2} : (PV \cdot PA) = (HV \cdot VK) : (PV \cdot PA)$$

(✩) بیان و استدلال آپولونیوس بسیار طولانی است . مثلاً در حالت I ، که ساده ترین حالات است ، حکم را چنین بیان میکند :

« فرض کنیم مخروطی را صفحه‌ای مار برمحور آن قطع کند ، وفرض کنیم صفحه‌ی دیگری نیز مخروط را قطع کند بطوری که این صفحه قاعده‌ی مخروط را بر خط مستقیمی عمود برقاعده‌ی مثلث محوری قطع کند ، و بعلاوه فرض کنیم قطر مقطع موازی یکی از اضلاع مثلث محوری باشد. درین صورت ، اگر خطی از مقطع مخروط به موازات فصل مشترك صفحه‌ی قاطع وقاعده‌ی مخروط تا قطر مقطع رسم شود ، مربع آن مساوی خواهد بود با مستطیل محدود به قطعه‌ای که این خط در طرف رأس مقطع [P] از قطر جدا میکند و خط مستقیم دیگری ؛ نسبت این خط مستقیم به قطعه‌ی مفروض بین رأس مخروط و رأس مقطع همان نسبتی است که مربع ساخته شده بر قاعده‌ی مثلث محوری به مستطیل محدود به دو ضلع دیگر مثلث دارد . و چنین مقطعی « مکافی » خوانده میشود . »

$$= \overline{BC}^2 : (CA \cdot BA)$$
$$= PL : PA$$
$$= (PL \cdot PV) : (PV \cdot PA)$$

بالنتیجه $\overline{QV}^2 = PL \cdot PV$ ، و هوالمطلوب .

برهان حالات II و III . از

$$HV : PV = BF : FA ,$$
$$VK : P'V = FC : AF ,$$

با توجه به (ج) و (ب) ، خواهیم داشت :

$$\overline{QV}^2 : (PV \cdot P'V) = (HV \cdot VK) : (PV \cdot P'V)$$
$$= (BF \cdot FC) : \overline{AF}^2$$
$$= PL : PP'$$
$$= RV : P'V$$
$$= (PV \cdot VR) : (PV \cdot P'V) .$$

پس $\overline{QV}^2 = PV \cdot VR$ ، و هوالمطلوب .

چنانکه ملاحظه می‌شود ، درحالت I مربع QV مساوی مستطیلی است مضاف ☆ بر PL که ضلع دیگرش PV باشد ، و چنانکه سابقاً گفتیم ، یونانیان از این نوع اضافه به لفظ **پارابوله** تعبیر می‌کرده‌اند .

در حالت II ، مستطیل مضاف بر PL و مساوی $\overline{QV}^2$ بقدر مستطیل LR ــ که متشابه و متشابه الوضع با مستطیل $PL \times PP'$ است ــ بر مستطیل مضاف بر **تمام** خط PL زاید است . پس در این حالت ، اضافه از نوع **هوپربوله** است .

بالاخره ، در حالت III ، اضافه از نوع **الّیپسیس** می‌باشد .

چنانکه سابقاً گفته شد ، اسامی قطوع مخروطی ناشی از نوع اضافه‌ای است که در تعریف آنها پیش‌می‌آید ، و الفاظ **قطع مکافی** ، **قطع زاید** ، و **قطع ناقص** که ریاضیون

(☆) رجوع شود به صص ۸۵ ــ ۸٦

اسلامی بر این منحنیات نهاده‌اند ترجمه‌ی دقیقی از اصطلاحات یونانی است ✿ .

در هرحال ، خط PL **ضلع قائم** قطع نامیده می‌شود . بعلاوه ، در قطوع زاید و ناقص ، 'PP **ضلع مایل** و PL **ضلع مُنتصِب** نیز خوانده میشود .

بالاخره ، اگر p ضلع قائم و d قطر نظیر آن باشد ، معادلات سابق الذکر قطوع سه‌گانه نسبت به محورهای PL و PM چنین خواهد بود :

قطع مکافی	$y^2 = px$
قطع زاید	$y^2 = px + \frac{p}{d} x^2$
قطع ناقص	$y^2 = px - \frac{p}{d} x^2$

(II) عرب ، ریاضیون عرب ، منجمین عرب ، و غیره .

(ذیل † صفحه‌ی ۱۲۵)

نگارنده با اینکه همواره کوشش داشته است که ، مخصوصاً در طریق کسب علم ، روان خود را به تعصبات باب روز نیالاید ، از ذکر این نکته ناگزیر است که توجیه محققین فرنگی برای استعمال لفظ عرب بمعنی **عربی نویس** یا **کسی که اغلب آثار علمی او بزبان عربی است** غیر موجه بنظر می‌رسد . بعنوان نمونه استدلال وپکه و نالینو را در این باب نقل می‌کنیم .

وپکه درمقاله‌ی خود ، تحت عنوان « بحث در دو روش عربی ✿ درتعیین مقداری تقریبی برای «Sin 1°» ، که در صفحات ۱۵۳-۱۷٦ جلد نوزدهم مجله‌ی **ریاضیات خالص**

(✿) ابوالفتح اصفهانی در تعریفات مذکور در اوایل مقاله‌ی اول **تلخیص المخروطات** گوید :
« فان‌کان محور القطع [PM] موازیا لاحد اضلاع مثلث المخروط [= مثلث محوری] فالقطع یسمی **بارابولی** ای **المکافی** .... فان‌کان محور القطع والضلع الآخرمن مثلث المخروط یلتقیان اذا اخرجا داخل زاویةمثلث المخروط فالقطع یسمی **الیبسیس** ای **الناقص** ... و ان‌کان التقاؤهما خارج زاویة المثلث فان السطح القاطع یقطع المخروطین معا و یحدث فی کل واحد منهما قطعا یسمی کل واحد منهمابانفراده **اوبربولی** ای **الزائد** . »

(✿) méthodes arabes . البته مقصود روش « ریاضیون عرب » است ، ولی نگارنده نخواست هیچگونه تصرفی در گفته‌ی وپکه بکند .

و آلی ✩ (مورخ ۱۸۵٤) درصفحه‌ی ۱۵٤ آن مندرج است ، چنین می‌نویسد :

« این روشها ، کـه در شرح چلبی † بسط داده شده ، از خود این ریاضیدان نیست ، بلکه از **الغ بیگ** یا از دیـگر **ریاضیون ایرانی** است ، و من در این باب [خواننده را] به تفصیلاتی که چلبی خود آورده است حوالت می کنم . برای احتراز ازتکرار، بدون تمییز آنها را روشهای چلبی می‌خوانم ، بدین معنی که این ریاضیدان آنها را عرضـه نموده است . همچنین ، این روشها را **عربی** مینامم ، زیرا نجوم و ریاضیات نزد ایرانیان بالاصاله جزء همان‌بسط عظیم علوم دقیقه است که ازامپراطوری عربی خلفا سرچشمه گرفته است . » [!]

و اما نالینو ، در « محاضره‌ی دوم » از کتاب معروف خود ، بنام **علم الفلك** ، در صفحات ۱٦-۱۷ آن کتاب ، گوید :

«ولی هر گاه از عصرهای بعد از قرن اول هجری سخن گفته شود ، این لفظ [یعنی لفظ عرب] را بمعنی اصطلاحی آن گرفته به تمام ملل و اقوام ساکن ممالك اسلامی اطلاق می کنیم که در بیشتر تألیفات علمی خود زبان عربی بکار برده‌اند . پس ایرانیان و هندیان و ترکها و مردم سوریه و مصریها و بربرها و اندلسیها و غیره ــ که در زبان علمی و درتابع دولتهای اسلامی بودن وجه مشترك داشته‌اند ــ تحت اسم عرب می‌آیند . و اگر بر اینها لفظ عرب اطلاق نکنیم ، تقریباً نمی‌توانیم از علم هیئت در نزد عرب سخن گوئیم ، زیرا عده‌ی کسانی از اولاد قحطان و عدنان کـه درین علم مهارت داشته‌اند اندك است » . [!]

(III) تاریخ وفات غیاث الدین جمشید کاشانی

(ذیل ✩ صفحه‌ی ۱۳٤)

تاریخ مذکور درموضع فوق‌الذکر بغلط ۸۳۰ چاپ شده ، و۸۳۲ صحیح است .

(✩) Journal de Mathématiques pure et appliquées .

(†) مقصود کتاب **دستور العمل و تصحیح الجدول** است درشرح زیج الغ بیگ ، ازمحمود ابن محمد قاضی زاده ، معروف به میرم چلبی (متوفی در ۹۳۱ ه ق) .

در جزء کتابهای خطی کتابخانه‌ی مرکزی دانشگاه تهران مجموعه‌ای است از رسائل و یادداشتهای ریاضی، به شماره‌ی ۱۷۹۵، که قست اول آن **مفتاح الحساب** غیاث الدین است، و در صفحه‌ی آخر این قسمت عبارت ذیل مشاهده می‌شود: «وفات مولانای اعظم مولانا غیاث الدین طیب الله مضجعه در اول روز چهارشنبه نوزدهم شهر رمضان المبارك سنه ۸۳۲ هجریه خارج بلده سمرقند بموضع رصد».

(IV) تحلیل و ترکیب

(ذیل صفحه‌ی ۱۵۳)

در جزء عکسهایی از بعضی رسائل ریاضی دوره‌ی اسلامی که به همت دانشمند ارجمند آقای مهندس صفی اصفیا از کتابخانه‌ی مدیچئا لاورنتسیانا (✲)، در شهر فلورانس ایتالیا، بدست نگارنده رسیده رساله‌ی جالبی است به زبان فارسی تحت عنوان **رسالة للشیخ الرئیس شرف الدین تاج الزمان الحسین بن حسن السمرقندی (†) فی طریق المسایل العددیه**.

این رساله، چنانکه از اسمش نیز استنباط می‌شود، در روشهای حل مسائل عددی است، و مؤلف طرق مختلف را به اجمال شرح میدهد، و امثله‌ای در توضیح آنها می‌آورد. درباب «تحلیل و ترکیب» گوید:

«طریق تحلیل و ترکیب. اما طریق آنست که مطلوب را بر غایت و کمال فرض کنند و نگاه دارند و اگر حاجت آید واسطه‌ای در میان می‌فکنند تا آنگاه که به لازمی رسد یا به لوازم که ایشان معلوم باشند؛ پس این لوازم را عکس کنند مطلوب حاصل آید. و مران طلب کردن لوازم را تحلیل گویند، و مرین عکس

(✲) Biblioteca Medicea Laurenziana

مجموعه های مذکور در متن مجموعه های شرقی شماره های ۲۲، ۳۸، و ۱۱۸ این کتابخانه است.

(†) شرف الدین حسین ابن حسن سمرقندی این رساله را در ۶۳۲ هـ ق بپایان رسانیده است. مثلاً رجوع شود به: ستوری، **تألیفات فارسی** (Persian Literature)، جلد دوم، جزء اول، لندن ۱۹۵۸، صص ۵ ـ ۶.

کردن را ترکیب گویند ، و اگر تحلیل به لازمی رسد که آن لازم محال باشد مسئله را ممتنع گویند ، و اگر هیچ لازم محال نباشد مسئله را ممکن گویند » .

(V) استقراء

(ذیل × صفحه‌ی ۱۶۶)

در باب استعمال این لفظ در ریاضیات ، شاید ذکر این مطلب خالی از فاید نباشد که در کتاب فخری (۳۰۴۰۵۰۷§ ، ص ۱۵۷) فصلی تحت عنوان **ذکر الاستقراء** هست بدین مضمون ☆ :

« الاستقراء فی‌الحساب ان تردّ علیك جملة من نوع او من نوعین او ثلثة انواع متوالیة و تکون تلك الجملة غیرمربعة منجهة ما یدلّ علیه اللفظ و تکون فی‌المعنی و القوه مربعة و انت ترید ان تعرف جذرها » .

و در توضیح این مطلب مسئله‌ی تعیین عددی را میآورد که مجموع مربع آن با چهار برابرش مجذور کامل باشد . این مسئله به معادله‌ی $x^2 + 4x = y^2$ برمیگردد ، که درآن ، اگر چه $x^2 + 4x$ صورةً مجذور کامل نیست ، از حیث مقدار مربع کامل فرض می‌شود . کرخی ، برای حل مسئله ، مقداری برای y جستجو میکند که چون آنرا در معادله قرار دهیم معادله‌ای بین دو مرتبه‌ی متوالی حاصل شود . بازاء $y = 2x$ خواهیم داشت $4x = 3x^2$ ؛ پس $x = 4/3$. بازاء این مقدار ، $x^2 + 4x = 64/9$ ، وآن مجذور کامل است ، و جذرش ۸/۳ است . نیز بازاء $y = x - 1$ مقدار $x = 1/6$ حاصل

(☆) ویکه ، **فخری** ، ص ۷۲ ـ ۷۳ .

و نیز برگ ۹۵ نسخه‌ی عکسی مجموعه‌ای از رسائل ریاضی (از جمله کتاب **فخری**) که فیلم آن به شماره‌ی ۳۶۱ در کتابخانه‌ی مرکزی دانشگاه تهران موجود است .

این فیلم جزء مجموعه ی گرانبهای فیلمهایی است که به کوشش استاد علامه ، آقای مجتبی مینوی ، از کتابخانه‌های مختلف ترکیه برای دانشگاه تهران تهیه شده ، و در کتابخانه‌ی مرکزی آن دانشگاه مخزون است . اینکه آقای مینوی ، در انتخاب نسخ ، آثار علمی را از نظر دور نداشته‌اند حاکی از وسعت نظر ایشان و درخور ستایش است . همچنین ، کوشش اولیاء محترم کتابخانه‌ی مرکزی دانشگاه در برآوردن حاجت طلاب علم و فراهم آوردن تسهیلات برای ایشان در استفاده ازآثار گرانبهایی که درآن کتابخانه مخزون است ازهر جهت درخور تقدیر است.

می گردد که بازاء آن $x^۲ + ٤x = ۲٥/۳٦$.

بطوری که دیده میشود ، حل معادله بوسیله‌ی تجسس و امتحان مقدار مناسبی برای y انجام گرفته است ، ومقصود از استقراء همین جستجوی‌مقداری مناسب‌است .

(VI) 

(صفحه‌ی ۲٥٥ و نیز صفحه‌ی ٥۹)

سالهای هجری قمری از سنه‌ی ٥٥٥ تا ٦٥٥ کـه در آنها بیست و سوم ربیع الاول بر طبق حساب (و نه برحسب رؤیت هلال) یکشنبه است عبارتست از سنوات

٥۰٤, ٥۰۷, ٥۱۲, ٥۲٥ , ٥۲۸,
٥۳٦, ٥٤٤, ٥٥۲, ٥٦٥ , ٥٦۸,
٥۷٦, ٥۸٤, ٥۹۲, ٦٥٥ .

تاریخ مذکور در پایان رساله‌ی جبرخیام ، یعنی علامتی که بجای تاریخ‌گذاشته شده ، و ظاهراً به شمار سیاق نوشته شده ، بظن قوی « ٥۲؟ » است ، ولـی جزء اول علامت مذکور با هیچیك از ارقام ٥ و ۸ که در رشته‌ی اعداد فوق‌آمده ظاهراًمطابقت ندارد . از طرف دیـگر، ۲۳ ربیع‌الاول سال ٥۲۳ ه ق، به حساب رؤیت، یـکشنبه است و بنابراین ، بظن قوی ، تاریخ مذکور ٥۲۳ است . بخصوص کـه در رسم الخط قدیم سیاق ، بسیاری از کتّاب رقم ۳ را بشکل جزء اول علامت مورد بحث می‌نوشته‌اند .

ارقام و مطالب مذکور از افادات دوست فاضل آقای احمد منشی زاده است ، که یك **تقویم دائمی و تطبیقی** در پنج ورق بر اساس نوموگرافی اختراع کرده است ، که مشتمل است بر (۱) تقویم مسیحی از ابتدای میلاد الی سال ۲۷۸٥ میلادی ؛ (۲) تقویم هجری قمری از ابتدای هجرت تا سنه‌ی ۲٥۹٥ ه ق ؛ (۳) تقویم هجری شمسی ازابتدای هجرت تا سال ۲۱٥٥ ه ش. بعلاوه ، بوسیله‌ی همین پنج ورق با کمال آسانی می‌توان تواریخ را از تقویمی به تقویم دیـگر تبدیل کرد .

مآخذ*

ابن الندیم، الفهرست، مصر، ۱۳۴۸ هـ ق.

ابن خلدون، مقدمه، طبع م. کاترمر، جلد اول، قسمت سوم، پاریس، ۱۸۵۸.

اقبال آشتیانی، عباس، راجع به احوال حکیم عمرخیام نیشابوری، مجلهٔ شرق، دورهٔ اول، شمارهٔ ۸، مرداد ۱۳۱۰ هـ ش.

بروکلمان (رجوع کنید به Brockelmann).

تاریخ الحکماء [عنوان اصلی: کتاب اخبار العلماء باخبار الحکماء، للوزیر جمال الدین ابی الحسن علی ابن القاضی الاشرف یوسف القفطی]، مصر، ۱۳۲۶ هـ ق.

تحریر اقلیدس (تحریر کتاب اقلیدس در اصول هندسه، بتوسط خواجه نصیر الدین طوسی)، تهران ۱۲۹۸ هـ ق.

تقی زاده، سید حسن، تاریخ علوم دراسلام، چاپ دوم، تهران. این کتاب دروس دانشکدهٔ معقول و منقول است، و چاپ اول آن دروس «ماههای آخر سال ۱۳۳۱ هجری شمسی... و دنبالهٔ آن دروس در سال ۱۳۳۲» است (صفحهٔ اول چاپ اول). از این کتاب در کتاب حاضر به عنوان دروس یاد شده است.

دانش پژوه، محمد تقی، فهرست کتابخانهٔ اهدائی آقای سید محمد مشکوة به کتابخانهٔ دانشگاه تهران، جلد سوم، بخش دوم، تهران ۱۳۳۲ هـ ق.

دایرةالمعارف اسلام (انگلیسی؛ عنوان اصلی The Encyclopaedia of Islam)، چاپ اول، چهار مجلد (ویك جلد ضمیمه)، ۱۹۱۳ - ۱۹۳۴، لیدن و لندن؛ چاپ جدید، جلد اول (فقط تا کنون چاپ شده است)، لیدن، ۱۹۶۰.

(*) اسامی اهم کتابها و نشریاتی که بمناسبتی نام آنها در کتاب حاضر آمده در آخر کتاب در **فهرست عمومی الفبائی** مندرج است، وچون اسامی مذکور در این فهرست با **حروف ۸ سیاه** چاپ شده به آسانی میتوان آنها را یافت.

روزنفلد، ب. ا.، سگال، و. س.، و یوشکویچ، ا. پ.، مفتاح الحساب و الرسالة المحیطیه، از غیاث الدین جمشید کاشانی، متون و ترجمه‌ی روسی بـا حواشی و مشتمل بر ترجمه‌ی روسی رسالـه‌ی دستورالعمل وتصحیح الجدول (از میرم چلبی)، مسکو، ۱۹۵۶.

سارتن، مدخل (رجوع کنید به Sarton).

سمیث، تاریخ (رجوع کنید به Smith).

فرهاد میرزا، معتمدالدوله، کنزالحساب (ترجمه‌ی فارسی‌وشرح خلاصة الحساب شیخ بهائی)، تهران، ۱۲۷۹ ه ق.

کاشانی، غیاث الدین جمشید، مفتاح الحساب، تهران ۱۳۰۶ ه ق؛ مشتمل‌بر بعضی‌آثار دیگرغیاث الدین جمشید.

محمد بن موسی‌الخوارزمی، کتاب الجبر والمقابله، باهتمام علی‌مصطفی مشرفه و محمد مرسی احمد، مصر، ۱۹۳۷.

مصاحب، غلامحسین، جبر و مقابله‌ی خیام، تهران ۱۳۱۷ ه ش.

معطیات، تهران، ظاهراً حدود ۱۳۰٤ ه ق. (قسمت آخر مجموعه‌ای از رسائل ریاضی که با «اُکَر ثاوذوسیوس» آغاز میشود).

معین، دکترمحمد، چهارمقاله عروضی سمرقندی، تهران ۱۳۳۳–۳۵ ه ش.

نالینو (Alfonso Carlo Nallino)، علم الفلك، تاریخه عندالعرب فی‌القرون الوسطی، رم، ۱۹۱۱. (اسم مؤلف در آن «کرلو نلّینو» ضبط شده است).

وپکه، جبرعمرخیام (رجوع کنید به Woepcke).

وپکه، فخری (رجوع کنید به Woepcke).

هیث، تاریخ (رجوع کنید به Heath).

هیث، سیزده مقاله (رجوع کنید به Heath).

☆ ☆ ☆

Brockelmann, Carl, *Geschichte der arabischen Literatur,* Vol I, 1943; Vol II, 1949. Leiden.

Eecke, Paul Ver, *Diophante d'Alexandrie, Paris, 1959* .

Heath, Sir Thomas, *A History of Greek Mathematics*, 2 vols. Oxford, 1921.

(در کتاب حاضر بعنوان « هیث ، تاریخ» از آن نام برده‌ایم) .

Heath, Sir Thomas L., *The Thirteen Books of Euclid's Elements,* 3 vols. New York, 1956.

(در کتاب حاضر بعنوان « هیث ، سیزده مقاله » از آن اسم برده‌ایم) .

Heath, T. L. (Sir Thomas L. Heath) , *The Works of Archimedes,* New York.

Karpinski, Louis C., *Robert of Chester's Latin Translation of the Algebra of al-Khowarizmi,* New York, 1915.

Kasir, Daoud S., *The Algebra of Omar Khayyam,* New York City, 1931.

Montucla, J. E., *Histoire des Mathématiques,* tome premier, Paris, 1758.

Newman, James R., *The World of Mathematics,* vol. I, New York, 1956.

Sarton, Georges, *Introduction to the History of Science,* vol I, 1950; vol II & III (each in 2 parts), 1953. Baltimore.

Sédillot, L., *De l'algèbre chez les Arabes,* Journal asiatique, 5iéme série, tome II, 1853, p. 323-356.

Smith, D. E., *History of Mathematics,* 2 vols. Vol I, 1951; Vol II, 1953. U. S. A.

(در کتاب حاضر بعنوان « سمیث ، تاریخ » از آن نام برده‌ایم) .

Storey, C. A., *Persian Literature,* Vol II, part I, London, 1958.

Story, W. E., *Omar Khayyam as a Mathematician,* Boston, 1918.

Suter, H., *Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke,* Leipzig, 1900.

Tirtha, Swami Govinda, *The Nectar of Grace,* Omar Khayyam's life and works, Allahabad, 1941.

Woepcke, F., *L'Algèbre d' Omar Alkhayyami,* Paris, 1851.

(در این کتاب بعنوان « وپکه ، جبرعمرخیام » ازآن نام برده‌ایم) .

Woepcke, F., *Discussion de deux méthodes arabes pour déterminer une valeur approchée de sin* 1°. Journal de mathématiques pures et appliquées, Tome XIX, 1854, p. 153 _ 176.

Woepcke, F., *Extrait du Fakhri,* Paris, 1853.

(در کتاب حاضربعنوان « وپکه ، فخری » ازآن نام برده‌ایم) .

فهرست

عمومی الفبائی

(۱) برای اینکه عناوین مورد نظر را به آسانی بتوان در این فهرست یافت، عناوین مختلف با حروف مختلف چاپ شده است: **مطالب و اصطلاحات باحروف درشت سیاه**؛ اعلام و امکنه و مؤسسات با حروف متن کتاب؛ **اسامی کتابها و رسالات و غیره با حروف ریز سیاه.**

(۲) ⟵ علامت ارجاع است.

(۳) ارقام شماره‌ی صفحات است (برای تسهیل چاپ، رقم صفر مطابق‌معمول با نقطه نمایش داده است، چنانکه در شماره گذاری صفحات کتاب نیز بهمین‌نحوعمل شده). حرف «ن» اشاره به ذیل صفحات است. علامت «+» حاکی ازاینست که عنوان مورد نظرهم در متن و هم در ذیل صفحه آمده است.

در ارقام کسری، مخرج اشاره به متون آثار خیام (قسمتهای اول ودوم کتاب حاضر) و صورت اشاره به ترجمه‌ی فارسی آنهاست. وقتی عین لفظی که درمتن آمده در ترجمه تکرار نشده (بلکه نقل بمعنی شده است)، رقم مربوط به ترجمه را در پرانتز قرار داده‌ایم، و بالعکس. بالاخره، مطالب عکس **رساله‌ی تحلیل** خیام (صص ۲۸۲ - ۲۹۲)، که قبلا در جزءِ مطالب قسمت دوم در این فهرست آمده، درفهرست مکرر نشده است.

(۴) معمولا در مواردی که عنوانی نسبةً زیاد تکرار شده، مواضعی را که اهمیت بیشتری دارد یا مطالب آن جامعتر است با ارقام سیاه متمایز کرده‌ایم.

(۵) اصطلاحات خارجی (تقریباً همه یونانی یا لاتینی) با علامت «✩» متمایز شده‌است. این علامت درمورد اعلام بکار نرفته است.

✩ ✩ ✩

شماره	فهرست انتشارات انجمن آثار ملی	تاریخ انتشار
۱	فهرست مختصری از آثار وابنیه تاریخی ایران	شهریور ماه ۱۳۰٤
۲	آثار ملی ایران (کنفرانس پرفسور هرتسفلد)	مهرماه »
۳	شاهنامه وتاریخ (کنفرانس پرفسور هرتسفلد)	شهریور ماه ۱۳۰۵
٤	کشف دولوح تاریخی در همدان (تحقیق پرفسورهرتسفلد) ترجمه‌آقای مجتبی مینوی	اسفند ماه »
۵	سه خطابه دربارهٔ آثار ملی و تاریخی ایران (از آقایان فروغی ، هرتسفلد وهانی بال)	مهر ماه ۱۳۰٦
٦	کشف الواح تاریخی تخت جمشید (پرفسور هرتسفلد)	بهمن ماه ۱۳۱۲
۷	کنفرانس‌آقای فروغی راجع بفردوسی	بهمن ماه ۱۳۱۳
۸	تحقیق مختصر در احوال وزندگانی فردوسی (بقلم فاطمه خانم سیاح)	۱۳۱۳
۹	تجلیل ابوعلی سینا در پنجمین دوره اجلاسیه یونسکو در فلورانس	اسفند ماه ۱۳۲۹
۱۰	رسالهٔ جودیه ابن سینا (بتصحیح آقای دکتر محمود نجم آبادی)	» ۱۳۳۰
۱۱	رسالهٔ نبض ابن سینا (بتصحیح آقای سید محمد مشکوه استاد دانشگاه)	» ۱۳۳۰
۱۲	منطق دانشنامه علائی ابـن سینا (بتصحیح آقایان دکتر محمد معین وسید محمد مشکوه استادان دانشگاه)	» ۳۱۳۱
۱۳	طبیعیات دانشنامه علائی ابن سینا (بتصحیح آقای سید محمد مشکوه استاد دانشگاه)	» ۱۳۳۰
۱٤	ریاضیات دانشنامه علائی ابن سینا (بتصحیح آقای مجتبی مینوی استاد دانشگاه)	» »
۱۵	الهیات دانشنامه علائی ابن سینا (بتصحیح آقـای دکتر محمد معین استاد دانشگاه)	» ۱۳۳۱
۱٦	رساله نفس ابن سینا (بتصحیح آقـای دکتر موسی عمید استاد دانشگاه)	» »
۱۷	رساله درحقیقت و کیفیت سلسله موجودات (بتصحیح آقای دکتر موسی عمید استاد دانشگاه)	۱۳۳۱
۱۸	ترجمه رساله سرگذشت‌ابن‌سینا (ازآقای دکتر غلامحسین صدیقی استاد دانشگاه)	-
۱۹	معراج نامه‌ابن سینا(بتصحیح‌آقای‌دکترغلامحسین‌صدیقی)	-
۲۰	رساله تشریح اعضاء ابن سینا (بتصحیح آقای‌دکترغلامحسین صدیقی استاد دانشگاه)	-

شماره	فهرست انتشارات انجمن آثار ملی	تاریخ انتشار
۲۱	رساله قراضه طبیعیات منسوب بابن سینا (بتصحیح آقای دکترغلامحسین صدیقی استاد دانشگاه)	۱۳۳۲
۲۲	ظفرنامه منسوب بابن سینا (بتصحیح آقای دکترغلامحسین صدیقی استاد دانشگاه)	–
۲۳	رساله کنوزالمعزمین ابن سینا (بتصحیح آقای جلال‌الدین همائی استاد دانشگاه)	۱۳۳۱
۲۴	رساله معیار العقول – جرثقیل - ابن سینا (بتصحیح آقای جلال الدین همائی استاد دانشگاه)	»
۲۵	رساله حی بن‌یقظان ابن سینا باترجمه وشرح فارسی آن از یکی‌ازمعاصران ابن‌سینا (بتصحیح آقای‌هانری کربن)	»
۲۶	جشن نامه ابن سینا (مجلد اول – سرگذشت و تألیفات واشعار و آراءِ ابن سینا) تألیف آقای دکتر ذبیح‌الله صفا استاد دانشگاه)	۱۳۳۲
۲۷	ترجمه مجلد اول جشن نامه بفرانسه (بوسیله‌آقای سعید نفیسی استاد دانشگاه)	»
۲۸	ترجمه اشارات و تنبیهات (بتصحیح آقای دکتر احسان یارشاطر استاد دانشگاه)	»
۲۹	پنج رسالهٔ فارسی وعربی از ابن سینا (بتصحیح آقای‌دکتر احسان یارشاطر استاد دانشگاه)	۱۳۳۳
۳۰	آثار تاریخی کلات وسرخس (تألیف‌آقای مهدی بامداد)	
۳۱	جشن نامه ابن سینا مجلد دوم (حاوی نطقهای فارسی اعضاء کنگره ابن سینا)	۱۳۳٤
۳۲	جشن نامه ابن سینا مجلد سوم (کتاب‌المهرجان‌لابن‌سینا) حاوی نطقهای عربی اعضای کنگره ابن سینا	۱۳۳۵ شمسی
۳۳	جشن نامه ابن‌سینا مجلد چهارم (شامل خطابه های‌اعضای کنگره‌ابن‌سینابزبانهای‌آلمانی وانگلیسی‌وفرانسوی)	۱۳۳٤ »
۳٤	نبردهای نادرتألیف تیمسارسرلشکر غلامحسین مقتدر	۱۳۳۹ »
۳۵	جبرومقابله‌خیام(تصحیح وتحشیهٔ‌آقای دکترجلال‌مصطفوی)	۱۳۳۹ »
۳٦	شاهنامه نادری تألیف مونامحمدعلی‌فردوسی ثانی (بتصحیح وتحشیهٔ‌آقای احمد سهیلی‌خوانساری)	۱۳۳۹ »
۳۷	اشترنامه شیخ فریدالدین عطار (بتصحیح و تحشیهٔ آقای دکتر مهدی محقق)	۱۳۳۹ »
۳۸	حکیم عمر خیام بعنوان عالم جبر تألیف آقای دکتر غلامحسین مصاحب	۱۳۳۹ »

Anjomane Asare Melli Publications, No. 38
Khayyam Commemorative Series

HAKIM OMARE KHAYYAM

AS AN

ALGEBRAIST

Texts and Persian translation of Khayyam's Works on Algebra, with introductory chapters and commentaries

by

G. H. Mossaheb

Bahman Printing
Teheran, 1960