توبیاس دانتزیگ

# میراث یونان

ترجمهٔ عباس گرمان

۱۵

در ریاضیات همهٔ راه‌ها به یونان ختم‌می‌شود. هر کوششی جهت بررسی گسترش تاریخی ریاضیات نو ناچار باید به بررسی عمیق سهم یونان در این زمینه به‌پردازد. از این‌رو کتاب حاضر اندیشه‌ها و تلاش‌هائی را که همه ریاضی‌دانان یونان، ازطالس گرفته تاپاپوس، درگیر آن بودند و تا به‌امروز نیز ذهن ریاضی دانان را بخود مشغول داشته، مورد نظر قرار داده‌است.

پروفسور دانتزیگ پس از این کتاب دومجلد دیگر از خود بجای گذارده است. قرنهای تلاطم تولدمجدد ریاضیات و پیشرفت شگفت‌انگیز آنرا درقرنهای هفدهم و هیجدهم بررسی می‌کند، و عصرتمیز به گسترش ریاضیات درقرن نوزدهم پرداخته است.

پروفسور دانتزیگ بشکلی درخشان اثرخود بنام عدد: زبان علم را ساخته و پرداخته است. این کتاب در زمینه مسائل ریاضی به سرعت شهرتی جهانی یافت و سه‌بار تجدید چاپ شد. بررسی جدید وتاریخی او نیز همان عمق وکیفیت درونی عدد: زبان علم را دارد.

۲۹۰ ریال

میراث یونان


۰۱ ۱
۷ ۱۸

توبیاس دانتزیک

TOBIAS DANTZIG

۶۲۷۱۶

# میراث یونان

ترجمهٔ عباس کرمان

میراث یونان
توبیاس دانتزیگ
TOBIAS DANTZIG
ترجمهٔ عباس گرمان
انتشارات توکا
چاپ اول در ۳۳۰۰ نسخه آذرماه ۲۵۳۶
چاپ نقش جهان
حق چاپ محفوظ
شماره ثبت کتابخانه ملی $\frac{۱۵۴۳}{۳۶/۹/۲۰}$

# در این کتاب

# مقدمه

«میراث یونان» بررسی مسائل، اصول وروشهایی است که ریاضیات جدید از یونان کهن به‌ارث برده است. مقدر نبود تاهمهٔ افکار وموضوعاتی که مغزهای بزرگ یونانی را، از طالس تا پاپوس به‌خود مشغول داشته بودند، زنده بمانند. بعضی از آنها گ‌ورزا بودند، پ‌اره‌ای میرا، برخی هم برشاخه پژمردند، و بسیاری دستخوش طوفانی قرار گرفتند که افتخار یونان را به‌نیستی کشاند. در این مباحث نوشته بسیار است، واین نویسنده توجه داردکه بررسی در زمینهٔ ریاضیات عتیق واجد چه‌اهمیتی برای تاریخ جامع این‌رشته است. بااین‌حال «میراث یونان» سرگذشت تاریخی‌ریاضیات یونان نیست. بلکه فقط‌باموضوعاتی‌سروکار داردکه پس از سانحهٔ اضمحلال یونان به‌زندگی خود ادامه داده‌اند، در خواب زمستانی **عصر ظلمت** زنده مانده‌اند، وحتی دردهای دائم‌التزاید «احیای مجدد» (*Restoration*) را از سرگذراندند وتابه‌امروز به‌زندگی خود ادامه می‌دهند.

این‌اثر برپایهٔ تجربهٔ نویسنـده، در تألیف کتابی به‌نام **عدد زبان‌علم** به‌وجود آمده است. این مجلد نیز مانند اثر قبلی دو دسته از خوانندگان رامخاطب قرار می‌دهد. نمونهٔ گروه اول‌کسی است‌که آمادگی و ذوقی در زمینه‌های فنـی ریاضیات ندارد، امـا بابلوغ فکری بدانجا رسیده است که اهمیت آن را برای اندیشه وزندگی این عصر تشخیص می‌دهد. جای‌خالی تعلیمات ریاضی چنین خواننده‌ای را اشتیاق به‌آموختن وظرفیت ارزیابی و فراگیری اندیشه‌ها پرمی‌کند.

از طرف دیگر دستهٔ روبه‌رشد دیگری از مردم هستند کـه در زمینهٔ ریاضیات موضع حرفه‌ای مشخـص‌تری را بدست آورده‌اند. نمونهٔ برجستهٔ این دسته به«چگـونه» بیشتر عـلاقمندند تا به «چـرای» مسائل. بنابر-این، پایه وتحول شیوه‌هائی‌که درکار یومیه خود به‌کار می‌برد باید مورد

توجه واقعی او قرار گیرد، زیرا آگاهی به آنها، او را در ارزیابی اعتبار وهمچنین محدودیت این شیوه‌ها کمك می‌کند. اما این همهٔ مطلب نیست. پاره‌ای از کارهای ریاضیدانان یونان به‌دست فراموشی سپرده شده‌اند، نه‌اینکه به‌خاطر اکتشافهای جدید منسوخ شده باشند، بلکه از آنجهت که در «برخوردهای حوادث تاریخی» به‌گمنامی افتاده‌اند. در واقع چندتائی از این کارها، چه‌از نظر سودمندی و چه از نظر زیبائی برآنچه که معمولاً در پشت میز مدرسه آموخته می‌شوند برتری دارند.

علاقمندی نویسنده به دو دسته از خوانندگان، که از لحاظ وضع و سلیقه وعلاقه باهم تفاوت فراوان دارند، موجب دو گانگی ساختمان اثر حاضر است. قسمت اول، **صحنه و بازیگـران** ، برای خواننده به‌طور عام طرح‌ریزی شده،وبرای‌باقی ماندن‌دردایرهٔ معلومات‌ریاضی چنین‌خواننده‌ای از هیچ‌کوششی فروگذار نشده است. اعتقاد نویسنده برآن است که دورهٔ تحصیلی متوسطه در ریاضیات کاملاً برای درك قسمت اول کتاب کافی است. قسمت دوم، **گلچینی ازمیراث**، از نظر محتوی فنی‌تر است. درواقع، اغلب مسائلی که در این قسمت بررسی شده‌است، در دوران اخیر به‌مرحلهٔ باروری رسیده‌اند، وپاره‌ای از آنها تابه‌امروز هم‌لاینحل‌مانده‌اند. خوانندهٔ‌علاقمند به‌ریاضیات در زمینهٔ اصولی‌که مورد بحـث قرار گرفته با مشکلی مواجه نخواهد شد، اما درك عمیق‌تر این مسائل فقط باتلاش وکوشش بدست‌می‌آید. به‌گفته \اسپینوزا\ (*Spinoza*):

«*Omnia praeclara tam difficula quam rara sunt*»

چیزهای ممتاز همان‌گونه‌که‌کمیاب‌اند دشوار نیز هستند.

**میراث یونان** کتاب اول از سه‌مجلد است‌که مجموعاً نام **ریاضیات در جشم‌انداز گذشته** (*Mathematics in Retrospect*) را به‌خود خواهدگرفت.

جلددوم، **قرنهای طوفانی** ( *Centuries of Surge* ) به‌زودی ارائه خواهد شد: زمینهٔ آن تولد مجدد ریاضیات وپیشرفت حیرت‌انگیزآن در قرنهای هفدهم و هیجدهم اسـت. مجلد آخر ازاین کتاب، **عصر تمیز،** ( *The Age of Discretion* ) که باگسترش ریاضیات در قرن نوزدهم سروکار دارد، در دست تهیه است، اما نوشتن آن به‌مرحله‌ای نرسیده است که بتوان تاریخی قطعی برای انتشارش معین‌کرد.

بقیهٔ این مقدمه در دفاع از عنوان‌کتاب است. شرح محتوای اثری در چندکلمه به‌خودی‌خود وظیفه‌ای دشوار است، اما وقتی این‌کلمات باید

به‌خوانندهٔ آینده، هدفهای نویسنده را بیان‌دارد ونقطه نظر او را ارائه‌نماید وظیفه‌ای بسیار خطیر پیش روی او می‌گذارد. اما دیر یازود نویسندهٔ هر کتاب باید بامشکل نـامگذاری آن مواجه شود. او پاره‌ای از ترکیبات کلمات ممکن‌را از نظر می‌گذراند، برخی را به‌دور می‌اندازد. زیرادستخوش خطای زیاده روی هستند، پاره‌ای دیگر به‌خاطر خطای‌کمبود ونقصان خود نادیده‌گرفته می‌شوند، درغایت امر مصالحه‌ای برقرار می‌شود و او با این فکر که مقدمه می‌تواندابهامهائی‌را که انتخاب عنوان به‌وجود آورده است روشن سازد خود را تسکین می‌دهد.

عنوان **ریاضیات در چشم‌اندازگذشته** نه‌تنهامبهم است، بلکه جاه‌طلبانه نیز می‌باشد. درواقع عبارت «ریاضیات» چنان میدانی وسیع از دانش بشری رادربرمی‌گیردکه فقط نویسندهٔ یك دائرةالمعارف می‌تواند این‌عنوان رابرای‌خود به‌کارببرد، واثرحاضربه‌هیچ مفهومی‌ازکلمه، یك دائرةالمعارف نیست.

مطمئناً تمایل‌به‌گریز از مرکز فکرنویسنده باعث شده است‌تاتوجهش به‌جهات مختلف معطوف‌گردد. بااین حال، او جنبه‌های دقیقی ازریاضیات نورا خارج از بصیرت ویا دسترسی خود یافته است وبدین ترتیب‌به‌مباحثی مانـنـد توپولوژی، بررسیهـای عمومی مربوط بـه توپولوژی وشبکه‌ها، « *Lattices* »، و همچنیـن بسیاری از مبـاحث دیگر نـزدیك نشده است. اگر علی‌رغم این فواصل خـالی، نویسنده تصمیم گرفته است تا عنوان «ریاضیات» را باگستاخی آشکار به‌کار برد، بدان علت‌است‌که عبارت‌مناسب دیگری نیافته است‌که بیان‌کنندهٔ‌کیفیت مباحث مختلفی باشدکه این کتاب‌با آن سرکار دارد.

عبارت **چشم‌اندازگذشته** عیبی بدتراز ابهام دارد: این عبارت‌حداقل درمظان سه‌تفسیراست. در حالیکه این‌کلمات معرف بیانی تاریخی‌اند، می‌توانند درصفحهٔ عنوان یك کتاب درسی نیز به‌کار بروند، یا برای‌یك‌کتاب خاطرات نیز استفاده شوند. عجیب اینجا است‌که هریك از این تفسیرهای ظاهراً متباین را می‌توان برای اثر حاضر به‌کار برد. زیرا اگر چه‌این اثـر تاریخ‌ریاضیات نیست، هدفش نشان‌دادن صحنهٔ تاریخی است که برنامهٔ‌دورهٔ متوسطه آن را مخدوش جلوه‌می‌دهد. علیهذا در ترسیم اندیشه و روندهای ریاضی، درعین آنکه‌شیوه‌های به‌کار رفته توسط اساتید گذشته عنوان شده، به‌جنبه‌های تاریخی برای‌منشاء این اندیشه‌ها وتلاش برای آنها نیز توجه شده‌است.

باز، در حالیکه این کتاب مروری بر برنامهٔ تحصیلی دورهٔ متوسطه نیست، هدفش تکمیل تجربهٔ کسی است که پس از آشنائی با این افکار وروندها درطول دوران طولانی، امانارسای زندگی خود، بخواهد درزمینه‌های پیشرفتهٔ ریاضیات مربوطه به‌دوران تحصیلی عالیتروارد شود.

بالاخره، درحالیکه این کتاب مجموعه‌ای از خاطرات نیست، نویسنده تلاشی نکرده است تامحدودیتی برای عنصر ذهنی قائل شود. در واقع، از یك جهت، این اثر یادداشتهای کسی است که بیش از چهل سال به‌کاربررسی ریاضیات، آموزش آن، نوشتن در این زمینه وکار برد آن پرداخته است. به‌صحیح یابه‌غلط، نویسنده این امید را در دل داردکه این اثر، هم برای کسانی که به‌عنوان حرفه‌باریاضیات سروکار دارند وهم برای کسانی که به‌عنوان تفنن به‌آن می‌پردازند، ارزشمند باشد.

توبیاس دانتزیك (*Tobias Dantzig*)

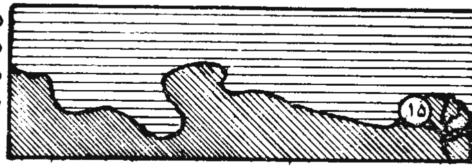
پاسیفیك پالیساد- کالیفرنیا - اوریل ۱۹۵۶

(*Pacific Palisades*)

# ۱.
# صحنه و بازیگران

# صحنه و نقش

۱- ملطیه، یونیه
۲- ساموس «
۳- خیوس «
۴- آتن، یونان
۵- دلوس «
۶- کنیدوس «
۷- کرت «
۸- کروتونا، ایتالیا
۹- سیراکوز «
۱۰- تارنتوم «
۱۱- الئا «
۱۲- رم «
۱۳- الیس، یونان
۱۴- آبدرا، تراس (تراکیه)
۱۵- اسکندریه، مصر
۱۶- جیزه «
۱۷- ناصریه، فلسطین
۱۸- صور، فنیقیه
۱۹- بابلیه، کلده
۲۰- بغداد، خلافت شرقی
۲۱- برغه، پامفیلیه
۲۲- بوزنطه (قسطنطنیه = استانبول)
۲۳- نیقیه، بی‌تی‌نیه
۲۴- استاگیرا، مقدونیه
۲۵- قرطاجنه (کارتاژ)، افریقا

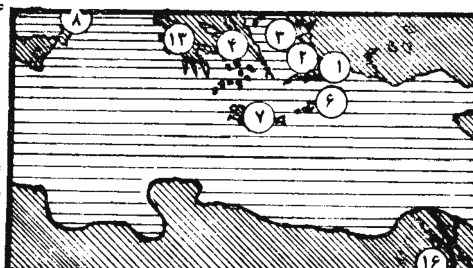


۱۵- دیوفانتوس (۳۰۰ م)
۱۵- پاپوس (۳۰۰ م)
۱۵- بطلیموس (۱۰۰-۱۷۸ م)
۱۵- منلاوس (۱۰۰ م)

تاریخ میلادی

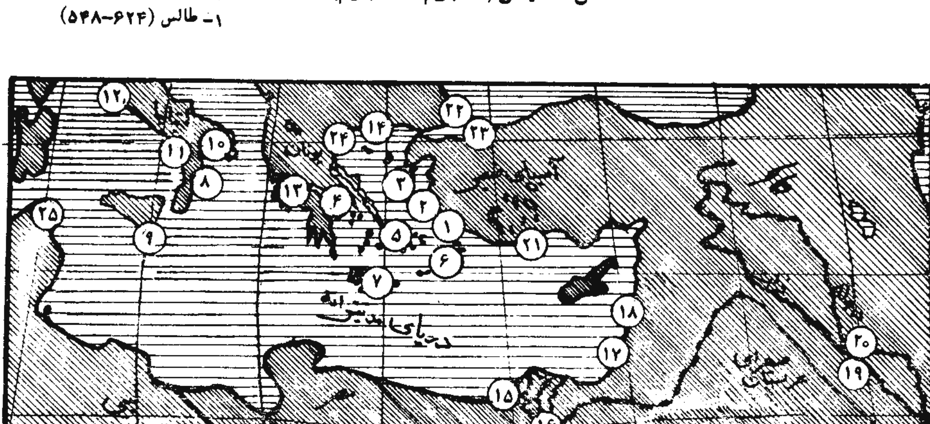
۱۵- هرون (۱۰۰)
۱- تیون = ثاون (۱۳۰)
۲۳- نیکومدس (۱۳۰)
۲۳- دیوکلس (۱۳۰)
۲۳- هیپارخوس = ابرخس (۱۶۰)
۲۱- آپولونیوس = ابلونیوس (۲۰۰)
۱۵- اراتوستنس (۲۷۶-۱۹۴)
۹- ارشمیدس (۲۸۷-۲۱۲)
۲- آریستارخوس = ارسطرخس (۳۱۰-۲۳۰)
۱۵- اقلیدس (۳۰۰)

از اقلیدس تا هرون (۳۰۰ - ۰ ق‌م)



۲۴- ارسطو (۳۸۰-۳۲۲)
۴- دینوستراتوس (۳۶۰)
۴- منایخموس (۳۶۰)
۶- اودوکسوس (۴۰۸-۳۵۵)
۴- افلاطون (۴۲۷-۳۴۷)
۱۰- آرخیتاس (۴۳۰-۳۶۵)
۱۴- دموکریتوس (۴۶۰-۳۷۰)
۱۳- هیپیاس (۴۶۰)
۳- هیپوکراتوس = بقراط (۴۶۰)
۴- آناکزاگوراس (۵۰۰-۴۲۸)
۲- فیثاغورس (۵۸۰-۵۰۰)
۱- آناکزیماندر (۶۱۱-۵۴۵)
۱- طالس (۶۲۴-۵۴۸)

طالس تا اقلیدس (۶۰۰ ق‌م - ۳۰۰ ق‌م)



# فصل اول

# یونان و یونانیان

نوری خیره‌کننده، طوفـانی سهمگین و سپس تـاریکی
نفوذ ناپذیرتر.
اواریست گالوا (EVARISTE GALOIS)

۱

صحنه‌ای‌که اولین حادثهٔ مهم درآن روی‌داد واینك به‌بیان آن می‌پردازیم، یونان‌قدیم است وبازیگران آن هم بدون‌شك نام یونانی داشتند، وزبانی‌هم‌که به‌وسیلهٔ آن افکارواعمال‌خودرا برای یکدیگرباز گومی‌کردند، زبان‌یونانی بود. گرچه پاره‌ای ازاین‌آثارو افکارواعمال قبل ازاینکه بدست ما برسد به‌عربی و لاتینی‌ترجمه شده است. در این آثـار جرثومه‌هائی از نظریه‌ها ومسائلی که تا به‌امروز نیزمحرك دنیای ریـاضی بوده است یافت می‌شودکه پاره‌ای ازآنها حتی تا امروز نیزلاینحل مانده است.

به‌ما می‌گویند، اغلب‌راهها درریاضیات به‌یونان برمی‌گردد، بنابراین‌کتابی‌که به‌هرصورت می‌خواهد بیان تـاریخی این امرباشد باید با این سئوال شروع شود:

یونانیان قدیم چه‌کسانی بوده‌اند؟

این‌عبارت درفکرما گروهی ازعشایرآریائی را تداعی‌می‌کند که اصلاً در منطقهٔ جنوبی شبه جزیره بالـکان ودر مجاورت جزایر اژه مقیم بودند، و پس ازآن درهمهٔ اکناف پراکنده شدند، و بالاخره به‌ساحل آسیای صغیر، جنوب ایتالیا ونواحی ساحلی آفریقا رسیدند. خصلت جزیره‌ای سرزمین و فعالیتهای دریائی باعث استقلال و ایجاد حکومت ناحیه‌ای شد؛ با اینحال

اقامت این مردم در دروازهٔ اروپا ودر برابرتهدید مدام و تجاوز ،شرق‌ـ زمینیها، آنهارا برای حفاظت خود به‌سوی‌حکومتی خودکامه سوق می‌داد.

بدین ترتیب بودکه سرزمین قدیم یونان صحنهٔ کشمکش بین خودـ کامگی و دموکراسی گردید، و چنانچه معلوم‌است این‌کشمکش تا به‌امروز نیز ادامه دارد.

اما، این‌فقط یك روی‌سکه است‌که می‌تواند فکرما را به‌خودمشغول دارد. یونان قدیم مهد فرهنگ قدیم ما است؛ ریشهٔ ادبیات و فلسفه، معماری و مجسمه سازی را، با تمام اشکال متنوعی‌که داشته‌اند، باید در یونان جست؛ ترانه‌های شاعران، آثار مجسمه سازان و نوشته‌های فلاسفه تنها آثارباستانی افتخارآمیز یونانیان نیست، بلکه سرچشمهٔ بررسی والهام روزگار ما و احتمالاً قرنهای آینده است. نبوغ این مردم محدود به‌هنرو ادبیات نیست، باریك‌بینی آنها دررازها وعجایت دنیای عدد وبسط وتوسعهٔ آن، آنان را به‌چنان‌کمالی راهنمون شدکه پایه‌گذارعلمی به‌نام ریاضیات شدند، علمی‌که دست سرنوشت قالب وپایهٔ همهٔ علوم را به‌نام‌آن سکه زد.

هنگامیکه می‌بینیم تمام این فرهنگ عظیم فقط درطول چند قرن قد برافراشته این الگوبرای ما اعجاب‌آورتر می‌شود.

درواقع بایدگفت‌که این موج پرقدرت درقرن پنجم قبل ازمیلاد به‌ـ اوج خود رسید، وپس ازآن به‌زودی نزولی همه جانبه وسریع حاکم گردید وآخرین ضربهٔ مرگبار به‌ریشهٔ این درخت تناورو پرقدرت فرود آمد. این ضربهٔ مرگ‌آور دیگرجبران نشد و پس ازگذشت چند قرن، تلاش برای تجدید قدرت وعظمت پیشین ممکن نگردید، وبالاخره ضربت‌کشنده‌ای آن‌را کاملاً واژگون ساخت.

## ۲

چنین است تصویر یونان قدیم از میان تاریخ مه‌آلود دوهزار ساله. این تصویردست‌کم گیج‌کننده است، زیرا درمحدودهٔ دانش‌ما تاکنون چیزی شبیه به‌آن و یا لااقل اندکی شبیه به‌آن اتفاق نیفتاده است. حتی اگر با مقیاس‌جمعیت دردنیای قدیم سنجیده شود، این‌آئینهٔ تمام‌نمای قوم‌کوچکی است‌که در مدت چند قرن تمدنی بزرگ برپاکردندکه عظمت آن باگذشته قابل قیاس‌نبود ومیراث جاودانی درادبیات وفلسفه وریاضیات برای‌بشریت بجا می‌گذارد. و هرگاه بنابروظیفه‌ای‌که داریم‌گذشته را در پرتو روشنی امروزبنگریم این‌اعجاب‌وحیرت، عمق‌بیشتری خواهدیافت. زیرا نمایندگان

جدید این گروه اخلاقی، که ازنظر ذکاوت وظرافت فاصله‌ی بسیار با پیشینیان خود دارند، سهمی چنان ناچیزدرزندگی فرهنگی وهنری زمان ما دارندکه مشکل بتوان رابطه وقرابتی بین‌مردم بالکان وغولهای متفکری که فرهنگ ما مدیون آنها است پیداکرد.

آیا درترسیم این تصویر اشتباهی رخ داده است؟ آیا ممکن است این تصویرهم کلیشه‌ای بیش نباشد؟ یعنی نمونهٔ دیگری ازمحصولات گوناگون صنعتی که به‌جای علوم‌انسانی گرفته می‌شود؟ احتمال‌آن زیاد است: تا حدی که‌مربوط به‌تاریخ‌ریاضیات‌است، چنین‌ادراکی ازیونان‌قدیم، محتاج به‌تجدید نظرو ارزیابی جدید است.

## ۳

اولاً، فعالیت ریاضی یونان قدیم در طول دوران درخشان اقلیدس، اراتوستن، ارشمیدس و آپولونیوس به‌اوج خودرسید، ودراین دوران‌ادبیات هنرو فلسفه دریونان تقریباً قوس‌نزولی خودرا می‌پیمود. برای این پدیدهٔ خاص یک‌المثنای جدید نیزوجود دارد. درقرن شانزدهم، درعصر کاوالیری (*Cavalieri*)، کاردان، گالیله و ویت (*Vieta*) ریاضیات‌تولدی تازه یافت و هنگامی سراز آب بیرون‌آوردکه ادبیات وهنرتقریباً راه تجدیدحیات خود را تماماً پیموده و نام دانته و داوینچی به‌خاطره‌ای تبدیل شده بود. چهرهٔ اصلی این عصر گالیله بود، واینکه مرگ او درست یک هفته قبل ازتولد نیوتون واقع‌شد، عنوان بسیاری ازتأویلها و تفسیرها درتاریخ گردید. شاید بشود تـولد گالیله را در ۱۵۶۴، یعنی چند مـاهی پس ازمرگ آخرین و بزرگترین نمایندهٔ رنسانس ایتالیا، میکل آنژ، با همان اهمیت تلقی کرد.

ثانیاًسهم رومیها در ریاضیات چیزیست‌که حتی به‌آن ناچیزهم نمی‌توان گفت، اما شاهدی در دست نیست‌که جمهوری ویا امپراطوری اولیه سد پیشرفت آن شده باشد. محاق‌ریاضیات باعصر ظلمت وتا زمانیکه‌آخرین معلم فلسفه قرون وسطی قدرت خودرا، که روح انسان آن عصردر انقیاد آن بود، ازدست نداد پایان نپذیرفت.

## ۴

درنهایت امرتنها یونان نبودکه درگسترش ریاضیات سهم عمده‌ای را به‌عهده‌گرفت؛ بلکه آخرین مرزهای یونان، آسیای صغیر، ایتالیای جنوبی وآفریقا، نیزدر این سهم مشارکت داشتند. پاره‌ای ازاین مرزها مربوط به‌

فتوحات یونانیان بود، پاره‌ای دیگر براثراتحاد ویا امور بازرگانی تحت انقیاد آنهـا درآمده بودند. اما با توجه به‌اینکه یونانیان ژاندارمی برای حفاظت خون آریائی خود نداشتند تا از آلودگیها دراماں بمانند، اختلاط نژادی گسترش یافت، و دلیلی دردست نیست که یونانیهای ضعیف در برابر این اختلاط نامتجانس مقاومتی از خود نشان داده باشند. اصولاً یونانیان انسانها را به‌دو دسته وحشی و هلنی تقسیم می‌کردند؛ با اینحال خانواده‌های «وحشی» نورسیده نیز که نامهای یونانی داشتند و عادات یونانیان را به‌کار می‌بستند درنظرآنها هلنی بودند.

طالس ملطی‌نمونه‌ای است ازاین امر. ازهمهٔ جهات اوریشهٔ فنیقی داشت؛ درست مانند اپیکور. نه‌تنها طالس دردوران خود هلنی‌نامیده می‌شد، بلکه‌یونانیان اورا به‌شکلی غرورآمیزدرشمار «حکمای هفتگانهٔ» یونان تجلیل می‌کردند. امـا دربارهٔ خود او بهتراست بیان یکی ازمورخان را از زبان‌خودش بشنویم: «من شکرگزار برکت این سه نعمتم؛ که انسان متولد شدم نه‌حیوان، مرد زاده شدم نه زن، و یونانی نه وحشی».

در قرنهای اقلیدس و ارشمیدس، زبان یونانی، زبان اغلب مردم با فرهنگ بود؛ چـه آتنی‌ها و چه‌کسانی‌که از سیراکوس، اسکندریه و پرگـا (*Perga*) رسیده بودند. اهمیت‌این امربرکسانیکه به‌وجودکانونهای فکری پراکنده دراین سرزمین‌آگاهند پوشیده‌نیست. چه‌کسی‌می‌تواند مدعی‌شودکه داشتن‌نام آرچی‌بالد یا پرسیوال نمایندهٔ‌خون آنگلوساکسن والزاماً انگلیسی بودن است؟ آیـا ساده لوحانه نیست اگر بپذیریم کسی‌که در قرن سوم قبل از میلاد می‌زیسته به‌صرف اینکه نـامش آپولونیوس بوده و به‌یونانی می‌نگاشته، یونانی است.

سواحل مدیترانه دیگ هردم جـوشی بودکه محتوی آنرا یونانیها، اتروسکانها، فنیقی‌ها، آسوریها، یهودیها و عربها تشکیل می‌دادند. امروز چه‌کسی‌می‌تواند سهم‌آریائی‌ها، سامیان وحامیان وحبشی‌ها را درآن‌ترکیب تعیین‌کند؟ این‌معجون درهم وبرهم‌که ازمجاری‌تاریخ‌گذشته اثری‌ازترکیب خودبرای‌ما به‌جا نگذارده‌است. تنها چیزی‌که باقیمانده است تقطیری است ازجوهرموجود درظروفی‌که برچسب یونانی روی آنهاست.

## ۵

«نوری خیره‌کننده، طوفـانی سهمگین، سپس تـاریکی نفوذ ناپذیر».
گالوا (*Galois*)، در شب دوئلی‌که به‌مرگ اوانجامید، چنین نوشته بود.

واگر نمیدانستیم که مقصود او از بیان این کلمات خلاصه‌ای از دوران کوتاه زندگی پرحادثهٔ خود او درقرن نوزدهم بوده است، می‌توانستیم آنرا برای دوران ریاضیات یونانی به‌کار بریم.

این درخشندگی ناگهانی را چه بوجود آورد وباعث آن تاریکی چه بود؟ من چیزی برآنچه‌که تن (*Taine*)، کنت (*Comte*)، اسپنسر (*Spencer*) و اشپنگلر (*Shpengler*) و عدهٔ بیشمار دیگراز نویسندگان تاریخ هنرو فرهنگ گفته‌اند نمی‌افزایم. روشن است ریاضیات تا دورانی‌که آزادی فکرحکومت می‌کرد شکوفان بوده است، و هنگامی‌که فکرخلاق و آزاد جای خودرا به‌تقدیرکور وجنون مذهبی‌داد درمحاق تاریکی فرورفت.

# فصل دوم

# پایه‌گذاران

در نظر طالس... مسئله اصلی آن نیست که **ما چه می‌دانیم**، بلکه آنستکه **چگونه آنرا می‌دانیم** و چه مدارکی برای گفته‌های خود ارائه می‌دهیم.

**ارسطو**

## ۱

شش قرن قبل از آنکه تاریخ زمان صفررا به‌صدا درآورد، در ساحل اژه ازآسیای صغیر، که چندان از مکانی که اینك نام ازمیر را برخود دارد دور نیست، گروهی یونانی که نام دسته جمعی «ایونی» برخود داشتند بساط زندگی گستردند. این بساط شامل ده دوازده شهرو چندین جزیره بودکه در میان شهرها ملطیه ودرمیان جزایرساموس و مکیوس بزرگتر از دیگران و سعادتمندتر بودند. وقتی بامعیار امروز بسنجیم، این قلمرو چنان محدودبودکه هرگاه ازمیر کنونی منطقهٔ عملکرد یك بنگاهدار معاملاتی امریکائی می‌بود، آنچه که به‌آن«ایونیا» می‌گفتند چیزی جزقسمتی ازحومهٔ یك شهر به‌حساب نمی‌آمد.

دراینجا، درفاصلهٔ زمانی تقریباً ۵۰ سال دو پایه‌گذار ریاضیات، یکی طالس ملطی ودیگری فیثاغورس درساموس دیده به‌جهان گشودند. براساس نوشتهٔ برخی سرگذشت نویسان هردوی آنان تبار فنیقی داشتند، وبا توجه به‌اینکه قسمت اعظم ساحل آسیای صغیر آن زمان مملو ازکوچ نشینهای فنیقی بود احتمال درستی آن بسیاراست.

## ۲

فنیقیها چه کسانی بوده‌اند؟ امروزه ما از آنها به‌عنوان مخترعین کتابت

الفبایی یاد می‌کنیم که نسبت به‌شیوه‌های ماقبل خود، در ضبط تجارت، به‌چنان تکاملی رسیده بود که لااقل تا دوهزار و پانصد سال دستخوش تغییری اساسی نگردید. حروف یونانی آلفا، بتا، گاما مانند الف، بت، جیم عبری چیزی جز کاربرد علائم فنیقی برای این حروف نیستند. با اینکه از فنیقیها شیوهٔ اعجاب‌آورتری برای ضبط وقایع به‌بشریت رسیده، درحال حاضر اثر ثبت شده‌ای ازآنها دردست نیست واطلاع اندك ومختصرما ازآنها مرهون منابع عبری ویونانی است. آنها قومی سامی بودندکه وطنشان مکانی بوده است‌که امروزآنرا سوریه‌می‌نامیم. آنان به‌نام‌کنعانیها، مؤابیها وصیدونیها بسیاری از صفحات کتاب مقدس را در برگرفته‌اند. ظاهراً اوقاتی راکه با عبرانیها درجنگ‌مرگبارنبودند، جنگی تبلیغاتی وزیرکانه به‌راه می‌انداختند وازآن راه فرزندان مردد اسرائیل را وسوسه می‌کردند تا به‌خاطر بعل ویا خدایان قابل لمس دیگر، یهوه را ترك کنند.

یونانیها، فنیقها را با قیافهٔ دیگری می شناختند. آنهارا تاجرانی زبردست و دریانوردانی ماهر می‌دانستند و به‌آنان نام *Phonixes* ویا سرخها را داده بودند. دلیل‌آن،چهرهٔ سوخته وآفتاب‌دیده‌ای بودکه‌این دریانوردان قدیمی در اثربادهای دریا وتابش آفتاب مدیترانه بدست آورده بودند. زیرا فنیقیها درآن «اقیانوس محاط در برقدیم» پرسه می‌زدند، سرتاسر آنرا می‌پیمودند، مال‌التجاره مبادله‌می‌کردند وکوچ‌نشینهائی نظیرکارتاژنگون‌بخت ویا سیراکوس، مسقط‌الرس ارشمیدش که شهرتی‌با تبارفنیقی داشت، بدست می‌آوردند.

## ۳

گفتیم‌که طالس برای یونانیان درشمار « حکمای هفتگانه بود ». در واقع او تنها ریاضیدان‌گروه بود، و نه تنها ریاضیدان‌گروه بود، و نه تنها تبحر اودر ریاضیات، بلکه دانش سیاسی او نیزباعث دست‌یابی او تااین مقام شده بود. براثرهمین شهرت و امتیاز، طالس موضوع بسیاری ازبررسیهای تاریخی‌قرارگرفته، ودرنتیجه نوشته‌های زیادی برزندگی‌واعمال‌اواختصاص یافته‌است. این‌نوشته‌ها تا چه‌اندازه ارزشمندند؟ دراینجا پاره‌ای ازقسمتهای روشن تصویر وجود داردکه شما می‌توانید نتیجهٔ دلخواه خودرا ازآنها بگیرید.

یکی‌ازاین‌مفسران به‌ما گفته است‌که طالس‌شخص باریك‌بین و دقیقی بودکه هیچ چیزاز نظراو مکتوم نمی‌ماند؛ ولی مفسر دیگری می‌گوید: او

چنان فراموشکاربودکه حتی وقتی بزرگ شده بود، می‌بایست همراه اوکسی باشد تا به‌هنگام راه رفتن درچاله و چوله‌ها نیفتد. شخصی‌دیگری می‌گوید طالس تاجرفصلی‌نمك و روغن بود و به‌دنبال این تجارت به‌مصر وارد شد، اما روایت دیگر برآنست‌که‌اودرجوانی به‌مصرآمد وزیرنفوذ آموزش‌کاهنان ربع قرنی در میانشان اقامت‌گزید، و سپس میانسال شده بودکه به میلتوس بازگشت. براساس‌گفته‌ای دیگراو تمامی‌هندسه‌ای راکه می‌دانست از همین کاهنان فراگرفت، وبازروایت است‌که فرعون بدو اعتمادکرد واندازه‌گیری هرم‌بزرگ راکه تلاش‌کاهنان درآن‌راه به‌جایی‌نرسیده‌بود برعهدهٔ اوگذارد.

شرح نظریات اجتماعی و سیاسی وفلسفی او نیزهمینگونه مغشوش و درهم است. پاره‌ای می‌گویندکه اودر انتخاب زندگی مجرد پابرجا ومصمم بود و برای ابراز غریزهٔ پدر فرزندی یکی از افراد خانوادهٔ خواهرش را به فرزندی گرفت، و وقتی از او پرسیدند بـا عشقی‌که به فرزند دارد چرا خود ازدواج نمی‌کند؛ جواب داد: «درست به‌خاطر آنکه بیش از اندازه به‌فرزند عشق می‌ورزم». دیـگر شرح حال نویسان به‌ما اطمینـان می‌دهندکه طالس ازدواج کرده بود و ثمرهٔ آن فرزندان و نوه‌های زیادی بود. اعتقاد پلوتارك برآنست‌که طالس دارای‌تمایلات دموکراتیك بود وشاهد مدعایش نامه‌ایست‌که به سولون (*Solon*) نوشته است. درآنجـا طالس با معذرت از اینکه استبداد برزادگاهش حـاکم است از او دعوت می‌کندکه به‌میلتوس نقل‌مکان‌کند. باردیگراز او می‌پرسند عجیب‌ترین چیزی‌که دیده‌است چیست می‌گوید: «رشد وگسترش استبداد درطول سالها». اما منابع دیگربرآنندکه طالس‌پس‌ازبازگشت‌ازمصر باهمان مستبدملطی محشورگشت وسالها مشاور او بود ودر واقع براثر راهنمائیهای طالس بودکه این خودکامه ازاتحاد با کروزوس امتناع‌کرد.

## ۴

در بارهٔ فیثاغورس نوشته‌ها به‌این‌گونـاگونی نیست، امـا آنچه نیز موجود است ازنظردیگر به‌قدرکافی‌گیج‌کننده است، زیرا علاوه برمغشوش بودن نوشته‌های وقایع‌نگاران،آنچه مناسب‌اوضاع واحوال‌بود ویانکته‌ای را ثابت می‌کرد توسط مریدانش از زبـان استادگفته شده است. فیثاغورس در واقع مرکزمذهبی بودکه تا سالها مداومت داشت و اثری بس عمیق بر افکارعلمی و مذهبی گذارد.

می‌گویندکه فیثاغورس نه تنهـا از مصردیدن کرد، بلکه سفراو به‌

طرف شرق، دورتراز اینهـا بود ودر واقع بسیاری از دانش خودراکه بعد به‌یونان انتقـال داد، از مغهای ایرانی و کاهنان کلدانی آموخته است. با بررسی نظریات درهم آمیخته و حرمتهایی‌که به فیثاغورس نسبت داده شده است، انسان به‌قبول نظریهٔ بـالا تمایل پیدا می‌کند. از حرمت یاتابو نام بردیم؛ آری‌حرمت ـ زیرا اکثرآئینهای مذهبی این فرقه،که بعدهامریدانش به‌توجیه عقلانی آنها دست‌زدند، دارای برچسب حرمت است. یکی ازاین مثالها آنست‌که شایع است فیثاغوریان ازگوشت حیوانـات پرهیز داشتند. می‌گویم شایع، زیرا دراین‌باره نیزاتفاق نظروجود ندارد. برخی شرح‌حال نویسان تأکید می‌کنندکه فیثاغورس اکتشافات ریاضی خودرا با قربانی یك گاو نر به پیشگاه خدایان جشن گرفت، و پاره‌ای پا را فراتر می‌نهند و بر آنندکه او اولین‌کسی‌بودکه به‌غذای ورزشکاران یونانی،که رژیم‌آنها انجیر وکره بود، گوشت را افزود.

برخی از مریدان فیثاغورس منع‌گوشتخواری را با نظریهٔ تناسخ او مربوط می‌دانند. براساس‌گفتهٔ آنها، او می‌گفت‌که از سه نشان مشخصهٔ روح تنها عقل است‌که منحصر به‌انسان است، وحرکت وهوش درحیوانات نیزوجود دارد، وبامرگ یك‌انسان روح ازحیوانی به‌حیوان دیگرنقل‌مکان می‌کند، ودرنتیجه باکشتن یك حیوان ممکن‌است روحی را ناقص‌کرد. همهٔ این‌عبارات زیبا است، ولی‌دربارهٔ اینکه چرا فیثاغورس ممنوعیتهای غذائی را به‌بقولات نیزکشانده است، انسان دچـار درماندگی می‌شود. در واقع آنطورکـه دیوژن لائرتیوس می‌گوید این آئین به‌شکلی غیرمستقیم بـاعث مرگ فیثاغورس شده است. در اینجـا داستانی‌که ارزش بـازگوکردن دارد چنین است.

هنگامیکه فیثاغورس از سفرمشرق بازگشت موطن خود ساموس را زیرسلطهٔ خودکامه‌ای یافت، ازاین‌رو راه غرب در پیش‌گرفت ودرکروتونا (*Crotona*) رحل اقامت افکند،که شهری بود خوشبخت در پاشنهٔ چکمهٔ ایتالیا. دراینجـا مدرسه‌ای‌گشود و قدرت سیاسی بزرگی بدست آورد. آن زمان روزگاری بودکه حکومت مطلقه برآزادی یونان می‌تاخت، و بدین لحاظ با سپری‌شدن زمان دسته‌ای مخالف به‌وجود آمدکه فیثاغورس را به طرح‌توطئه وطرفداری حکومت‌مطلقه متهم‌می‌کرد. دراین‌گیرودار جمعیتی لجام‌گسیخته خانهٔ اورا به‌آتش‌کشید. استاد فرار برقرار ترجیح داد ودر سر راه به‌مزرعه‌ای از باقلا رسید؛ اما ترجیح داد دردست دشمنانش‌کشته شود وگیاه مقدس را لگدمال نکند.

اینك‌خواننده توجه خواهدکردکه برای بدست‌آوردن دانه‌های سالم ازمیان این تودهٔ درهم و برهم شرح حال استاد چه وظیفهٔ سنگینی برعهدهٔ ماست! به‌این امرمشکل، دستیابی به‌دستاوردهای ریـاضی او نیزاضافه می‌شود. با اینحال از ورای این مه غلیظ داستانها و حکایات، تصویر دو مرد به‌چشم‌می‌خورد، تصویری‌که بهتراست‌آنرا نیمه‌مرئی بنامیم. اما وقتی‌مسئله مشاهدهٔ تابلوئی ازدورنمای بزرگتر ریاضیات‌کلاسیك درمیان باشد، این دو تصویرنیمه مرئی ابهامی‌کمترو تجسمی بیشترمی‌یابند.

نه طالس ونه فیثاغورس هیچکدام ازخود نوشته‌ای به‌جا نگذاردند. درواقع اولین‌اثرریاضی‌که امروز دردسترس‌ماست «مقدمات» (*Elements*) اقلیدس است. این به‌آن‌معنی نیست که ریاضیدانهای عصر پیش ازاقلیدس اندیشه‌های خودرا برروی پوست ننوشته باشند. برعکس فهرست تاریخی نوشته‌های ریاضی(*Mathematical Roster*) اثر اودموس (*Eudemus*) دو جزوه دربارهٔ ریاضیات را نام می‌بردکه درفاصلهٔ یکصد سال پس ازمرگ طالس نوشته شده است،که یکی مربوط به آناکسیمندر (*Anaximander*) ملطی شاگرد طالس ودیگری اثر هیپوکرات (*Hippocrates*) اهل کیوس (*chios*) است. اما این‌آثارهم مانند سایر نوشته‌های همزمان‌خود، درطول دو هزارسال‌گذشته مفقود شده‌اند. دواثر اقلیدس وهمچنین تعدادی‌مقالات ورسالات دوران پیش از اقلیدس‌نیزدچارهمین سرنوشت شده‌اند. اما اغلب این نوشته‌ها حتی تا قرن چهـارم بعد از میلاد که پاپوس (*Pappus*) از اسکندریه‌کتاب بزرگ‌خودرا بنام «مجموعه» (*The Synagogs*) نگاشت وجود داشته است. آیا این‌ادبیات قابل‌توجه به‌چه‌سرنوشتی دچارشده‌است؟ پاره‌ای ازآنهـا راه خودرا به‌طرف کشورهای عربی زبان سپردند و به‌همت توجه طلاب مسلمـان روشنفکر برجا مـاندند و بار دیگر رهسپـار اروپای احیا شده‌گردیدند، و پاره‌ای هنگام آتش سوزی کتابخانهٔ بزرگ اسکندریه که به‌دستور اسقف تئوفیلوس (در ۳۹۲ میلادی) برپا شد نابود، و برخی دیگر نیزدردوران‌سیاه‌بعدبه‌همین سرنوشت دچار شدند.

در نتیجه، تنها منبعی‌که می‌تواندکم وبیش دوران قبل از اقلیدس را روشن سازد برخی نقل قولها است در مکالمات افلاطون؛ اشارات اتفـاقی در نوشته‌های ارشمیدس، آپولونیوس، هرون و سایرین، و مجموعه‌ای از پاپوس‌است‌که می‌توان‌آنرا نوعی دائرةالمعارف ریاضیات یونـان تلقی‌کرد؛ و برخی تکه پاره‌هائی است از بررسی بر تاریخ ریاضیات‌که توسط معاصرین

اقلیدس، از قبیل یودموس از رودس، نوشته شده وهفت قرن بعد به‌وسیلهٔ پروکلوس (*Proclus*) ازیکی ازمفسرین افلاطونی، نقل شده است.

## ۶

بدبختانه‌عقاید افلاطون دربارهٔ مطالب‌مربوط به‌ریاضی به‌سبب‌پاره‌ای عوامل قابل استناد نیست. نخست آنکه او یـك فیثاغوری تمام عیار بود و نمی‌توانست ازاین‌تعصب که اغلب‌دستاوردهای فلسفی‌وریاضی به فیثاغورس ویا هواداران اوتعلق دارد، خود را دور نگهدارد. بعلاوه دلیلی‌هم دردست نیست‌که او خواسته بـاشد خودرا ازاین تمایل و طرفداری آزادکند. بدین ترتیب‌درمکالمات‌افلاطون نام طالس‌به‌زحمت برده‌شده‌است، و اما هیپیاس و بقراط و ذیمقراطیس که یا از مکتب افلاطون به‌دور مانده‌اند ویا آشکارا به‌مخالفت با آن برخاسته‌اند، به‌شکل اهانت آمیزی نسبت به‌آنهـا سکوت اختیارشده است.

ازطرف دیگربا وجودادعای پرسروصدای افلاطونیان‌ونوافلاطونیان، افلاطون ریاضیدان نبوده است. ریاضیات برای افلاطون ومریدانش به‌طور عمده وسیله‌ای برای هدف ومقصود بوده، واین‌هدف فلسفه است. آنها به‌جنبهٔ فنی ریاضیات فقط به‌عنوان وسیله‌ای برای صیقل دادن فکرو هوش، و یا حداکثر به مثابهٔ دوره‌ای مقدمـاتی‌که به‌وسیلهٔ آن بتوانند وارد مسائل فلسفی شوند، می‌نگریستند. این امررا به‌طور آشکار درمعنای *Mathematics* می‌بینیم، که ترجمهٔ تحت‌اللفظی آن عبارتست از «دورهٔ مطالعه» ویا به‌اصطلاح‌امروز«برنامهٔ تدریس». درآکادمی‌افلاطون‌این‌کلمه بامفهوم فوق به‌کار برده می‌شد وبعدهاریاضیات مفهوم ومعنای‌علم عدد، خواص اشکال و طبقه بندیهای مربوط را بدست‌آورد.

آنچه درریـاضیات بیشتر توجه افلاطون را به‌خود جلب می‌کرد، آن جنبهٔ مابعد طبیعی بودکه در ورای مفاهیم آن قرار داشت. عناوین مکالمات اوشاهد بارزی براین مدعا است. بدین ترتیب در مکالمات افلاطون ازقضیهٔ فیثاغورس، که رابطهٔ اضلاع مثلث قائم‌الزاویه را بیان می‌کند به‌طورگذرا سخن‌رفته، وحتی درآنجا نیزبرروی جنبه‌های نظری مسئله تأکید شده‌است. از طـرف دیگر از موضوعـاتی مانند هم‌آهنگی، اعداد مثلثی، اعداد چند-گوشه‌ای و چیزهائی نظیراینها، که امروزکم وبیش نامربوط به‌نظرمی‌رسند، به‌تفصیل‌سخن رفته‌است. درواقع، انگیزهٔ راهنمای‌تمایلات ریاضی فیثاغورس و افلاطون از نوعی است‌که فلاسفهٔ حرفه‌ای آن‌را مابعد طبیعی می‌نامند،

اما برای مردم غیرحرفه‌ای جزو اسرارو علوم غریبه محسوب می‌شود.

## ۷

مکالمات درحدود یکصد سال پس ازمرگ فیثاغورس نوشته شده‌است دراین یکصد وچند سال اصول تعالیم استاد به‌شدت مورد حمله قرارگرفت. اولین بار به‌وسیلهٔ فلاسفهٔ ایونی، که درجای پای طالس قدم برمی‌داشتند، و پس‌ازآن‌توسط سوفسطائیان، که توسط پارمنیدس (*Parmenides*) الیائی رهبری می‌شدند.

انتقاد مخالفان ودفاع طرفداران، بسیاری ازصفحات فصیح مکالمات را انباشته است، و این صفحات زنده تصویر فیثاغورس را قابل قبول‌تر از آنچه دل ازدست دادگانش باستایش بیحد وحصراز وی ترسیم کرده‌اند به‌ما ارائه می‌دهد.

این صفحـات رازی مذهبی را آشکار می‌کنندکه عدد به‌عنوان کلید طرحی‌که «صانع اعظم» در ساختن عالم به‌کار برده است خودنمائی می‌کند. چه حرکت موجودات سماوی، چه ترکیب ماده، چه ساختمان اندیشه وچه اصول‌سیر بشریت همهٔ اینها قابل بیان به‌عددند، زیراعدد برتمام‌آنهاحکومت می‌کند. رسالت فیلسوف آن بودکه آنطورکه باید ازطوماربغرنج و پیچیدهٔ خلقت، که‌عمل‌خالق‌است، رازگشائی‌کند؛ امابرای اینکارباید‌ابتدا برمجموعهٔ قوانینی‌که این طومار برآن پایه نوشته شده است تسلط داشته باشد؛ و این مجموعه قوانین ریاضیات است.

«عدد حاکم برکائنات است». آیا دراین‌اصل مسلم، همانطورکه گالیله در دو هزارسال بعد پیشگویی‌کردکه: «جهان کتابی است بزرگ از فلسفه، این‌کتاب پیش چشم انسانهـا همیشه باز است؛ با اینحال، هیچکس امیدوار نیست پیش از تسلط برزبـان و حروفی‌که این‌کتاب با آن نوشته شده است بتواند توانائی درک‌آنرا داشته باشد، این‌زبان، ریاضیات است واین حروف مثلثها و دوایرو سایراشکال هندسی‌اند»؛ فیثاغورس نیزدستگاه وسیع فرمولها و معادلاتی راکه به‌وسیله آنهـا علم نو به‌پدیده‌های طبیعی متصل می‌شود پیشگویی‌کرده است؟ ویا آنکه آیااوطرح‌خلقت‌را به‌مثابهٔ نوعی‌مافوق عدد شناسی درک‌کرده‌که به‌هرچیز مادی یا غیرمادی عددی‌صحیح تخصیص یافته و روابط بین اشیاء را تا حد اعمالی‌که بین اعداد انجام می‌یابد تقلیل داده است؟ امروزه اغلب ما این دو وضعیت را آشتی‌ناپذیر می‌بینیم. نسبت به‌نظراول به‌عنوان امری علمی ستایش بیحد و حصرروا می‌داریم و دومی را

چیزی‌ساحرانه وخرافی می‌انگاریم. اما برای فیثاغورس ومریدانش تاقرنها بعد، حد فاصل بین مفاهیم ذکرشده نامعلوم بود.

## ۸

درمیان‌نوشته‌های فیثاغوریان به‌چنین عددشناسی روشنی برمی‌خوریم: عدد مرد، دو است و عدد زن، سه. الزاماً عدد ازدواج باید پنج باشد زیرا ازدواج اتحاد دوجنس نرو ماده است! ویا مثلاً، اعدادتام نمایندگان کمال‌اند، چه این کمال انسانی باشد چه الهی! زیرا آنهااز مجموع مقسوم علیه‌های خودتشکیل شده‌اند، پس قائم بالذات‌اند و کامل‌ویا بهتر بگوئیم‌درسرحدکمال در موسیقی، نجوم وهندسه این‌عدد شنـاسی شکل ظریف‌تری به‌خود گرفته است. مثلاً فیثاغوریان به‌جای اینکه هر شکل هندسی را به وسیلهٔ یك عدد نمایش دهند، به‌آن‌دسته‌ای ازاعدادتخصیص داده‌اند. این امرتوجه خاص و غیرعادی آنها را نسبت به‌اعداد مثلثی و مربعی، که امروز چیزی بی‌معنی و بی‌ربط به‌نظرمی‌رسد، نشان‌می‌دهد.

اما همچنین درتفکرات وتحقیقات نظری فیثاغورس جرثومه‌ای یافت می‌شود از چیزی‌که امروزه، چون نـام بهتری به‌آن نمی‌توان داد، آنـرا «موضع علمی» نام‌گذاری می‌کنیم. اما دلیل‌آنکه این‌موضع درحالت جنینی باقی‌ماند مربوط به‌وضع جبردرآن زمان‌است. امروزنمایش یك‌قانون‌فیزیکی توسط یك فرمول، چنان معمولی و همگانی است‌که ما آنرا به‌مثابهٔ چیزی که ازآسمان نازل شده باشد پذیرفته‌ایم، اما با توجه به‌اینکه حتی اغلب فرمولهای‌ساده نیزمتضمن اندیشه‌هائی است‌که درزمان فیثاغورس یا دوران کودکی را می‌پیمودند و یا هنوز متولد نشده بودند، معلوم می‌شودکه این امر بابخشایش الهی رابطه‌ای نداشته، بلکه نقطهٔ اوج سیری تکاملی‌می‌باشد که ازتلاشی طولانی وپرمشقت ناشی شده است .

در واقع در بادی امرهرفرمولی اگر وجود اعداد حقیقی را هم‌مسلم نداند مسلماً مستلزم قلمرو اعداد گویا خواهد بود؛ در حـالیکه در روزگار فیثاغورس، عدد به‌معنای صحیح مثبت بود ولاغیر. ثانیاً دلیل آنکه‌ما فرمول را به‌عنوان هدف‌نهایی در بررسی یك پدیده تلقی می‌کنیم آنست‌که حل آن پدیده ویا مسئله به‌وسیلهٔ فرمول به اعمال معمولی حسابی و جبری محدود می‌شود، واغلب ما این‌عملیات را درپشت میزمدرسه آموخته‌ایم. بااینحال به‌خاطر داشته بـاشیدکه وقتی در سال ۱۶۰۰ ویت (*Vieta*) علامتگذاری حرفی‌راپیشنهادکرد، حتی‌ریاضیدانها نیز، باآن به‌مثابهٔ یك نوآوری جنجالی

برخوردکردند و سن اعمال حسابی ابتدائی با اشکال به‌پانصد سال می‌رسید؛ با توجه به‌این اوضاع تصور خودرا به‌شش قرن قبل از میلاد، هنگـامیکه جبر بیانی، دوران کودکی خودرا می‌گذراند و عدد نویسی موضعی خوابی بیش نبود، معطوف کنید. ضمناً قبل از آنکه فرمولی بتواند عناصرمختلف را به‌هم مربوط کند و پیوند دهد لازم است که این عناصر قابل اندازه‌گیری ویا لااقل قابل تصور به‌صورت اعداد بـاشند؛ اما در روزگار فیثاغورس و حتی برای چندین قرن بعد ازآن، که چنین عناصری به‌اشکال از تعدادی انگشت شمار تجاوز می‌کرد؛ هندسه تنهـا میدانی بودکه درآن گذار از مرحلهٔ کیفی به‌مرحلهٔ کمی به‌خوبی پیش رفته بود، واز این رو تعجب‌آور نیست که هندسه پایهٔ استدلال فلسفهٔ عددی فیثاغورس قرارگرفته است.

این امرما را به‌مسئله‌ای که نام قضیهٔ فیثاغورس را به‌خودگرفته می‌کشاند ـ یعنی‌رابطهٔ بین اضلاع یك‌مثلث قائم‌الزاویه که به‌طور موجز امروزه با فرمول زیر بیان می‌شود:

$$c^{2} = a^{2} + b^{2}$$

درفصل‌آینده من دربارهٔ واقعیات ریاضی این‌قضیه مهم بحث خواهم کرد. در اینجا فقط به‌جنبهٔ تاریخی موضوع خواهم پرداخت. فیثاغورس تا چه حد در قضیه‌ای کـه به‌او نسبت داده‌اند سهیم است؟ آیـا اوکاشف این خاصیت مثلث قائم‌الزاویه بود؟ آیا او اولین‌کسی بودکه مفـاهیم ضمنی و دور و دراز آن را خـاطرنشان ساخت؟ آیـا او اولین‌کسی بودکه به‌وسیلهٔ استدلال منطقی برای احکام اساسی هندسه این‌قضیه را ثابت‌کرد؟ درهرحال آنچه‌راکه امروزگواهی تاریخ دراختیار ماگذارده است می‌گویدکه باید به تمام این سئوالها جوابی منفی داد.

فیثاغورس نبایدکاشف چنین رابطه‌ای باشد، زیرا این خاصیت مثلث قائم‌الـزاویه هزارها سال پیش از تولد فیثاغورس به‌صورتهـای مختلف در سرزمینهای شرقی‌توسط دانشمندان وصنعتگران به‌کاربرده می‌شد. درواقع باید به‌خاطرداشته‌باشیم درحالیکه هندسه‌استنتاجی وقیاسی‌عمرش به‌دوهزار و پانصد سال می‌رسد، هندسهٔ تجربی تقریباً هـم سن تمدن بشری است؛ و اغلب روابط هندسی‌که مآلاً از راه استدلال قیاسی ثـابت و تأیید شده‌اند هزارها سال قبل ازآنکه یونـانیان هندسه را به‌مثابهٔ یك علم اشاعه دهند، به‌عنوان واقعیات تجربی شناخته شده بود. این امر با دلائل مستند مانند لوحه‌های‌گلی بابلی‌ویا برگ نبشته‌های مصری تأییدشده است. حتی اهرام مصرو خرابه‌های بناهای باستانی، که توسط باستانشناسان حفاری نشده‌اند

گواه خاموش و قانع‌کننده‌ای براین امرند. درواقع نمی‌توان قبول کرد که چنین بناهائی بدون اطلاع قابل توجهی از هندسهٔ عملی می‌توانسته‌اند طراحی ویا ساخته شوند. ضمناً اگرمنظور ما از اثبات یك قضیهٔ ریاضی آن باشدکه اعتبار منطقی آنرا برپایهٔ یك دسته فرضیاتی که به‌مثابهٔ بدیهیات مسلم‌موردقبول است‌ثابت‌کنیم، دراینصورت فیثاغورس برهان‌قضیهٔ‌منسوب به‌خودرا دراختیار نداشت؛ نه برای آنکه چنین برهانی دور از بصیرت و دانش‌زمان بوده است، بلکه ازاین‌نظرکه او به‌طور جبلی‌نسبت به‌این‌گونه براهین‌بی‌علاقه بود؛ وخود این امربه‌سهولت درشیوه‌هائی که درعدد شناسی قیاسی‌خود به‌کاربرده است مشهود است.

۱۰

آنچه در اینجا متهورانه‌بیان می‌کنم یك‌گمان قریب به‌یقین است؛ و من ازاین موقعیت استفادهٔ‌کرده تأیید می‌کنم‌که با بیان این و یا سایرعقاید متنوع دیگری‌که در این اثرارائه می‌شود در صدد تحمیل قطعیت و مدعی اصالت آنها نیستم. نمی‌خواهم‌به‌آنها قطعیت بدهم، زیرا با نبودن اسناد معتبر مبنای عقیده، تصورو خیال‌خواهد بود؛ و دو تصور متفاوت به‌یك اندازه خوب ویا بداند. ادعای اصالت آنها را نیزندارم زیرا برای اینکه چنین ادعائی اصیل باشد محتاج به‌دانش پیکرانی درزمینهٔ کلیهٔ نوشته‌های مربوط به‌این موضوع‌است‌که‌آن نیزخود ادعای همه‌دانی وعقل‌کلی است. وضع من نسبت به مسائل تاریخی مانند وضع کسی است‌که یا باید آمادهٔ اثبات دعاوی خود با ارائهٔ مدارك ثبت شده باشد و یا شرافتمندانه قبول کند که این دعاوی فقط یك‌گمان است و مسئولیت نتایج آنرا نیز به‌دوش بکشد.

دربارهٔ فیثاغورس گمان من برآن است‌که لااقل‌یکی ازچند شکل‌بیان این قضیه قبل از فیثاغورس شناخته شده بوده و این شکل بیان برای طالس نیزروشن بوده است. اساس حدس من برپایهٔ این واقعیت است‌که قضیهٔ وتر نتیجهٔ مستقیم اصل تشابه است وبراساس شهادت تقریباً اکثریت قریب به‌اتفاق تاریخ نویسان یونان، طالس به‌نظریهٔ تشابه‌مثلثها آشنائی کامل داشته است.

من براین ادعا نیستم‌که طالس به‌مفاهیم ضمنی وسیع و کامل این قضیه درزمینهٔ هندسه وریاضیات به‌طورعموم آگاهی داشته‌است. این‌مفاهیم ضمنی تا ظهور هندسهٔ تحلیلی نه کاملاً ارزیابی‌شده بودند ونه می‌توانستند

ارزیابی کامل بشوند. و به‌همین‌دلیل، باتوجه به‌اینکه فیثاغورس نمی‌توانسته است به‌اهمیت هندسی این قضیه آگاهی داشته باشد، جواب این سئوال که آیا فیثاغورس اولین کسی بوده است که مفاهیم ضمنی ریاضی قضیهٔ منسوب به‌خود را تشخیص داده است نیز منفی خواهد بود.

ازطرف‌دیگر شکی نیست که فیثاغورس برای‌مفاهیم ضمنی متافیزیکی این رابطه ارزش به‌سزائی قائل بوده است. زیرا این واقعیت که اضلاع یك مثلث قائم‌الزاویه‌می‌توانند باقانونی به‌یکدیگر مربوط‌شوند که به‌وسیلهٔ عدد قابل بیان است، می‌تواند معرف آن باشد که همهٔ عناصرهندسی تابع چنین قوانین عددی هستند؛ زیرا درتحلیل نهائی، هریك ازاین عناصررا می‌توان به‌مثابهٔ عنصری از یك شکل خطی‌درنظر گرفت که به‌نوبهٔ خود قابل تبدیل به‌مثلثهائی می‌باشند؛ و هرمثلث نیز قابل تبدیل به‌مثلثهای قائم‌الزاویه است.

بنابراین، رابطه‌ای که اقلیدس به‌آن به‌عنوان قضیه‌ای ریاضی می‌نگریست، وامروز ما آنرا به‌منزلهٔ یك اصل‌مسلم هندسی؛ ویا نتیجهٔ‌مستقیم سایر اصول، تلقی می‌کنیم، برای فیثاغورس و پیروانش یك قانون اساسی طبیعت ودر عین‌حال، تأییدی درخشان برفلسفهٔ عددی‌آنها بود.

## ۱۱

شاید به‌جز ارسطو هیچیك از فلاسفهٔ اعصار گذشته شهرتی در حد فیثاغورس بدست نیاورده‌اند. خصلت برجستهٔ این مرد، واین که او پیشوای رسمی‌آئینی نیمه‌مذهبی‌وسرچشمهٔ‌مکتب افلاطونی‌بود، می‌تواند مبین‌شهرت جهان شمول او باشد. من قبلاً از دعاوی مفرط مریدان او گفتگو به‌میان آورده‌ام. این دعاوی محدود به‌قلمرو ریاضیات نیست. در میان سایر ادعاها وعلی‌رغم دلایل غیرقابل بحث وانکار، که فرضیهٔ‌مرکزیت خورشید اولین‌بار توسط آریستارخوس، یکی از معاصرین ارشمیدس، مطرح شد، پیروان فیثاغورس اورا پایه‌گذار این فرضیه می‌دانند.

اعتقاد براینکه گردش زمین به‌دور خورشید ازآموزش فیثاغورس بود حتی تا بعد ازآنکه کپرنیك سهم‌اساسی خودرا دراین زمینه ایفا کرد وجود داشت. درواقع، در ۱۶۳۳، هنگامیکه گالیله به‌گناه بدعت‌گذاری محاکمه شد وسند ابدی تفتیش عقاید را به‌جای‌گذارد، درضمن‌آنکه ناچارش‌کردند تا گناهان خودرا برشمرد، فرضیهٔ گردش زمین به‌دور خورشید رابه فیثاغورس نسبت داد. این حیلهٔ زیرکانه باعث شد تاکلیسا درتنظیم کیفرخواست برای

کپرنیك نیز، که خودکشیش وظیفه‌بگیر کلیسا بود، عجله به‌خرج ندهد.

امروزه هیچکس نظریهٔ کپرنیك را به فیثاغورس نسبت نمی‌دهد، و با اینحال گرچه کشف اودربارهٔ رابطهٔ اضلاع مثلث‌قائم‌الزاویه پایه‌ای مستحکم تراز اسنادفرضیهٔ کپرنیك به فیثاغورس ندارد، این‌اعتقادکه او پایه‌گذار این قضیه است سرسختانه مقاومت می‌کند. نتیجه آنکه نام فیثاغورس نامی‌آشنا برای‌اغلب مردمان‌تحصیل‌کرده شده‌است، درحالیکه طالس را فقط‌معدودی متخصصین فن‌می‌شناسند وحتی آنان نیز‌بیشتر به‌او به‌نظرفیلسوف می‌نگرند تا ریاضیدان.

قضیهٔ فیثاغورس‌تنها دستاوردی نیست‌که افتخار به‌وجودآوردنش‌را به‌ـ اشتباه به‌کسی‌که نقشی درآن نداشته باشد داده باشند، و ریاضیات نیز تنها میدانی‌نیست‌که‌درآن «عدالت باشکست روبروشده باشد». بررسی این‌پدیده، فصلی جالب در تاریخ اندیشه است،که از دیدگاه‌کتاب حاضر بیرون است. با اینحال، در ضمن پیش رفتن با این‌کتاب به‌انواعی مشابه از وقایع فرعی مهم دیگر بر می‌خوریم ونظری اجمالی به‌علت اساسی‌آن خواهیم‌انداخت. من حتی اگر دلایل مستند کافی برای تـأیید این نظر خود داشتم پشتیبان تغییر نام قضیه فیثاغورس؛ به قضیهٔ طالس نبودم. کلمهٔ « فیثاغورس » اکنون قسمتی از فهرست نامهای مربوط به‌ریاضیات شده است. واینکه این فهرست بااسامی بی‌مسمی ونادرست خودنمائی می‌کند زبانزد همگان است. با اینحال دراین زمینه از هیچ‌کس‌کاری ساخته نیست ـ نه اینکه تجدید نظر دراین‌باره پیشنهاد نشده‌باشد، بلکه‌مطلقاً روشن‌شده است‌که تلاش‌لازم‌برای تغییراین فهرست به‌نتایجی‌که ازاینکار بدست می‌آید نمی‌ارزد.

## ۱۲

انسان‌هرچه بیشتر برای ارزیابی دستاوردهای ریاضی فیثاغورس تلاش کند، بیشتر به‌بن‌بست می‌رسد. و بـرعکس هرچـه دوران طالس را بیشتر مطالعه‌کنیم، یعنی هرچه بیشتر دانشی راکه او برای اعقاب خود به‌میراث گذارده، باآنچه‌که خود او درشروع کارازاسلافش به‌میراث برده‌است قیاس کنیم، عظمت اودر مسائل بیشترمی‌شود، تاآنجاکه ناچار می‌شویم اورا در شمار چهره‌هائی مانند ارشمیدس، فرما، نیوتن، گوس وپوانکاره قراردهیم. اما درحالیکه نمی‌توان فیثاغورس را درمیان ریاضیدانهای بزرگ، ویا حتی کمی بزرگ، جـای داد، هیچ‌کس نتوانسته است مقام اورا در زمینهٔ تاریخ اندیشهٔ‌ریاضیات انکارکند. یقیناً بیان این‌حکم‌که «عدد برعالم‌حکومت می‌ـ

کند» ممکن است عالم امروزی‌را به‌تبسمی‌حاکی ازفروتنی وا دارد؛ بااینحال اگر ازشکل مغرورانه‌ای‌که این کلمات با آن ادا شده‌اند بگذریم، و اعداد را نه‌تنهاآنطورکه فیثاغورس می‌دید نه‌درمحدودهٔ اعداد مثبت‌بلکه بامفهوم همه جانبه ووسیع جدید در نظربگیریم، آنوقت آیا در عبارت فوق چیزی‌که ریاضیدان امروزی باآن‌نتواند ویا نخواهد موافق‌باشد می‌توان یافت؟

فرضیه‌های نسبیت وکوانتا، علوم فیزیکی‌را از پایه لرزانیده و تکان داده‌اند و فیزیکدانان را ناچارکرده‌اند تا اصولی مانند اصل بقای انرژی و حداقل عمل را به‌دور بیاندازند، و حتی نسبت به‌مفاهیم و تصورات مربوط به‌فضا، زمان، ماده وعلت ومعلول تجدید نظر کنند. وبا اینحال عدد باهمان استحکام کاملی‌که برفیزیك قدیم حاکم بود برفیزیك نونیز حکومت می‌کند. این استدلال که بررسی و مطالعهٔ هیچ پدیده‌ای کامل نخواهد بود مگرآن پدیده ازنظر ریاضی تقطیع شود همانقدر پابرجاست‌که درروزگار فیثاغورس بود. درضمن گمان اینکه صفات و مشخصه‌هائی فیزیکی وجود دارندکه عدد قادر به‌بیان آن‌ها نیست همانقدر برای یك دانشمند امروزی نفرت‌انگیزو زشت است‌که برای فیثاغورس بود.

# فصل سوم

# دربارهٔ پیدایش هندسه

هندسه در هرقضیه‌ای با زبانی صحبت می‌کند که تجربه
هرگز جرأت تکلم با آن را ندارد و در حقیقت بیش
از نیمی از آن را نمی‌تواند درک کند.
(William Whewell) ویلیام وول

## ۱

اجازه بدهید دربارهٔ پاره‌ای مسائل تاریخی گفتگو کنیم، وچون بحث مربوط به‌دورانی است که برای نامگذاری آن درتنگنا هستیم آنرا ریاضیات کلاسیک می‌نامیم. در این مسیر طولانی و دشوار با توجه به‌عدم تمایلی که به‌طورمتوسط درخوانندگان نسبت به‌نتایج حدوث این مسائل وجود دارد، من نیز خود را در چارچوب اشاره‌ای به‌قرنها محدود می‌کنم.

سال ۶۰۰ قبل ازمیلاد ـ طالس جوان را درمصرمی‌بینیم که‌مشتاقانه دانش کاهنان مصری را فرا می‌گیرد: آنچه به‌نظرما قوانین، دستورالعملها و شعائر مذهبی گنگ و درهم برهمی است که بدون جهت برروی هم انباشته شده‌اند، برای یونانی جوان دورنمائی مبهم و عظیم از وعده‌هائی پرارزش جلوه می‌کند. ۵۰۰ قبل از میلاد ـ فیثاغورس در مکتب خود درکروتون (*Croton*) در اوج افتخار به‌سر می‌برد. ۴۰۰ قبل از میلاد ـ افلاطون جوان ازآتن می‌گریزد مبادا به‌سرنوشت معلم خود سقراط دچارشود. ۳۰۰ قبل از میلاد ـ «مقدمات» اقلیدس در قرن بزرگ ریاضیات چراغ راهنما می‌شود، قرن ارشمیدس وارِاتوستن. ۲۰۰ قبل ازمیلاد ـ آپولونیوس رسالهٔ تاریخی و ماندگار **مقاطع مخروطی** خود را کامل می‌کند. ۱۰۰ قبل از میلاد ـ در اینجا تقریباً می‌توان تولد هرون اسکندرانی را قرار داد. ۱۰۰

میلادی- دراینجا نیز تولد بطلیموس را می‌توان ذکر کرد. ۲۰۰ میلادی- ظلمت تقریباً سراسر دنیای یونانی را فرا می‌گیرد، دیوفانتوس و پس از او پاپوس آخرین شعله‌های آتشی میرنده هستند - آتشی که تا هزار سال بعد روشن نشد.

## ۲

دراینجا توجه‌مافقط معطوف به‌سه‌قرن‌اول این‌دوران هزارساله‌است، با اینحال این دوران نسبتاً کوتاه اثری گیج‌کننده در تاریخ ریاضیات داشته است. نه از آنروکه دستاوردهای این دوره زیاد باشند ویا چهره‌هائی نظیر کسانی‌که درقرن بعد از اقلیدس خود نمائی کرده‌اند درآن درخشیده باشند. نه، گفتگو برسر وفور مطالب نیست بلکه دربارهٔ اطلاعی است‌که پژوهندهٔ این دوران را ناچار به‌توسل به‌حدس و مکاشفه می‌کند. عاقلانه‌ترین راه آنست‌که از تمام مطالب با ذکر اشاراتی مختصر صرفنظر کنیم. بدبختانه نمی‌توان این واقعیت رانادیده‌گرفت‌که درطول همین چند قرن‌بودکه هندسه پا به‌سن‌گذارد؛ بنابراین داستان را باید گفت، گرچه درآن مقداری حدس و اظهارات نظری واردگردد؛ ومن راهی بهتر ازاین نمی‌دانم‌که نظم رویداد-های تاریخی را معکوس‌کنم، و در واقع از آخر کار گفتگو را آغاز نمایم. بدین ترتیب است‌که باید موضوع از اقلیدس شروع شود.

**او در اسکندریه زندگی می‌کرد**این‌چندکلمه، همهٔ اطلاع مااست‌از زندگی‌مردی‌که مسبب‌اصلی‌شکل‌دادن‌به‌تعلیمات‌ریاضی‌نسلهای‌بیشمار بوده و یکی از آثارش، بعد ازکتاب مقدس، ازهرکتاب دیگری‌که تاکنون نوشته شده بیشتر منتشر شده است. به‌دنبال نام او، هیچ افسانهٔ داستانی‌کشیده نمی‌شود، وحتی‌داستانسرایان نیزاورا معاف داشته‌اند. اقلیدس نویسنده‌ای بود بارور، با اینحال فقط یکی از آثارش در مقابل فرسودگی قرنهاکه به دنبال‌داشت ایستادگی‌کرد. یونانیها به‌ندرت‌بانام‌خودش به‌اوتوجه می‌کنند؛ برای آنها او فقط نویسندهٔ $\Sigma\tau o\chi\varepsilon\iota$ است، یعنی اثری‌که ما به‌نام «مقدمات» می‌شناسیم؛ گرچه عبارت «اصول اساسی» ترجمه‌ای مناسبتر وگویاتر برای عنوان یونانی آن است.

کتاب در اصل رساله‌ای دربارهٔ هندسه بوده است، درحالیکه مطالب دیگری مانند عددهای صحیح، عددهای اول و گنگ را نیز در آن مورد گفتگو قرار داده است. به‌عنوان رساله‌ای دربارهٔ هندسه چنان عمیق است که تا به‌امروز به‌مثابهٔ پایهٔ اغلب کتابهای درسی مقدماتی ما به‌کار گرفته

شده است. گرچه «مقدمات» اقلیدس کتابی است جامع، با اینحال به‌خوبی پیداست که به‌طور کامل شامل همهٔ آنچه که اقلیدس دربارهٔ هندسه می‌دانسته است، نیست، زیرا لااقل دو اثر از بین رفتهٔ او نیز، دربارهٔ هندسه گفتگو داشته است. یکی از آنها به‌نام مخروطات مسلماً شامل بررسی کاملی بوده است، زیرا هنگامیکه یك قرن بعد آپولونیوس با رسالهٔ خود دربارهٔ این منحنیها ظاهر گشت، برخی از مخالفان سرسخت، او را به‌دزدی اثر اقلیدس متهم کردند.

## ۳

عنوان اثر مفقودهٔ دیگر او «*Porisms*» است، و آنچه را که ما در واقع دربارهٔ محتویات این کتاب می‌دانیم اشاراتی است که پاپوس بدان کرده است. این نقل‌قول فرما را برآن داشت تا احیای اثر از بین رفته را به‌گردن گیرد؛ بدبختانه روایت این استاد قرن هفدهم و همینطور تلاش قابل توجه کسانی مانند والیس (*Wallis*) وسیمسون (*Simson*) برای احیای مجدد این آثار به‌همان سرنوشت نسخهٔ اصلی دچار شد.

بنابراین، تنها مطلب صحیحی که ازکتاب «پوریسم» باقی مانده همین عنوان آنست، ودراین مورد نیز اتفاق نظر نیست که اقلیدس به‌چه مفهومی این عنوان را برای کتابش انتخاب کرده‌است. ترجمهٔ تحت‌اللفظی πορισμοσ عبارتست از شیوه، وسیله و ابزار و کاملاً قابل قبول است که اقلیدس این عنوان را به‌همین مفهوم انتخاب کرده باشد، به‌عبارت‌دیگر منظورش ازکتاب «پوریسم» نوعی ضمیمه وتکمل برای کتاب «مقدمات» بوده است، به‌این معنی که این رساله با استفاده ازشیوه‌های عملی‌ترسیمی، اصول اساسی کتاب قبلی راتکمیل می‌کرده است. با توجه به‌اینکه مکان هندسی وسیلهٔ اساسی تمام ترسیمهای یونانیها بوده است، این توضیح منافاتی با اظهارات پاپوس که گفته است کتاب‌فوق‌مربوط به **مکانهای هندسی**‌است‌ندارد. ازطرف‌دیگر شاید اقلیدس می‌خواسته است که با رسالهٔ «پوریسم» سهم خودرا درزمینهٔ مسائل مشهور اداکرده باشدکه افکار همهٔ کسانی راکه در آن دوران تمایلی به‌ریاضیات داشتند به‌خود مشغول‌کرده بود. این مسائل عبارت بودند از **تربیع دایره دوبرابر کردن مکعب، تقسیم زاویه به‌سه قسمت مساوی، تقسیم یك دایره به‌قسمتهای متساوی**، و منحصراً اجرای هریك از موارد فوق توسط پرگار و خط‌کش، یا به‌عبارت دیگر بدون استفاده از سایر مکانهای هندسی به‌جز خط مستقیم و دایره. خود این امرکه اقلیدس در کتاب «مقدمات» به‌هیچ

یك از مسائل فوق اشاره‌ای نکرده است این ظن را قوی می‌کندکه می‌خواسته است در جای دیگری به‌آنها بپردازد

تمام این مسائل در دوران جدید حل شده‌اند، وبهتراست بگوئیم که به‌مفهوم‌منفی‌حل شده‌اند، یعنی معلوم شده است‌که حل و ترسیم‌مسائل فوق در این محدودهٔ قراردادی انجام شدنی نیست. اثبات مطالب فوق محتاج به‌منابع جبر وآنالیز است‌که در اختیار ریاضیدانان یونانی نبوده است؛ به‌هرحال این امرنمی‌توانست مانع شود تا شخصی مانند اقلیدس با حدس وگمان به‌حقیقت امر پی‌نبرد؛ و یا با شیوه‌هائی‌که در دسترسش قرار داشتند برای اثبات وحل آنها نکوشد. واما با نبودن دانش جبر، به‌عنوان دانش رابطه‌ها و فرمولها، طبیعی‌ترین راه رسیدن به‌این امرکه اجرا و ترسیم باخط‌کش و پرگار برای‌کدامیك از مسائل ممکن و برای کدامیك ناممکن است؛ جز بررسی هندسی روشها و مکانهائی که آنها به‌وجود می‌آورند راه‌دیگری نبود، وتا آنجاکه‌ما می‌دانیم درست همین زمینه، فکر نویسندهٔ‌کتاب «پوریسم» را به‌خود مشغول داشته بود.

## ۴

قدر مسلم این است‌که اقلیدس گنجینه‌ای غنی از دانش ریاضیات و به‌خصوص هندسه در اختیارداشت. چه‌مقدار ازاین دانش از اکتشافات‌خود او، وچه‌مقدارآن دستاورد معاصران ویامیراث‌گذشتگان زمان‌اوبوده‌است؟ دلایل انکارناپذیری‌دردست است‌که قسمت اساسی آنچه‌که درکتاب«مقدمات» آمده است قبل از اقلیدس نیز شناخته شده بوده‌اند، نه در سبك نگارش و نه‌درطرح مسائل چیزی دراین رساله به‌نظر نمی‌رسد که مبین این امرباشد که نویسنده سهم اساسی درآن برای‌خود قائل شده باشد، بنابراین، به‌طور کلی، منطقی است هرگاه‌قبول‌کنیم‌که هدف اصلی نویسندهٔ «مقدمات» این بوده است‌که‌کار پیشینیان خود را در سلسلهٔ نظم و دقت درآورد.

این پیشینیان چه‌کسانی بوده‌اند؟ جدول قرن چهارم شامل نامهائی از قبیل ارکیتاس ( *Archytas* )، ادوکسوس ( *Eudoxsus* )، منایخموس (*Menaechmus*) است، مردانی باذکاوت وبرجسته‌که به‌یقین اثربه‌سزائی برریاضیات‌دوران خودداشته‌اند. نمی‌توان پذیرفت‌که اقلیدس، به‌خصوص در بررسی هندسهٔ فضائی خود، از آثار چنین کسانی متأثر نشده باشد. با اینحال خطا است اگرکشف قضایای هندسهٔ مسطحه را که شریان اصلی کتاب « مقدمات » اقلیدس است به‌مردان فوق نسبت دهیم، زیرا

همهٔ دلایل حاکی ازآن است‌که آنها نیز مبادی اولیهٔ هندسهٔ مسطحه را از پیشینیان خود به‌ارث برده‌اند. در واقع جزآنکه این مبادی و اصول اولیه را در اختیار داشته باشند نمی‌توانستند مالك اکتشافاتی باشندکه مفسران بعدی به‌آنها نسبت داده‌اند. اجازه بدهیدکمی بیشتربه‌بررسی این‌دستاوردها بپردازیم. تصور می‌کنندکه ارکیتاس اولین‌کسی است‌که هندسه را برروی **استوانهٔ دوار** بررسی‌کرده و دراین جریان به‌کشف خواصی از مقاطع‌مایل مثل بیضی‌نائل آمده‌است. ادوکسوس اولین‌کسی بود که هندسه را برروی **چنبره** ، یا به‌عبارت‌دیگر برروی‌سطحی‌که ازدوران محیط دایره و به‌گرد محوری واقع در سطح خودش به‌وجود آمده مطالعه و بررسی کرد. او مقاطع صفحات موازی با محور دوران را با این سطح کشف کرده است، منحنیهای درجهٔ‌چهارمی که امروز به‌دنبال نام‌کاشف آن، جووانی کاسینی (*Giouanni Cassini*)، منجم فرانسوی ـ ایتالیائی، بیضویهای‌کاسینی نامیده می‌شوند. این شخص نظریهٔ بیضیهای کپلر را تکمیل کرد و نشان داد که این بیضیها مدارهای تقریبی هستند ومدارهای واقعی سیارات‌همین بیضویهـاهستند. و بالاخره دلیل شهرت منایخموس‌کشف **مقاطع مخروطی** ویا به‌عبارت دیگر مقاطع صفحه با مخروط مستدیراست.

علی‌رغم اینکه درهریك از حالات، هندسه‌دان خواص مکان هندسی سطح مستوی را هدف آشکار بررسی خود قرار داده، ملاحظه می‌شود که تمام این بررسیها شامل مسائل سه‌بعدی بوده است، چنانکه گوئی چنین احساس‌کرده است‌که مایهٔ‌اصلی هندسهٔ مسطحه روبه‌کاستی‌نهاده وپایان‌یافته و پیشرفت بیشترفقط با درنظرگرفتن مکانهای مسطح، به‌مثابه منحنی‌محاط درفضا بدست می‌آید. اما چرا این هندسه‌دانها چنین مکانهای مخصوصی‌را برای مطالعات خود دست‌چین‌کرده‌اند؟ جواب این سئوال ما را به‌مسائل مشهوری که در فصل قبل بدانها اشاره کرده‌ام برمی‌گرداند، که مهمترین آنها دو برابرکردن مکعب است که قدما آنرا **مسئله دلیان** (*Delian*) می‌نامیدند.

## ۵

مسئلهٔ دلیان با استادی ومزاح در نامه‌ای که اراتوستنی خطاب به پادشاه بطلمیوس نگاشته بیان شده است. مقصود از این نامه‌آن بوده‌است که راه حل خودش را برای این مسئله بیان‌کند. او نام ابزاری راکه برای انجام اینکار به‌کارگرفته‌بود مزولاب نهاده‌است. آنچه در زیر گفته می‌شود

ترجمهٔ صریح مقدمهٔ نامهٔ او است. شکایت گلوکوس (*Glaucos*) که توسط اراتوستن نقـل شده از تـراژدی مفقـودهٔ پولئید (*Poleides*) از اوریپید (*Euri pides*) سرچشمه می گیرد.

«نمایشنامه‌ای قدیمی، درحالیکه مقبره‌ای به‌مساحت‌یکصدفوت مربع را شرح‌می‌دهدکه می‌نس (*Minus*) جهت‌گلوکوس برپاکرده بود، از زبان وی چنین میگوید؛ **دفترسلطنتی مرا بسیارکوچك ساخته‌ای‌آنرا دوبرابر کن ولی شکل مکعبی آنرا ثابت نگهدار.** زمان درازی هنـدسه دانان به جستجو پرداختند تا حجم جسمی معین را دوبرابرکنند بدون آنکـه شکل آنرا تغییر دهند. واین مسئله را دو برابر کردن مکعب (تضعیف مکعب) نامیدند. تا مدتی سرگشتگی حاکم بود تا بالاخره هیپوکرات ازمردم کیوس (*Chios*) نشان دادکه مسئله‌را می‌توان ازاین طریق حل‌کردکه فقط بدانیم چگونه دومقدار مشترك را در یك تناسب، مابین اندازه‌هائی از قطعه‌خطی مستقیم و دو برابرآن قرار دهیم؛ و بدین ترتیب از یـك سرگشتگی به سرگردانی دیگری‌که دست‌کمی از اولی نداشت رسیدند.

«پس ازآن اهالی دلیان، که بلا برآنان نازل شده بود، با کاهنی در معبد به‌مشورت نشستند وندای غیبی‌به‌آنان فرمان داد تا یکی‌ازمحرابهای معبد را دو برابر کنند. آنان با خاطری پریشان و سرگشته دست به‌دامان هندسه دانانی که در آکادمی افلاطون آموزش دیده بودنـد شدند و هندسه دانان نیزمشتاقانه به‌دنبال‌یافتن راه‌حلی‌برای مسئله رفتند، ازاین راه‌که دو مقدار مشترك مابین دوقطعهٔ مفروض از یك تناسب قرار دهند. آرکیتاس از اهالی تارنتوم (*Tarentum*) به‌وسیلهٔ استوانه و ادوکسوس ازاهالی کنیدوس (*Cnidus*)، از راه منحنیهائـی بـه‌نـام «شبه بیضی» به‌این مسئله دست یافتند.

اما در حالیکـه شیوه‌های آنهـا از نظر دقت زیاد هندسی چیزی کم ندارد، طرحشان به‌سهولتی‌که بادست بتوان‌آنرا اجراکرد امکان‌پذیرنیست. طرح منایخموس عملی‌تر و ساده‌تر است، ولی‌آن نیرکاری کاملاً دشوار و پرزحمت است».

## ۶

این سیرقهقرائی به‌عقب ما را بعدازآن به‌قرن پنجم می‌برد. آیا این انتهای جستجوی ما خواهد بود؟ آیا اصولی‌که اقلیدس بعداًکتاب خود را برآن پایه نهاد بدست ریاضیدانان آن دوران کشف شده است؟ نه؛ به‌نظر

می‌رسد که هندسه‌دانهای قرن پنجم حتی کمتر از ریاضیدانهای قرن چهارم سرگرم اصول اساسی بوده‌اند. آنها همچنین اصول اقلیدس را بدیهی می‌دانستند و نیز ناگزیر مجذوب سراب مسائل حل نشده بودند. در واقع قرن چهارم را باید **قرن دلیان** در ریاضیات نامید، قرن پنجم را نیز **قرن تربیع کنندگان دایره** باید نام نهاد.

طمع حل مسئلهٔ تربیع دایره به ریاضیدانهای حرفه‌ای مانند هیپیاس هیپوکرات یا نیمه ریاضیدانها وفلاسفه‌ای مانند آناکساگور (*Anaxagoras*) معلم پریکلس، که بنا به‌روایتی دوران زندانش را با کوشش برای حل این مسئله گذراند، محدود نبود. این امر عدهٔ زیادی از دوستداران رضیات و پژوهشگران مشهور را به‌خود مشغول می‌داشت. چنانکه معلوم است قرن پنجم شاهد ظهور نوعی ازنمونه‌های عجیب است که به‌حق اگوست دمرگان (*Augustus De morgan*) به‌آن لقب *Pseudomath* داده است. این دوالپا به‌بدنهٔ کشتی ریاضیات، درطول سفرپرحادثه وطولانی‌اش چسبید و تا به‌امروز هم سرسختانه وجود خود را حفظ کرده است. درحال‌حاضر مامسئلهٔ تربیع دایره را با تعیین خصلت ریاضی عدد $\pi$ مشخص کرده ایم، به‌عبارت دیگر سطح مربعی که در جستجوی آنیم برابر است با $\pi R^2$. این امر برای شعاع معین $R$، مسئلهٔ تربیع را به‌ترسیم قطعهٔ $\pi R$ تبدیل می‌کند. آیا این عدد گویا است؟ یعنی، آیا $\pi$ ریشهٔ معادله‌ای درجه اول باضرابت عددی صحیح است؟ اگرچنین نیست، آیا ریشهٔ معادلهٔ درجه دوم و یا ریشهٔ دسته‌ای از این نوع معادلات است؟ اگر ریشهٔ معادلهٔ **درجه دوم** نیست آیا لااقل ریشهٔ **معادله‌ای جبری است**؟ یعنی آیا ریشهٔ معادله ای **با درجات بالا است که نمی‌توان آنها را به‌معادلاتی بادرجات پائین تبدیل کرد**؟ هرعددی که ریشهٔ معادله‌ای جبری باضرایب صحیح نباشد آنرا غیر جبری یامتعالی (*Transcendant*) می‌نامند. از این امر که دوهزار و چهار صد سال طول کشید تا خصلت غیرجبری عدد $\pi$ معلوم شد، می‌توان دریافت که جواب سئوالهای فوق با چه مشکلی دست به‌گریبان بود.

اما ساختمان یك شکل هندسی چه ارتباطی با خصلت یك‌عدد دارد؟ جواب قانع کنندهٔ آن را برای فصل دیگر نگه می‌داریم و دراینجا به‌این اکتفا کنیم که می‌توان ثابت کرد هرگاه **عددی مانند N گویا و درجهٔ دوم باشد دراینصورت قطعهٔ NR را به‌وسیلهٔ قطعهٔ R می‌توان ازراه اعمالی باخط‌کش وپرگار رسم کرد.** کلی‌تر بگوئیم، هرگاه $N$ عددی جبری باشد، در اینصورت می‌توان $NR$ راکم و بیش توسط **یك مفصل‌بندی پیچیده**، یعنی

توسط ابزاری‌که از میله‌های مفصل شده و پاشنه‌گردهائی به‌وجودآمده‌اند ترسیم‌کرد. اما اگر $N$ عددی متعالی یا غیرجبری باشد، هیچ مفصل‌بندی وجود ندارد‌که توسط آن بتوان $NR$ را با در دست داشتن $R$ ترسیم‌کرد؛ در اینجا مکانیسم لازم باید علاوه براتصالهائی‌از میله‌ها وپاشنه‌گردهاشامل **غلطك و پیچ وچرخ** وغیره نیزباشد.

اینك توضیحات فوق را در مورد مسائل مشهور در نظر بگیریم. در اینصورت این امعان نظرما را به‌این نتیجه می‌رساند‌که با توجه به‌اینکه $\pi$ عددی است غیرجبری، مسئلهٔ تربیع **نه به‌وسیلهٔ خط‌کش وپرگار ونه‌توسط هیچ مفصل‌بندی** ساده‌ای قابل حل نیست؛ از طرف دیگر، مسائلی مانند **دوبرابرکردن مکعب، تقسیم زاویه به‌چند قسمت، تقسیم دایره به‌قطعات مساوی**، به‌این‌دلیل‌که قابل توضیح توسط معادلات جبری‌اند، توسط‌پاره‌ای مفصل بندیها قابل ترسیم می‌باشند.

مهمترین علتی‌که موجب سرگشتگی در مسائلی مانند تقسیم زاویه به‌سه قسمت و یا تربیع دایره‌گردید **فقدان تمایز بین مسئلهٔ تعیین خصلت عدد واندازه و ارزش‌آن** بود. این سرگشتگی‌به‌هیچوجه محدود به‌عوام نیست. بنابراین، نویسندگانی‌که درواقع خواسته‌اند موضوع رابهتربدانند، ادعاکرده‌اندکه ریشهٔ مسئلهٔ تربیع را می‌توان به‌چین وبابل و مصرکشاند، و همهٔ منظورشان از این بیان آن است‌که معماران و نقشه‌برداران این سرزمینهای باستانی درمواجهه با لزوم اندازه‌گیری قوسهای دایره وسطوح آن به‌آنجا رسیدندکه به‌عدد $\pi$ اندازه‌ای‌گویا تخصیص دهند.

اینك فرض می‌کنیم‌کوششهای فنی‌که برای اندازه‌گیری نسبت محیط دایره به‌قطرآن به‌عمل‌آمده به‌اندازهٔ‌خود هندسهٔ تجربی‌کهن باشد، وکهولت هندسهٔ تجربی نیز به‌پای سن تمدن بشر برسد؛ این‌کوششها هیچ ارتباطی با مسئلهٔ خصلت ریاضی عدد $\pi$ ویا المثنای هندسی آن،‌که همان تربیع دایره باشد، ندارد ــ مسئله‌ای‌که فقط پس ازآنکه هندسه ازشکل تجربی به‌مرحلهٔ استنتاجی و قیاسی قدم نهاد مفهومی بدست آورد. حتی در این مرحله نیز مشکل بتوان پذیرفت‌که در دوران اولیهٔ هندسهٔ قیاسی، چنین مسائلی خود-نمائی‌کرده باشند؛ زیرا فرمول‌بندی دقیق این مسائل مستلزم دانش عمیقی از قضایای اصولی هندسهٔ مسطحه، استادی در زمینهٔ ساختمان اساسی آن و بالاتر ازهمه مربوط به‌حالتی انتقادی است‌که فقط در سایهٔ دقت هندسی کاملا پیشرفته میسر است.

می‌توان‌کمابیش اطمینان داشت‌که مسئلهٔ تربیع در خاك یونان پا به

عرصه وجود گذارد، و درعین‌حال‌که ما اولین عنوان‌کنندهٔ آنرا نمی‌شناسیم، این نیز مسلم است‌که واقعه دیرتر ازاواسط قرن پنجم اتفاق نیفتاده است. درحقیقت این مسئله الهام‌بخش کوششهای دوریاضیدان مشهورشدکه حاکم برنیمهٔدوم‌قرن پنجم‌بودند، یعنی هیپیاس ازاهالی الئأت‌وهیپوکراات از اهالی کیوس، همان هیپوکراتی‌که در ارتباط با مسئلهٔ دلیان توسط اراتوستن به‌او اشاره شده است. هیپوکراات برای اولین‌بار نشان دادکه تربیع دایره وتبدیل محیط آن به‌خط مستقیم، درواقع، منجر به‌یك مفهوم می‌شوند. و هیپیاس با اختراع تربیع‌کنندهٔ مکانیکـی برای دایره، پارا از این فراتر نهاد، این دستگاه درنوع‌خود ابزاری منحصربه‌فرد بود، و دستگاهی بودکه ازنظرهنر هندسی‌و بصیرت‌ودقت می‌توانست‌افتخارش‌نصیب کسی‌مانند ارشمیدش باشد.

## ۸

می‌دانیم‌که‌هیپیاس در۴۲۵ قبل ازمیلاد متولد شد؛ طالس در۵۵۰ پس از دورانی از فعالیت‌که تقریباً نیم قرن به‌طول انجامید دیده از جهان فروبست وحتماً این واقعیت راکه هندسهٔاستنتاجی وقیاسی قبل ازپایه‌گذارش نه دریونان ونه درجای دیگروجودنداشته است باید پذیرفت. بدین ترتیب در دورانی‌کوتاه‌تر از دویست سال، هندسه دستخوش تغییر شکلی اساسی شد و ازصورت قواعد علمی درهم برهم مصری به‌شکلی تنظم شده ومدون درآمد. این‌پیشرفت خارق‌العاده وقتی بیشترمایهٔ حیرت می‌شودکه می‌بینیم از نظرگسترش اندیشه‌ها این دو قرن مشابه دو دههٔ دوران ما هستند. در حقیقت باید به‌خاطر داشت‌که عملا جزو عادات آن روزگار نبود تااندیشهٔ کسی به‌رشتهٔ تحریر درآید؛ و چنین دست نویسهائی اگر باقی می‌ماندند و آفتابی می‌شدند، ممکن بود فقط با زحمت زیاد رونویس واستنساخ شوند؛ فهرست اصطلاحات ریاضی، دوران کودکی خود را می‌گذراند و علامت‌گذاری به‌هیچوجه وجود خارجی نداشت؛ حتی تعیین رئوس‌اشکال به‌وسیلهٔ حروف نیز قبل ازهیپوکراات معمول نبود؛ ودرنبود مرکزی مانند اسکندریه برای فعالیت ریاضی، در قرن قبل از اقلیدس، ریاضیات در نواحی پراکنده و دور ازهم‌کشت می‌شد و رشد می‌یافت؛ تبادل افکار در میان پژوهندگان به‌مقیاس وسیع فقط از راه ارتباطهای فردی صورت می‌پذیرفت؛ و بالاخره مسافرت از آسیای صغیرتا ایتالیای جنوبی،که امروزه درمدتی‌کمتر ازیکی دو ساعت ممکن است، محتاج به ماهها صرف وقت بود.

وهنوز همهٔآنچه را که بایدگفت‌گفته نشده‌است. وقتی این دوقرن از

نظر دستاوردهائی که در طول آن بدست آمده مورد نظر قرار می‌گیرند با فاصلهٔ یکصدو بیست وپنج سالی که طالس را ازهیپیاس جدا می‌کند، یعنی دوران نازائی پیشرفت ریاضیات، این فاصله تبدیل به‌یك قرن می‌شود. در حقیقت این دوران فقط یك ریاضیدان مشهور را عرضه نمود وآن فیثاغورس بودکه او و شاگردانش بیش ازحدی‌که بتوانند سهم ارزنده‌ای درزمینهٔ فنی هندسه داشته باشند، به‌جنبهٔ ما بعد طبیعی و محتوی اسرارآمیز ریاضیات سرگرم بودند.

بنابراین به‌طور منصفانه، نتیجه حاصل، مارا برآن می‌دارد تا قبول کنیم‌که این دستاورد وسیع وسخاوتمندانه حاصل‌کاریکنفربوده است: طالس ملطی. «او به‌هندسه دقت‌بخشید وآنرا براساس تشابه و توافق بنیان نهاد» چنین است شهادت یکی از تاریخ دانان. و باز این تمجید چنانکه شاید و باید سخاوتمندانه نیست، زیرا او این اصول را با روشی پرمایه تکمیل‌کرد و آموخت که چگونه باید این روش را برای ساختمان اشکال واثبات قضایا به‌کار برد. وقتی خصلت بزرگ وانقلابی دستاورد طالس را درنظر بگیریم و به‌خاطر داشته باشیم او وقتی‌کار را شروع‌کردکـه هندسه‌دانهایی وجود نداشتند، تعجب نخواهیم‌کرد ازاینکه بیش ازیك قرن طول‌کشید تا یونانیان اثر پایه‌گذارهندسه‌را هضم‌کنند: طالس به‌مثابه **معلم**، اولین‌هندسه‌دانها را به‌وجود آورد، همانطور که به‌مثابهٔ **متفکر** اولین هندسه راکـه‌شایستهٔ این نام بود پایه‌گذارد.

## ۹

درتوضیح رشد سریع هندسه دریونان، نظریهٔ متقابلی نیزوجود دارد حاکی از اینکه دستاوردهائی‌که برای یونانیان دراین زمینه ادعا شده است در واقع، ریشهٔ خارجی دارد. این نظریه نسبتاً جدید است و درحقیقت این گونه اظهارنظر در میان متخصصان تاریخ علوم قرن نوزدهم چندان مورد تأیید نیست. قدر مسلم آن است‌که مفسران‌کلاسیك ریاضیات درتأیید دینی که هندسهٔ یونان به‌کاهنان ایسیس (*Isis*) و اوسیریس (*Osiris*) دارد به اندازهٔ‌کافی صدای خود را بلند کرده‌اند. با اینحـال، این ستایش فراوان در بارهٔ سهم مصر به وسیلهٔ برگ نبشته‌های بدست آمده در قرن گذشته تأیید نشده است. درواقع، این اسناد نشان می‌دهند‌که هندسهٔ مصری، حتی اگر به‌عنوان تلاش تجربی مورد نظر قرارگیرد، اگر نگوییم خام، چنان ابتدائی بودکه یونانیان نمی‌توانستندنوشته‌ای‌ارزنده ازاین‌منبع بدست‌آورند.

با اینحال، اخیراً پیشرفت قابل توجهی در خواندن خطوط میخی بر روی لوحه‌های گلی، که درخرابه‌های کهن بابلی کشف شده، صورت گرفته است. این بررسیها معلوم کرده است که بابلیها گنجینه‌ای از معلومات علمی بسیاربزرگتر از آنچه تاکنون تصور می‌شده است، دراختیارداشته‌اند. مثلا در حساب عدد شماری موضعی، و حتی علامتی هم نظیر ممیز اعشاری ما اختراع کرده‌اند؛ در جبر می‌دانستند چگـونه معادلات درجهٔ دوم وسوم را طرح کنند، وحتی به‌وسیلهٔ جدولهای عددی ماهرانه‌ای به‌حل چنین معادلاتی نایل آمده بودند؛ وبالاخره دراندازه‌گیری سطوح واحجام هندسی، مصریها را با فاصلهٔ زیادی پشت‌سر گذارده بودند. این بررسیهای باستانی برخی از نویسندگان را برآن داشته است تا چنین گمان برندکـه آموزش بابلیها در طول قرن ششم، و حتـی قبل ازآن، از راههائی، به‌یـونان نفوذکـرده و بدینطریق مـی‌توان پیشرفت خارق‌العادهٔ ریاضیات یونان را در قرون بعد ارزیابی کرد.

## ۱۰

در اینجا برآن نیستم که جزئیات این فرضیه را بررسی کنم. ضمناً زیاد مهم نیست که یونانیان چگونه مواد اولیهٔ هندسه رابدست آوردند تاهندسهٔ خود را برآن بنا نهند. مطلب بر سر آن است که چه وقت و چگونه شیوهٔ استدلال **استنتاجی وقیاسی** سر برآورد و هندسه را به‌ریاضیات تبدیل کرد. نظریهٔ مـربوط به «بابل» فقط هنگامی کسب اهمیت می‌کندکـه طرفداران متعصب آن بتوانند ثابت کنندکه بابلیها به‌قواعد هندسهٔ خودشان از طریق **قیاس** رسیده‌اند. و اما دراین حد، نبشته‌های میخی بابلیها مدارکی بیش از هیروگلیف مصریها در اختیارما نمی‌گذارد.

مسائل دیگری نیز وجود دارد کـه پشتیبانان نظریهٔ بابلی باید قبل از آنکه نظریهٔ خود رابرپایه‌ای محکم استوارکنند، جوابگوی آنهاباشند. چگونه است که ما اشاره‌ای از تأثیر بابلیها درهیچیك ازگزارشهای مفسران یونانی نمی‌یابیم؟ اگر این‌امری تعمدی وکوششی دسته‌جمعی برای پنهان داشتن منابع تبحریونانیان بود، چگونه همین اشخاص تااین پایه درتصدیق واقرار دین خود به‌مصریان سخاوتمند بوده‌اند؟ اگر تأثیری وجود داشت، چرا در زمینهٔ جبرکه کلدانیها بسیار پیشرفته و یونانیان بسیار عقب مانده بودند، اثری‌از این تأثیر دیده نمـی‌شود؟ در واقع در عصری که دو برابر کردن مکعب و تقسیم زاویه به‌سه قسمت مساوی متداول بود، شیوه‌های

بابلیها در بررسی معادلات درجهٔ سوم می‌توانست باموفقیت مورد استفاده قرار گیرد.

## ۱۱

من شروع به بیان سیر تحولی هندسه یونان از آغاز تازمان رشد کامل آن در **«مقدمات»** اقلیدس کردم. این بررسی روشن کرد که انگیزهٔ حاکم براولین وآخرین مراحل آن عصر ضابطه دادن به‌هندسه بود، درحالی که این انگیزه در دوران بین این دومرحله شکل کشمکش برای حل مسائل را به‌خودگرفت. تاریخ‌آن‌عصر شبیه به‌یك سمفونی است که پایانش چیزی جز تنوعی از تم مقدمهٔ آن نیست، در حالی که موومانهای وسط برپایهٔ نقشهای کاملاً متفاوت ساخته شده‌اند، به‌طوریکه تم اصلی در این مرحله فقط جنبهٔ کمکی و ضمیمه رادارد.

به‌مفهوم واقعی این بررسی دفاع از یك تزمعین بود، وترس من از آن است که علی‌رغم بحث و گفتگویی که برای پشتیبانی وتأیید آن اقامه شد، اثری غیر قابل دفاع برخواننده بگذارد. در واقع در اینجا ضابطه‌ای جامع وکامل وقابل درك وجود داردکه‌بدون تغییری قابل ملاحظه، دوهزار سال پایدار بوده است و امروز نیز به‌صورت یکی از اساسی‌ترین تعلیمات کنونی باقی مانده‌است. این فکرکه‌دستاورد فوق‌کاریك مرد تنها، یاحتی‌یك نسل تنها باشد، آنقدر مغایر بامعتقدات مورد قبول درزمینهٔ پیشرفت‌دانش است‌که حتی تاسرحد خیالبافی پیش می‌رود.

تاسرحد خیالبافی پیش می‌رود وباتمام صداقت باید به‌خواننده‌هشدار دادکه درتاریخ ریاضیات این‌گونه توهم وخیالبافی درسر هرپیچ انتظاراورا می کشد. من یك بار دریکی از سخنرانیهای پوانکاره شرکت کردم که در آن اشاره‌ای ثبت نشده‌به‌این امرکردکه تاریخ ریاضیات شبیه است‌به‌گلچینی شگفت‌انگیز از داستانها، ودر میان این توده، داستان هندسه‌شگفت‌انگیز‌ترین آنها است. بنابراین من تلاشی نمی‌کنم تابا اقامهٔ دلیلی بیش از این، به‌نظر خود استحکام بخشم و اطمینان دارم خواننده‌ای‌که در این راه‌پیمائی دشوار به‌سوی سرزمین‌تاریك عدد و شکل وتعمیم، بامن همگامی می‌کند و استقامت به‌خرج می‌دهد، با تشخیص آنکه عکس‌العمل اولیهٔ او به‌مقداری زیاد به‌تصور قبلی‌اش در زمینهٔ پیشرفت دانش بشری بستگی داشته دچار حیرت نخواهد شد.

بدین ترتیب مطلب را تمام می‌کنم.

# فصل چهارم

# اهرام

تاریخ خود را تکرار نمی‌کند. تاریخ نویسان‌اند که
یکدیگر را تکرار می‌کنند
دالامبر (D ,Alembert)

۱

ما به‌وادی جیزه سفر می‌کنیم که روزگاری سرزمین تدفین قدیم بود. قبور عظیم شاهان‌مقتدری که سالها است فراموش شده اند هنوز پابرجا است. اینها یادگار پابرجائی است ازخود پسندی عظیم آنها، ونشانه‌ایست ازپیشرفت فنی عصری‌که پیش از چهارهزار سال برتمدن یونان تقدم دارد. در میان این ساختمانها که برسطحی متجاوز از بیست جریب پراکنده‌اندوتا حدود هفتاد متر ازپایه‌های خود سربه‌آسمان کشیده هرم خئوپس،که نام کبیر به‌خودگرفته، به‌چشم می‌خورد.

براساس افسانه‌ای یونانی، دراین آثار عظیم، اولین درسهای هندسهٔ استنتاجی وقیاسی آموخته شده است. زمان: ۶۰۰ قبل از میلاد؛شاگردان: کاهنان‌محترم آئین ایسیس وازیریس: آئینی چنان کهن‌که ریشه‌های آن به‌ابدیت می‌رسد. معلم: شخصی بنام طالس، یك یونانی‌که خصوصاً پابه‌این سواحل‌گذاشته است تا از راز های دانش سری‌کاهنان سر درآورد. مسئله: پیداکردن ارتفاع هرم‌کبیر.

چراکاهنان مسئله را برای طالس عنوان‌کردند؟ آیا این زورآزمائی به‌خصوص طرح‌ریزی شده بود تااین یونانی تازه به‌دوران رسیده راسرجایش بنشانند؟

آیا آنها با کوششهای خود قادربه‌حل مسئله نبودند؟ آیا قابل قبول است‌کسی‌که بناهائی بااین عظمت برافراشته ازحل مسئله‌ای که امروز در عداد تمرینات معمولی برای‌شاگرد سال دوم دبیرستان است عاجزباشد؟

وقایع‌نگاران، جوابی به‌این سئوالات‌یك شکل نداده‌اند. آنها خودرا درچارچوب این ادعا محصورکرده‌اندکه **طالس‌مسئله‌را به‌شکلی‌هوشمندانه ودقیق، بااندازه‌گیری سایهٔ هرم در ساعتی که سایهٔ انسان برابر ارتفاع خود اوبود حل کرد.**

## ۲

از نظرلغت شناسی‌کلمهٔ «پیرامید» (*Pyramid*) به‌داستان‌گفته شده اعتبار وصحت می‌بخشد. کلمهٔ‌یونانی *Pyramis* تغییرصورتی ازکلمهٔ‌مصری *Pyremus* است،که باکمال تعجب، نه به‌معنای‌مقبرهٔ پادشاه ونه‌به‌مفهوم یك جسم‌هندسی است. پیراموس‌کلمهٔ مصری هم‌ارز **ارتفاع** است. احتمالاً کلمهٔ فوق در تمجید از عظمت این آثار تاریخی به‌کثرت استعمال شده و این ممکن است درغایت امر منجربه‌آن شده باشدکه خود بنا این‌نام را به خود بگیرد وبعدها هرجسم صلبی شبیه به‌این بنا با این نام خوانده شود. جریان واقعه هرچه می‌خواهد باشد، این‌کلمه درغایت امر مفهوم‌وسیع‌تری بدست آورده است. زیرا، در حالیکه تمام اهرام مصردارای قاعدهٔ مربع و وجوه متشابه‌اند،کلمهٔ پیرامید، همانطورکه به‌وسیلهٔ اقلیدس تعریف شده و ما نیز آنرا قبول داریم و به‌کار می‌بریم، **به‌هرجسم صلب متقارن ویاغیر متقارنی با قاعدهٔ کثیرالاضلاع‌ووجوه مثلثی، که‌به‌یك نقطه‌ختم‌می‌شوند، اطلاق می‌گردد.** اینك دراینجامسئله برسرصحت داستان نیست، بلکه‌موجه بودن آن مورد نظرما است‌که‌کاملا مسئلهٔ دیگری است. درحقیقت بیهوده است اگربیندیشیم‌که آیا واقعاً مصریان مسئله را به‌طالس ارائه دادند و یا آنکه خود طالس مسئله‌ای راکه طرح شده بود حل‌کرد. از طرف‌دیگر، جواب دوسئوالی‌که در زیرمی‌آید قطعاً منجربه‌ارزیابی وضع ریاضیات در آن دوره‌خواهدشد. اول: آیا تعیین ارتفاع پیرامید درحدود دانش‌دانشمندان مصری درآن دوران بوده است؟ دوم: آیا طالس توانسته بود ارتفاع‌هرم بزرگ را با شیوه‌ای‌که به‌او نسبت داده‌اند، فقط با کاربرد اندیشه‌هائی حاصل از دانش شخص خود اندازه‌گیری کند؟

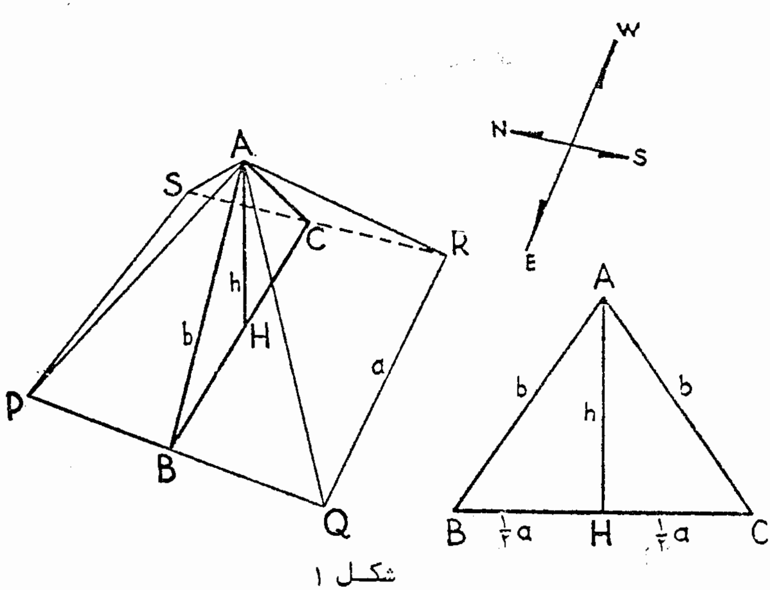
## ۳

هرم متقارن، با قاعدهٔ مربع شکل *PQRS* راکه درشکل۱ داده‌شده

است. در نظـر بگیریم. ضلع مربع را $a$، ارتفاع وجوه جانبی، یعنی طول عمود وارده بر هر یك از اضلاع قاعده، را $b$ و ارتفاع هرم را $h$ بنامیم. $a$ و $b$ را می‌توان مستقیماً اندازه گرفت و بنابراین می‌توان آنها را معین فـرض کـرد؛ مسئله بـر سر محاسبهٔ $h$ است. صفحـهٔ قائم را کـه از رأس هـرم عبور کـرده و موازی یکـی از اضلاع قاعدهٔ هـرم است در نظـر می گیریم؛ مقطع این صفحه باهرم مثلث متساوی‌الساقین $ABC$ است بااضلاع $a$، $b$ و $b$، ارتفاع این مثلث $AH$ برابر مقدار $h$ است که در جستجوی آنیم. با استفاده از قضیهٔ وتر مثلث قائم‌الزاویه $AHB$ می‌توان نوشت:

$$h=\sqrt{b^{2}-(\frac{1}{2}a)^{2}}$$

امروز دستیابی به‌حل چنین مسئله‌ای، ساده به‌نظر می‌رسد، ولی




شکـل ۱

از محدودهٔ دانش ریاضی دورانی که مورد نظر ما است خارج بوده است. یقیناً مصریها حالات مشخصی را کـه رابطه وتر در آنها صادق است،

مانند عددهای‌سه‌تائی ( ۳، ۴، ۵) یا (۵، ۱۲، ۱۳) را می‌دانستند. ولی دلیلی در دست نیست که به‌اعتبار و صحت کلی قضیهٔ فیثاغورس آگاهی داشته‌اند. بعلاوه، کاربرد عملی قضیه مستلزم درك تقریبهای گویای مربوط به **ریشهٔ عددهای گنگ** نیزهست. و تاآنجاکه ما می‌دانیم مصریان به‌این امر بصیرتی نداشتند.

این بدان معنی نیست که برای اندازه گیری ارتفاع هرم بزرگ وسائلی در اختیار آنها نبوده است. شکل یك هرم متقارن با قاعدهٔ مربع، اصولاً به‌نسبت ارتفاع به‌ضلع قاعدهٔ آن ($K=\frac{h}{a}$) وابسته است، که آن نیز به‌نوبهٔ خود به‌طورکامل مشخص کنندهٔ زاویهٔ دو سطحی بین صفحهٔ قاعده و یکی از وجوه هرم می‌باشد. اینك، مقدر چنین بوده‌است‌که این مشخصه به‌طور محسوس برای تمام هرمهای جیزه یکی باشد، این زاویه برای‌آنهابین ۵۰ و۵۲ درجه، و نسبت فوق بین ۰/۶۳ و ۰/۶۴، یعنی به‌طور متوسط برابر $\frac{۷}{۱۱}$ است. به‌عبارت دیگراهرام جیزه، با تقریب کافی، **جسمهایی متشابه‌اند**، و این امر دلیل برآن است که اگرنسبت $K$ برای یکی از آنها معین می‌بود، می‌توانسته است برای محاسبهٔ ارتفاع هریك از هرمهای دیگر مورد استفاده قرارگیرد. ممکن‌است یکی‌ازهرمهای کوچکتر راکه ارتفاع آن برای اندازه‌گیری مستقیم در دسترس‌بوده است، برای‌تعیین‌این‌نسبت‌به‌کار برده باشند، یا آنکه ممکن‌است‌مدل بسیار کوچك ومینیاتوری‌برای این منظورساخته شده باشد،که احتمال‌آن‌بسیارکم است. امابايد به‌خاطر داشته باشیم‌که مصریها در مینیاتورسازی استاد بوده‌اند.

## ۴

این تشابه نزدیك هرمهای مصر، موضوع حدسهای زیادی دردوران اخیربوده است. می‌توان این همشکلی را چنین توضیح دادکه ساختن این ردیف مقابرعظیم درطول بیش از هزارسال صورت‌گرفته، به‌طوریکه‌سازندهٔ آخرین هرم مدلهائی با شکوه‌را، که به‌حکم سنت تقدس یافته بودند، در برابرچشم داشته است. اما دراینصورت‌چرااولین هرم باچنین‌تناسب عجیب ساخته شده است؟ این زوایا و نسبت‌های غیر قراردادی چگونه به‌وجود آمده‌اند؟ یك حدس محتمل آن است‌که انتخاب این نسبتها القای نظریات فنی و مهندسی باشد. روکار این مقابرکه از سنگ گرانیت است برروی مصالح ساختمانی قطور کارگذارده شده؛ برای بالاکشیدن آجر، ملات و

سنگها برروی سطوح پرشیب احتیاج به‌جان کندن، زحمت طاقت‌فرسا توأم با عرق و خون لشکری از بردگان بوده است. یك **زاویهٔ حد** وجود دارد که خارج از آن مایه‌گذاردن زندگی غلامان، غیر اقتصادی و مقرون به صرفه نبوده است، زیرا حتی زندگی برده هم قیمتی داشته است. بنابراین نسبت $K$ باید نوعی «ضریب تحمل‌انسان»و $\frac{۷}{۱۱}$، به عنوان حد این تحمل، انتخاب شده باشد.

لکن چنین‌ارزیابی از حقیقت امر، کسانی‌راکه تمایل به‌مسائل‌مرموز و پیچیده دارند به‌سختی قانع می‌کند. در واقع عیناً همان تفسیر مذهبی و حداقل زیبا شناسی قابل قبول است: این نسبت باید یکی از شعائر مذهبی، معیاری از زیبائی و یا هردوی آنها باشد! حالا چرا ۷ و ۱۱ برای این رسالت منحصر به‌فرد بایددست چین شده باشند؟ آیا به‌خاطرنقش منحصر به‌فردی‌است‌که این‌عددهای‌جادوئی در دگرگونی سرنوشت بازی طاس‌ایفا می‌کنند؟ این بحث مرموز و پیچیده است‌که تاکنون پیشرفت چندانی برای توضیح خصائل استثنائی طرح اهرام مصرنداشته است. عمومی‌ترین نظریه در زمینهٔ زیباشناسی نظریه‌ایست به‌نام تقسیم‌طلائی، که باطرح اهرام مصر و سایر طرحها، چه ساختهٔ دست انسان، چه مولود مشیت الهی، ارتباط پیدا می‌کند. من دربارهٔ این ادعا درفصل آینده‌صحبت خواهم‌کرد. طراحان نظریهٔ دیگر خاطرنشان می‌سازند که $\frac{۱۱}{۷}$ مقدار تقریبی برابر $\frac{۱}{۲}\pi$، یعنی نسبت محیط نیم‌دایره به‌قطرآن است. آنها مدعی‌اندکه طرح کنندگان‌اهرام این نسبت را از آن جهت انتخاب‌کرده‌اند که به‌نیمدایره به‌چشم شکلی با زیبائی بی‌مانند می‌نگریستند. ولی بررسی نبشته‌های هیروگلیف چنین توضیحی را تأیید نمی‌کند.

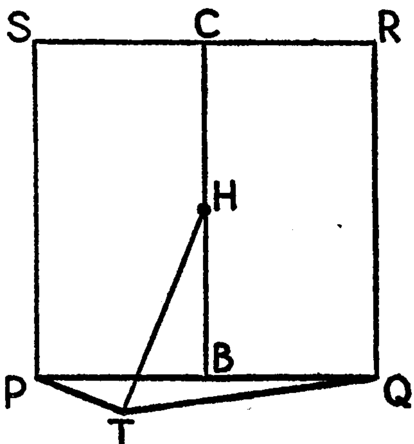
## ۵

«او در ساعتی‌از روزکه سایهٔ شخص برابر خودش بود، بااندازه‌گیری سایه‌ای که هرم بزرگ می‌انداخت ارتفاع آنرا اندازه گرفت». **هیرونیموس** ( *Hieronymus* ) مورخ‌یونانی، دراین‌کلمات‌کار برجستهٔ **جادوگرملطیه** را شرح داده‌است. سایر مورخین، چه‌کلاسیك وچه نوآوران نیز این بیان را باتغییرات مختصر و بدون تفسیر انتقادی تکرارکرده‌اند. انسان‌دراینجا کلمات قصار **دالامبر** را به‌خاطر می‌آورد:

«تاریخ نیست‌که خود را تکرار می‌کند، بلکه تاریخ نویسانندکه‌خود

راتکرار می‌کنند».

هرگاه مسئله برسر اندازه‌گیری ارتفاع یك ستون، یاهر جسم صلب دیگری باشدکه ابعاد افقی‌آن درمقایسه باابعاد قائمش قابل اغماض‌می‌بود، استفاده ازراه حل پیشنهادی طالس به‌اندازهٔ کافی ساده وآسان می‌نمود. زیرا درموقعی از روزکه‌اشعهٔ آفتاب تحت زاویهٔ ۴۵ درجه به‌زمین‌می‌تابد، سایهٔ یك ستون‌به‌طور محسوس برابر ارتفاع آن است، ومقدار اشتباه‌وعدم دقتی‌که به‌علت ابعاد افقی جسم به‌وجود می‌آید به سهولت قابل اغماض است. اما شیء مورد اندازه‌گیری‌یك ستون نبود. این‌شیء هرمی‌حجیم‌بود که ابعاد افقی وقائم آن از نظر اندازه‌گیری بایکدیگر قابل مقایسه‌بودند. سایهٔ هرم یك مثلث است و شکل این مثلث نه‌تنها به‌اندازهٔ ابعاد مربوطهٔ جسم وساعت نظاره، بلکه به عرض جغرافیائی‌محل وامتداد اضلاع قاعده نیزبستگی‌دارد. باری مصریان‌خورشید پرست بودند وقصد آشکار سازندگان اهرام‌این‌بودکه جهات اضلاع افقی‌را شرقی- غربی‌وشمالی- جنوبی در نظر بگیرند. و در این مورد الحق به‌شکل تحسین‌آمیزی نیزموفق‌شده‌اند. انحراف‌زاویه‌ای مربوط است به‌وضع اضلاع‌جنوبی- شمالی نسبت به‌نصف‌النهار واقعی، که سمت‌الراس نامیده می‌شود، و در هیچ‌کجا از یك چهارم درجه تجاوز نمی‌کند؛ در حقیقت، بررسیهای اخیر نشان داده‌اند که سمت‌الراس هرم بزرگ کمتر از ۴ دقیقه است. بنابر این، از هر نقطه نظر می‌توان اضلاع هرم بزرگ را درجهت محور اصلی قطب‌نما به‌حساب آورد.



شکل ۲

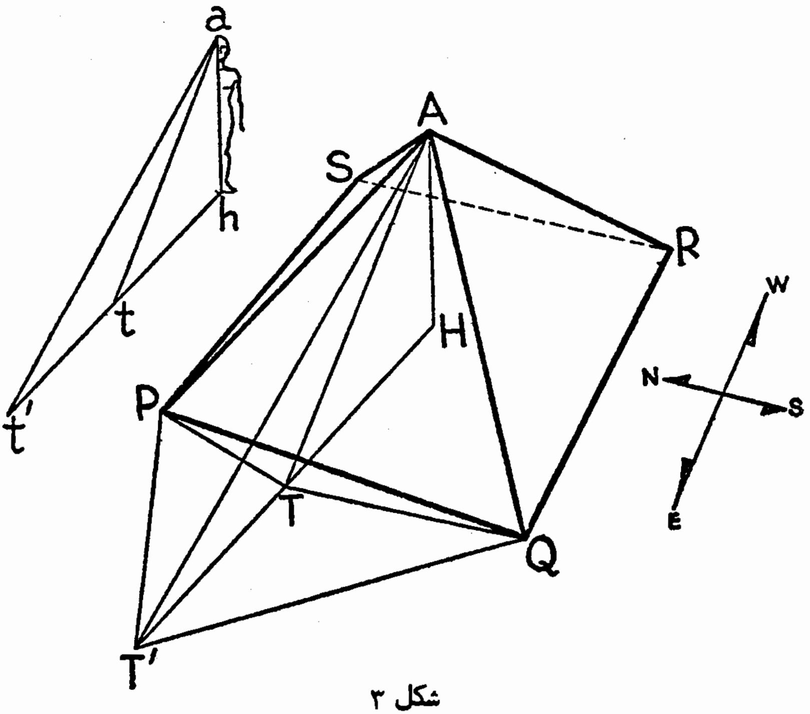
در شکل ۲ مثلث سایه $PQT$ است و در ساعتی‌که اشعهٔ خورشید به زمین تحت زاویهٔ ۴۵ درجه می‌تابد ارتفاع هرم وخط $TH$ برابرند. اگر $PQT$ مثلثی متساوی‌الساقین بود، دراینصورت برای تعیین $TH$کافی بود فاصلهٔ خط عمود از رأس $T$ برضلع $PQ$ بدست آید و $a$ به‌آن اضافه شود. بااینحال، صفحهٔ قائمی‌که از رأس $A$ عمود برضلع $PQ$ می‌گذرد موازی

مدار خورشید، یعنی موازی صفحهٔ مسیر ظاهری خورشید نیست و نسبت به‌آن تمایلی با زاویهٔ قابل توجه دارد؛ اثر این «تمایل» آن است که مثلث $PQT$ متساوی‌الساقین نیست وعملاً محاسبهٔ خط $TH$ راکه تعیین کنندهٔ ارتفاع اهرم است پیچیده ومشکل می‌سازد.

۶

در واقع برای تعیین فاصلهٔ بین‌راس $T$ از سایه ومرکز $H$ از قاعدهٔ هرم لازم است نه تنها اضلاع مثلث $PQT$ را اندازه گرفت، بلکه باید از محاسباتی باتکرار قضیهٔ فیثاغورس استفاده کرد که منجر به‌استخراج ریشهٔ دوم می‌شود، ودر حقیقت چنین محاسباتی از حدود دانش عصری که مورد بررسی ماست فاصلهٔ بسیار دارد.

از طرف دیگر نمی‌توان این امکان را منتفی دانست که طالس شکل فوق‌را باتردستی خاصی‌که برپایهٔ **اصل تشابه** استوار بود تغییر داده باشد. چنین زبردستی و مهارت در شکل ۳ نموده شده است. اگر $ha$و$HA$ دوتیر




شکل ۳

قائم باشند و $HT$ و $ht$ سایهٔ آنها در ساعت معینی از روز، **این سایه‌ها با ارتفاع تیرها متناسب خواهند بود.** فرض کنیم در ساعت دیگری از روز سایه‌های مربوط به‌این دوتیر $HT'$ و $ht'$ باشند؛ این سایه‌ها نیزمتناسب با ارتفاع تیرها خواهند بود نتیجه آنکه $t't: th = T'T: TH$. در حالت مخصوص اگر $t't = th$ باشد در اینصورت $T'T = TH$ خواهدبود.

بدون آنکه دلیلی دردست داشته باشیم برگردیم به‌وضعی که طالس با آن مواجه شده است. فرض کنیم $ha$ وضع مردی باشدکه طالس او را نظاره می‌کرده است، $ht$ سایهٔ‌آن مرد در ساعتی از بعدازظهر، به‌طوریکه، برابر ارتفاع خود مرد باشد. و بالاخره $T$ راس سایه‌ای باشدکه به‌وسیلهٔ هرم در آن ساعت ایجاد شده است. طالس نقطهٔ $T$ و $t$ را نشانه‌گذاری می‌کند، به‌مرکز $t$ دایره‌ای رسم می‌کند که از $h$ بگذرد. در اینحال منتظر می‌ماند: در حالیکه سایه درازمی‌شود زمانی فرا می‌رسدکه رأس‌سایهٔ مرد به‌دایره‌ای که‌رسم کرده‌است‌برمی‌خورد، یعنی‌نقطه $t'$. هم‌زمان‌باآن،رأس‌هرم ازنقطهٔ $T$به $T'$ جابه‌جاشده‌است، و $TT' = TH = HA$ خواهد بود، زیرا $t't = th = ha$ است. بنابراین‌ارتفاع نقطهٔ $A$ که بالای سطح قاعده قراردارد به‌وسیلهٔ‌خط افقی $TT'$ مشخص‌می‌شود وکاملاً به‌وسیلهٔ اندازه‌گیری مستقیم قابل دسترسی است.

## ۷

این راه حل حدسی نه به‌عرض جغرافیائی محل، نه به‌تمایل صفحهٔ مدار ظاهری خورشید، وبه‌همین دلیل نه‌به‌شکل جسم مورد نظر، ارتباطی ندارد. این راه به‌طور صریح برای تعیین ارتفاع هر نقطه مانند $A$ به‌کار برده می‌شود، به‌شرط آنکه **دو حالت متوالی** ازسایهٔ آن $T$و$T'$ معین‌باشد بعلاوه می‌توان قبول‌کردکه چنین شیوه‌هائی درزمانیکه ادعا می‌شود واقعه رخ داده است، وجود داشته‌اند. کوتاه سخن، آنچه راکه حدس وگمان از نظر صحت واعتبارکم دارد، به‌وسیلهٔ **جعل توجیه تاریخی** جبران می‌شود.

در واقع، حتی اگر حادثه سالها قبل ازآنچه‌گفته شد نیزاتفاق افتاده بود، این حدس‌قابل توجیه‌بود، چون **مفهوم و تصور تشابه** بیش ازچندهزار سال بر هندسهٔ استنتاجی و قیاسی تقدم داشته است. در ضمن نه‌تنها تشابه شرط لازم همهٔ تفکرات هندسی است. بلکه حاکم برفن ترسیم نیز می‌باشد. این‌حقیقت‌که هنرها وصنایع‌ترسیمی‌اززمانی که‌به‌یادنمی‌آید پرورش یافته‌اند، نشان‌می‌دهد ریشهٔ‌ادراك تشابه تاچه‌حد درشعوربشری‌رخنه‌کرده‌وعمیق‌است.

# فصل پنجم

# طلسم پنج‌پر

من به‌آتش خشم مقدس خود دامن می‌زنم....
یوهانس‌کپلر (Johannes Kepler)

## ۱

افلاطون در یکی از مکالماتش از قول تیمائوس (*Timaeus*)، که از پیروان فیثاغورس است، چنین‌می‌گوید: «غیرممکن است دوچیز را به‌شکلی زیبا، بدون وجود سومی، به‌هم مربوط‌کرد، زیرا یك واسطهٔ ارتباطی برای آنکه آن‌دو را متحدکند بایدوجود داشته باشد، وبهترین شکل این اتصال وقتی بدست می‌آید که تناسبی برقرار باشد. زیرا هرگاه از سه مقدار نسبت مقدار متوسط بـه مقدار کوچکتر بـرابر نسبت متوسط بـه بزرگتر باشد و بالعکس، نسبت مقدار کوچکتر به‌متوسط برابر بزرگتر به‌متوسط ـ در اینصورت مقدار آخری همان اولی و همان مقدار متوسط، و مقدار متوسط همان اولی وآخری خواهد بود. در اینصورت به‌ناچارهرسه مقدار مساوی هستند و در اینحالت هرسهٔ آنها چیزی جز یك چیز نیستند».

مسئله‌ای‌که این مکالمه به‌آن اشاره میکند، به‌نام تقسیم طلائی و یا تقسیم‌به‌ذات وسط و طرفین خـوانده می‌شود. به‌زبان ریاضی مسئلهٔ فـوق عبارتست ازتقسیم مقداری معین، مثلا قطعه‌ای از خط مستقیم به‌طول $s$، به‌دوقسمت، به‌طوریکه نسبت مقدار بزرگتر، $x$، به‌تمام طول قطعه، برابر مقدارکوچکتر به‌بزرگتر باشد. از اینجا نسبت زیر بدست می‌آید:

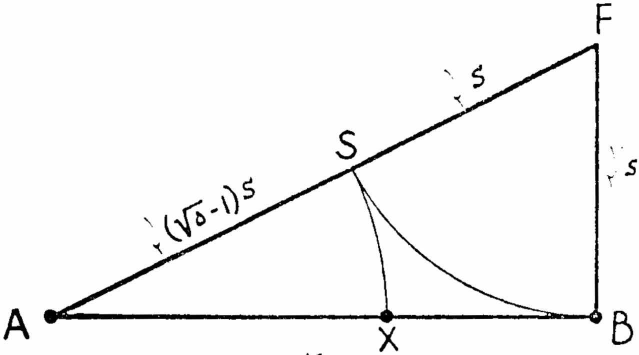
$$x:s=(s-x):x \qquad (۱-۵)$$

که به‌نوبهٔ خود تبدیل به‌معادلهٔ زیر می‌شود:

$$x^۲ + sx - s^۲ = ۰ \qquad (۲-۵)$$

و ریشهٔ مثبت آن برابراست با:

$$x = \frac{۱}{۲}s(\sqrt{۵} - ۱) \qquad (۳-۵)$$



شکل ۴

ساختمانی ساده با پرگار و خط‌کش‌که برتوضیح مستقیم فرمول اخیر پایه‌گذاری شده در شکل ۴ نشان داده شده است.

در مثلث قائم‌الزاویه $ABF$ با ترسیم: $AB = s$،

$SF = \frac{۱}{۲}s = BF$ و $AX = AS$ داریم:

$$AX = \frac{۱}{۲}s\sqrt{۵} - \frac{۱}{۲}s = \frac{۱}{۲}s(\sqrt{۵} - ۱) = x$$

به‌عبارت دیگر نقطهٔ $X$ قطعهٔ مفروض $AB$ رابه‌نسبت موردنظرقسمت می‌کند.

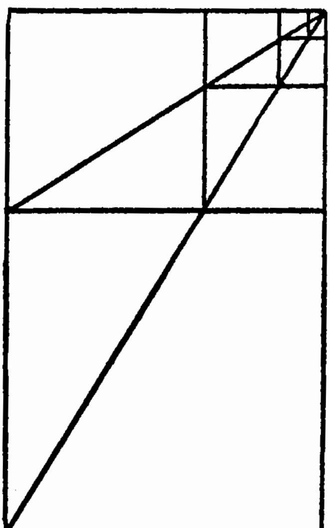
## ۲

در دوران تاریك قرون وسطی، تقسیم طلائی عنوان مورد توجه تفکرات مربوط به‌الهیات بوده است. بسیاری از اساتید فلسفهٔ آن عصر که تحت تأثیر بحث و جدلهای فیثاغوریان و افلاطونیان بودند، کلید راز خلقت را در این نسبت می‌دیدند، و اعلام می‌داشتندکه ذات وسط وطرفین همان اصل و پایه‌ایست‌که صانع اعظم در طرح‌کیهانی وزمینی به‌کار برده

است: از آنجا بودکه عنوان «تناسب الهی» به این نسبت اطلاق گردید. تفکرات پیچیده و مرموز فـوق منحصر بـه‌راهبان قرون وسطـی نبود. ویروس‌این فکر به‌عده‌ای از شعراو نقاشان دورهٔ رنسانس، حتی به‌لئوناردو داوینچی نیز سرایت‌کرد.

شکل جدید پرستش تقسیم طلائی، مانند بسیاری ازاین‌گونه جنبشها دارای مشخصه‌ای است‌که می‌توان آن‌را «تعبیرعقلانی سرمکتوم» نام نهاد هواداران آن،که اغلب هنرمندانند، بر ارزش هنری این نسبت، بروفور آن در طبیعت ونقش‌کاملی‌که در کالبدشناسی انسان ایفا می‌کند، براهمیت کیهانی آن تکیه می‌کنند. آنها مدعی‌اندکه تقسیم طلائی سر رشتهٔ زیبائی در مجسمه‌سازی یونانی و کلید زیباترین نمونه‌های معماری قدیم مانند اهرام مصر است.

یکی از این دعاوی در شکل ۵ نموده شده است. اضلاع مستطیل به «نسبت الهی»اند. با توجه به‌اینکه اغلب اشیاء پیرامون ما همین طـرح بخصوص را دارند این الگـو به‌نظر خوانندهٔ کاملاً آشنا می‌رسد: پنجره‌ها میزها، کتابهـا، جعبه‌هـا و ورقهای بازی. مشتاقان تقسیم طلائی به‌ما اطمینان می‌دهندکه الگو تجسمی از زیبائی و شکوه است، و این مسئله برای اغلب اشخاص نیزبه‌همین شکل مورد قبول است. آیا این واقعیات از این دعاوی پشتیبانی می‌کنند؟



شکل ۵

به سال ۱۸۷۶ بر گردیم، در ایـن سـال گـوستـاو تئـودور فـخنـا ( *GustaveTheodor Fechner* ) روانشناس آلمـانـی شایـد بـر اثـر تحـریك و تشویق طـرفداران تقسیم طلائی عصر خود دست به‌آزمایشهای متعدد، درمیان تعدادزیادی‌اشخاص نامتجانس وگوناگون، زد. ده الگوی‌مستطیل با ابعاد مختلف، از ۵ × ۲ یا ۱ × ۱،که شامل‌نسبت طلائی نیز بود، به‌طور پراکنده دریك اطاق قرار داد و از افراد مختلف پرسیدکه با دیدن آنها بگویندکدامیك زیباترند، و

نظریات مختلف را ثبت کرد. گرچه تقسیم طلائی رأی بیشتری از دیگران بدست آورد، ولی بیش از $\frac{۱}{۲}$ بینندگان را تشکیل نمی‌داد. به‌طور کلی، نتایج بررسی غیر قطعی بود.

در میان کوششهایی برای توجیه این رجحان بی‌دلیل بر پایه‌ای عقلانی، یکی مجادله‌ای است حاکی از آنکه وقتی چشم انسان یك الگوی مستطیل را می‌بیند به‌طور غریزی **يك مربع** را آن جدا می‌کند، (شکل ۵) ظاهراً هرچه باقیماندهٔ چنین شکلی بیشتر شبیه به‌شکل کلی باشد، این الگو بیشتر توجه را به‌خود جلب می‌کند. البته کمال مطلوب وقتی است که مستطیل باقیمانده نسبت طلائی داشته باشد، **زیرا این باقیمانده شبیه شکل اصلی است.** خصلت استدلالی موجه‌نمای کسی که دارای ذوق زیباشنایی است آن است که ترجیحی مشکوك را به‌رجحان دیگری که کمتر از اولی مشکوك نیست بکشاند.

## ۳

جهت ارزیابی اعتبار این دعاوی، باید در نظر داشت که «نسبت» تقسیم طلائی عددی است گنگ. در واقع اگر در معادلهٔ (۵ − ۲) به‌جای $\frac{x}{s}$ مقدار $D$ را بگذاریم خواهیم داشت

$$D^{۲}+D-۱=۰ \qquad (۴-۵)$$

که ریشهٔ مثبت آن عبارتست از:

$$D=\frac{۱}{۲}(\sqrt{۵}-۱) \qquad (۵-۵)$$

مقدار عدد $D$ با ۵ رقم اعشار برابر است با ۰/۶۱۸۰۳. طرفداران تقسیم طلائی برای پشتیبانی از ادعایشان که‌این‌تقسیم انگیزهٔ این و یا آن طرح انسانی یا الهی است، می‌خواهند ثابت کنند که مقداراندازه‌گیری شده با «تقریبی معقول» به‌مقدارمحاسبه شده نزدیك است. واضح‌است‌که‌کامیابی آنچه راکه‌برعهده‌گرفته‌اندبه‌حدود تعبیر جمله «حدودمعقول» بستگی دارد.

يك مورد مناسب این ادعای موجه‌نما آنست که طراحان مقابر مصری ملاك راهنمایشان تقسیم طلائی بوده است. همانطور که در فصل قبل گفته شد، نسبت ارتفاع به‌ضلع قاعده مقداری متوسط برابر ۰/۶۲۵ دارد، و در هیچ مورد از اهرام جیزه این مقدار کمتر از ۰/۶۳ نمی شود. اختلاف متوسط بین این نسبت و نسبت ذات وسط و طرفین بیش

از $2\frac{1}{2}$ درصد است، و چنین اختلافی را بدون‌کشاندن دلیل به‌حد نامعقول مشکل می‌توان پذیرفت.

ادعای اینکه بعضی ازنسبتها درتشریح انسان با قاعدهٔ نسبت طلائی مطابقت دارد، همانقدر موجه است‌که مـی‌گویند قد متـوسط انسان، به وسیلهٔ ناف، به‌نسبت ذات وسط و طرفین تقسیم می‌شود. حتی اگر چنین مفروضاتی درزمینهٔ زیست‌شناسی بتوانند ثابت شوند، چگونه می‌توان آنها را با دعاوی زیباشناسی‌که در فوق بدان اشاره شده است آشتی داد؟ زیرا مطمئناً، حتی سرسخت‌ترین طرفداران تقسیمات طلائی، به‌سختی می‌توانند مدعی شوندکه قامت بشر متوسط اندیشهٔ آنها را دربارهٔ زیبائی در بردارد.

اینك با امتیاز در انتخاب صفات مشخصه‌ای‌که باید مقایسه شوند: آزادی انتخاب وگـروه‌بندی نمونه‌هائی‌کـه باید برای بـررسی این صفات مشخصه برگزیده شوند و آزادی برگزیدن درجهٔ دقت مجاز برای تفسیر مفروضات اندازه‌گیری‌شده ـ با همهٔ این‌آزادیهاکه در اختیار انسان باشد، می‌توان‌هر راز پیچیده‌ای را با قانونی ریاضی، و در واقع با قانونی‌کـه از پیش بدان اختصاص‌داده شده است، تفسیر و تأویل نمود. این امر مانند توضیح واضحات به‌نظر می‌آید؛ و همین‌طور است. اما برای نویسندگـان پاره‌ای از این مباحث، یعنی بیومتریك، آکونومتریك و پسیکومتریك،کـه مورد نظر من است، مسئله زیاد هم بدیهی نیست.

۴

امادربارهٔموضوع‌تقاریب‌گویادرمقابل‌مقادیرگنگ، بایدیادآوری‌کنیم که یکی از خواص ذات وسط وطرفین،کـه مـی‌توانسته است آب به‌آسیاب ساحرانهٔ دلباختگان آئین تقسیم طلائی بریزد، بسط عددگنگ $(\sqrt{5}-1)\frac{1}{2}$ به‌کسر مسلسل است، در صورتیکه وسیلهٔ بیان‌گسترش در دیدرس آن آئین می‌بود.

بعداً من دربارهٔ این تتبع مهم سخن خواهم گفت. برای منظورفعلی، بهتر است از نقطه نظر اکتشافی به‌موضوع نزدیك شویم.

طبق تعریف داریم $\qquad D:1 = 1:(1 + D)$

در نتیجه می‌توان نوشت:

$$D=\frac{1}{1+D}=\frac{1}{1+\frac{1}{1+D}}=\ldots$$

وهکذا.

واز آن به‌این نتیجه می‌رسیم که نسبت تقسیم طلائی حد کسر مسلسل نا متناهی زیر است:

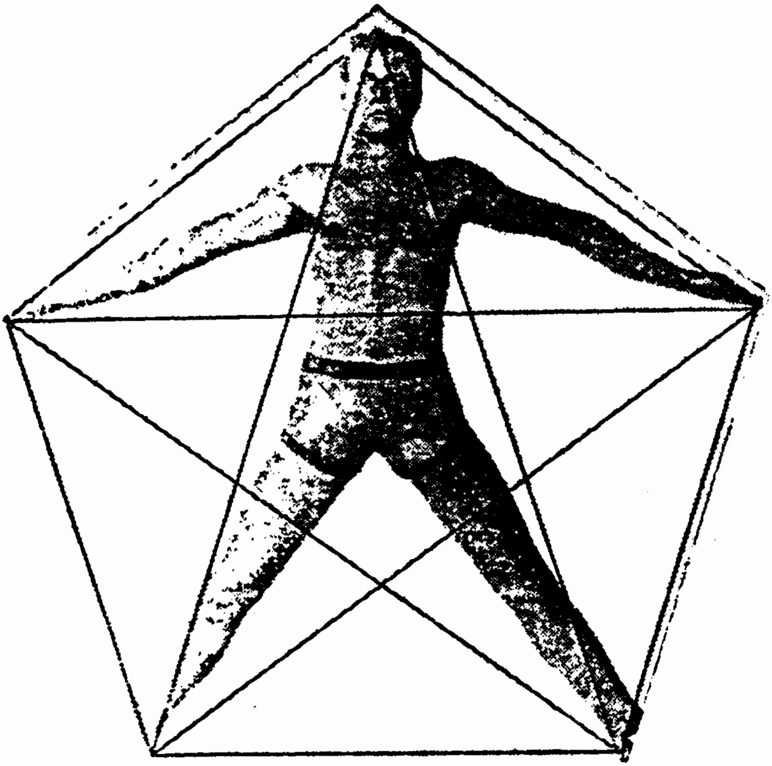
$$D=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)=\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\ldots}}} \qquad (5-6)$$

که در نوع خود ساده‌ترین آنها است، زیرا نه‌تنها مخرجهای آن مساویست، بلکه مقدار مشترك این مخرج ها نیز **واحد** است.

برای اهل تصوف تنها این پیش آمد که جوهری را بتوان با علامتی منحصر به‌فرد بیان داشت به‌اندازهٔ کافی عجیب وقابل توجه است. اما وقتی آن علامت يك باشد، در اینصورت ریشهٔ الهی آن جوهر برهمهٔ شکلها غلبه خواهد کرد.. واحد نشانهٔ خداست، به‌قول لایب نیتز متصوف «واحد برای آنکه همه چیز را از هیچ بسازد کفایت می‌کند». از آنجاکه بینهایت مرحلهٔ لازم است تا به‌هدف مورد نظر برسیم آن تفسیر قدرت می‌یابد، زیرا بینهایت نیز نشانی ازخداوند است. بالاخره برای کسری مسلسل که نمایش دیگری برای آن وجود ندارد کیفیتی مطلق وجود دارد: این کسر مستقل از رده بندی عدد شماری است ، بدین ترتیب هر گاه قدرت الهی به‌جای ده انگشت بما ۱۲، ۶۰ ویا هرچند انگشت دیگری داده بود بازهم «طیف» مذکور همین بود که گفته شد. این مقاله دراینجا ازاین رو ارائه شده است که ارزش آنرا داشت تا نویسنده سهم ناچیز خود را درزمینهٔ آئین مکنونات اداکرده باشد.

## ۵

شیوه‌ای مورد پسند از نمایش نقش موجه نهائی که تقسیم طلائی در تشریح انسان ایفا مـی‌کند درشکل ۶ نشان داده شده است. اما طرح نمایش حالت مـرد به‌مثابهٔ شکلـی ۵ نقطه‌ای، مـی تواند به‌لئوناردو داوینچی و همکار ریاضیدان او راهب لوکاپاچولـی (*Luca pacioli*) برسد: کتاب این راهب، تحت عنـوان **نسبت خداوندی**، شامل نقاشیهای جالبی از داوینچی است کـه دو تـای آن در شکل ۹ نشان داده شده است. رساله در سال ۱۵۰۹ به‌چاپ رسید و بسیاری از اندیشه‌های مـطـرح شده توسط هواداران جـدید



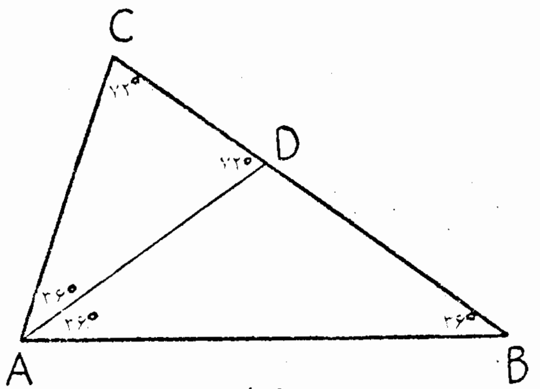
شکـل ۶

آئینهای مذهبی به‌آن دوران برمی‌گردد.

نقطهٔ شروع این تفکـرات مکتوم مذهبی، مثلثی متساوی‌الساقین با زوایای ۳۶، ۷۲ و ۷۲ درجه است ($ABC$ درشکل ۷). در چنین «مثلثی باتقسیمات طلائی» منصف‌الزاویهٔ $AD$ دومثلث **متساوی‌الساقین** یکی $DAB$ ودیگری $DAC$ که **متشابه با مثلث اصلی است** می‌سازد. نتیجه آنکه: اولاً نقطهٔ $D$ ضلع $BC$ را **به‌ذات وسط و طرفین** تقسیم می‌کند، و ثانیاً اضلاع یك مثلث **با تقسیمات طلائی‌نسبت الهی دارند.**

اشکال متشـکلـه ازاین لـم‌هاعبارتند از:

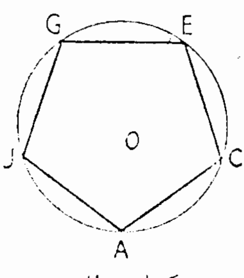
الف. پنج ضلعـی منتظم (شکل ۸ ـ الف). دراینجا $ABC$ یك‌مثلث طلائي است: **از اینرو ضلع و قطریـك ۵ ضلعي منتظم بـه‌نسبت‌الهی‌اند.**



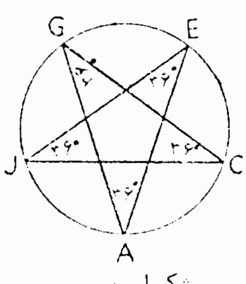

شکل ۷

ب. ستارهٔ پنج پر منتظم (شکل ۸ ـ ب) در اینجا $ABC$ یك مثلث طلائی است. نتیجه آنکه **اضلاع یك ستاره پنج‌پرمنتظم‌یکدیگر را به‌تقسیم طلائی قسمت می‌کنند.**

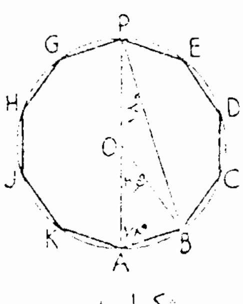
ج. ده‌ضلعی منتظم (شکل ۸ـ ج). در اینجا $AoB$ مثلث طلائی است، در نتیجه ضلع یك ده ضلعی منتظم و شعاع دایرهٔ محاطی آن دارای نسبتی الهی‌اند.




شکل ۸ الف




شکل ۸ ب




شکل ۸ ج

درحالیکه‌ریشهٔ‌اندیشهٔ‌تقسیم‌طلائی نامعلوم‌است، کاملاً احتمال‌دارد‌که فیثاغوریان به‌سبب خاصیت پنج‌ضلعی منتظم ستاره‌ای‌که درفوق بدان اشاره شد، و اضلاع آن یکدیگر را به‌نسبت ذات وسط و طرفین تقسیم می‌کنند، اهمیتی مکتوم و پیچیده به‌این نسبت داده باشند. می‌دانیم کـه ستارهٔ پنج‌پر

نقش مهمی‌درمراسم مذهبی‌بسیاری ازمردمان قدیم ایفا می‌کرد، به‌طوریکه در مذهب فیثاغوری نشانه‌ای مقدس بود وتا به‌امروز بعضی اجتماعـات «مخفی»، که فیثاغورس را به‌مثابهٔ نیاوسلف روحانی خود می‌ستایند، این شکل مرموز را به‌عنوان طلسم به‌کار می‌برند.

اثرمسیحیت درخیالبافی همگانی این بودکه دراین خیالبافی، مقدس را به‌عبادت مخفی بدل‌کرد. ستارهٔ پنج‌پر یونانی به‌طلسم پنج‌پر تبدیل شد و جزء لاینجزای لوازم جادوگری گردید. در برخی نقاط عـلامت طلسم پنج‌پر خبر از شیطان می‌داد، به‌عکس در پاره‌ای نقاط دیگـر آنرا به‌چشم بازدارندهٔ دسیسه‌های شیطان می‌نگریستند. دربعضی زبانها آنرا **سم شیطان** دسته‌ای دیگر پای جادوگر نامگذاری کرده بودند. در جریان زمان ریشهٔ هندسی کلمه کم کم بدست فراموشی سپرده شد تااینکه طلسم پنج‌پر نشانه‌ای از جادوی سیاه و وسیله‌ای هنری برای جادوگردید.

فرضیه‌هائی برای توجیه و پیشبرد این رجحان عجیب به‌وجود آمد. یکی ازاین فرضیه‌هـا این رجحان را به‌پنج انگشت دست انسان می‌رساند و می‌گوید نیروی‌مرموز و سحرآسائی که به‌ستارهٔ پنج پرمربوط می‌شود ناشی ازخواص هندسی‌آن نیست، بلکه مربوط **به‌عدد پنج** است‌که با خود همراه دارد. می‌توان دراین زمینه خاطرنشان کرد که افلاطونیان برای پنج‌ضلعی نسبت به‌ستارهٔ پنج پر اهمیت بیشتری قـائل بودند، و عدد پنج جزء مهم و تکمیلی برای تفکرات آنها دربارهٔ کاینات بود.

## ۷

این مسئله مرا به‌گوشهٔ دیگری ازاین حاشیهٔ مرموز وسری‌که تاریخ اولیهٔ هندسه را دربرگرفته می‌کشاند.

ابتدا چند ضلعی محـدب با $n$ ضلع را در نظر می‌گیریم. $n$ رأس این شکل برروی یك دایره قراردارد، دایرهٔ دیگری مماس بر $n$ ضلع این‌شکل نیزوجود دارد. بدین‌ترتیب ساختمان‌یك کثیرالاضلاع $n$ ضلعی‌درست هم‌ارز تقسیم محیط دایره به $n$ قوس مساوی است‌که نام سایکلو تومی *(Cyclo Tomy)* به‌خودگرفته‌است. مسئله برای‌تمام مقادیرصحیح $n$ دارای جواب است، با این‌حال ساختمان عملی‌کثیرالاضلاع $n$ ضلعی دست و پاگیر است و اشکال موضوع دارای ماهیتی فنی‌است ومسئله‌ای اصولی نیست.

هنگـامیکه از صفحه به‌فضا می‌رویم وضع کاملاً دگرگون می‌شود. به‌جای کثیرالاضلاع درفضا چند وجهی داریم، یعنی جسمی‌که محدود است

به‌صفحات. صفحـات محیطی چند وجهی دریك خط مستقیم یکدیگر را قطع می‌کنندکه اضلاع نـامیده‌می‌شوند. اضـلاع به‌نوبهٔ خود در **رئوس جسم** با یکدیگرتلاقی می‌کنند ودرکثیرالاضلاع‌هائی ترکیب‌می‌شوندکه **وجوه** چند وجهی‌نامیده می‌شوند. برای‌یك چندوجهی مفروض به‌ترتیب تعداد وجوه، اضلاع ورؤس را $f$، $e$ و $v$ فرض‌کنیم. این‌عددهای‌صحیح‌به‌وسیلهٔ رابطه‌ای که نام معادلات اولر (*Euler*) را به‌خودگرفته است با یکدیگرمربوطند.

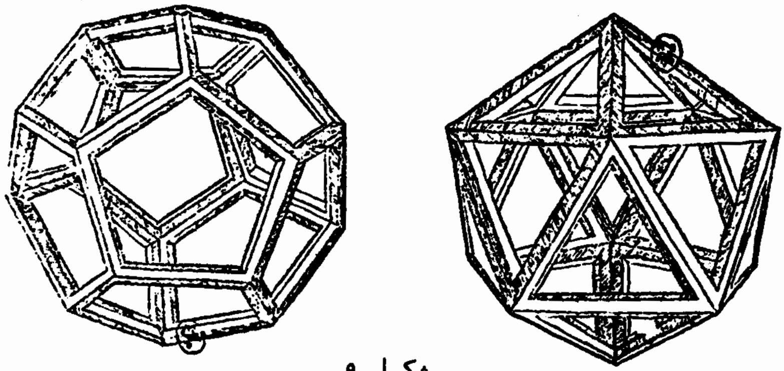
وقتی می‌گوئیم **چند وجهی محدب** است منظورآنست‌که جسم ما در یکطرف هریك از وجوه قراردارد، هنگامی‌که می‌گوئیم جسم ما **منتظم** است، منظور آنست‌کـه **وجوه آن کثیرالاضلاعهای منتظم و قابل انطباق بر یکدیگرند.** هنگامی‌که هردوی این‌شرایط جمع‌باشند، دراینصورت رئوس جسم‌برروی کره‌ای‌قراردارندوکرهٔدیگری‌نیزوجود داردکه‌برتمام‌وجوه جسم مماس است. هرگـاه $n$ تعداد اضلاع در هریك از وجوه بـاشد و $m$ تعداد اضلاعی‌که به‌هریك از رؤس منتهی‌می‌شوند، دراینصورت معادلات اولر، که در بالا نام برده شد، تبدیل به‌روابط زیرمی‌شود:

$$\begin{cases} f+v=e+۲ \\ nf=mv=۲e \end{cases} \qquad (۷\text{-}۵)$$

پنج‌دسته ازجوابهای این‌معادلات درجدول زیرداده شده‌است ومشکل نیست‌که نشان دهیم **جواب دیگری** برای این روابط وجود ندارد.

| جرم | $f$ | $v$ | $e$ | $m$ | $n$ | وجه |
|---|---|---|---|---|---|---|
| سه وجهی | ۴ | ۴ | ۶ | ۳ | ۳ | مثلث |
| شش وجهی | ۶ | ۸ | ۱۲ | ۳ | ۴ | مربع |
| هشت وجهی | ۸ | ۶ | ۱۲ | ۴ | ۳ | مثلث |
| دوازده وجهی | ۱۲ | ۲۰ | ۳۰ | ۳ | ۵ | پنج وجهی |
| بیست وجهی | ۲۰ | ۱۲ | ۳۰ | ۵ | ۳ | مثلث |

دو نـوع ازاین چند وجهیها درشکل ۹ نشـان داده شده است. ایـن شکلها از نسبت‌الهی پاچولی گـرفته‌شده‌است،که اوترسیم‌آنهارا به‌لئوناردو



شکل ۹

داوینچی نسبت‌داده است. بدیهی است انگیزهٔ این انتخاب‌آن بوده است که‌هر دوی این اجسام شامل **پنج ضلعیهای منتظم‌اند**، دوازدهٔ وجهی باوجود **پنج ضلعیهای منتظم** خود مشخص می‌شود، درحالیکه پنج مثلثی که از یك راس بیست وجهی خارج می‌شوند هرمی بوجود می‌آورند که قاعدهٔ‌آن کثیر‌الاضلاع پنج ضلعی است.

## ۸

کشف چند وجهیهای منتظم به افلاطون نسبت داده شده و از اینجا است‌که با نام «اجسام افلاطونی» شهرت یافته‌اند. به‌طور جدی باید شك داشت‌که افلاطون کاشف‌آنها باشد؛ اما اینکه ازاین اجسام فقط و فقط پنج نوع وجود دارد، باید رضایت کامل خاطر استاد و پیروانش را فراهم‌کرده باشد، اما این‌امرمشکل تازه‌ای به‌وجود می‌آورد: هم‌آهنگی‌کیهانی تطابقی یك به‌یك بین این اجرام‌کامل و عناصراول را ایجاب می‌کند. در حالیکه کیهان شناسی افلاطون در زمینهٔ عناصر اول فقط به‌چهار عنصرخاك، آتش، آب و هوا اعتقاد داشت.

بالاخره شکلی‌که باعث‌رنجیدگی خاطرشده بود بااستمداد ازیك اصل که از دیرباز حاکم برتفکرات در زمینهٔ مسائل مکتوم بود حل گردید؛ «هنگام شك، آخرین‌را به‌خدا واگذارید»! یکی ازاین اجسام کامل‌را باید به‌آسمانها تخصیص‌داد! اماکدامیك را؟ البته کاملترین آنها دوازده وجهی است‌که **وجوه پنج ضلعی** آن مهرتناسب کامل را برپیشانی دارد.

واز اینجهت بودکه مکعب را به‌زمین محکم اختصاص دادند و هر یك ازاجسام دیگر‌را به‌عناصر ناپایدارتر، یعنی‌آتش، آب وهوا، و افلاطون

نیزدوازده وجهی با وجوه پنج ضلعی مقدسش را وقف آسمانها کرد.

۹

اینك از نامه‌ای که درحدود دوهزار سال بعد ازآن تاریخ نوشته شده است نقل قول می کنیم: «... قبل از خلقت عالم، عددی به‌جزتثلیث وجود نداشت که خود خداوند است... زیرا خط و صفحه هیچکدام متضمن عددها نیستند: درآنجا بینهایت حاکم است. بنابراین بگذارید دربارهٔ احجام گفتگو کنیم. درآغاز باید حجمهای غیرمنتظم را حذف کنیم، زیرا مورد نظرما در اینجا خلقت برپایهٔ نظم است. باقی‌می‌ماند شش جسم، کره باآسمان بیرونی مطابق‌است، زیرا جهان از دولایه ساخته شده؛ متحرك و ساکن. لایهٔ ساکن تصویری از ذات خداوند است، در حالیکه لایهٔ متحرك چیزی جز انعکاس خداوند خالق نیست، وبنابراین ازمرتبهٔ پائین‌تراست. درماهیت خود مدور با خداوند ومسطح با خلقت او مطابقت دارند. درواقع کره دارای سه لایه است: سطح، مرکز، حجم؛ همینطور است دنیای ساکن: آسمان، خورشید، اثیر؛ و چنین است خداوند: اب، ابن، روح‌القدس. از طرف دیگر دنیای متحرك به‌وسیلهٔ اجرام با وجوه مسطح مشخص می‌شوند. ازاین اجرام پنج نوع موجودند؛ بااینحال وقتی‌ازمحدودهٔ خارج بنگرید این‌تعداد پنج‌مشخص کنندهٔ شش‌جسم مستقل است؛ ازاینجا شش سیاره‌ای که به‌دور خورشید می‌گردند وهم‌چنین دلیل آنکه فقط شش سیاره وجود دارد روشن می گردد. و چون خورشید در مرکزخلقت است، وباز ازآنجاکه این جرم درحال سکون منبع همهٔ جنبشها است، تصویری است واقعی ازخداوند خالق، زیرا ارتباط خداوند با خلقت همانست که خورشید با حرکت وجنبش دارد.

«... من باز بیشترنشان خواهم دادکه اجسام صلب‌منتظم به‌دوگروه تقسیم می‌شوند: سه عدد دریك گروه و دوتا درگروه دیگر. در وهلهٔ اول مکعب، هرم و بالاخره دوازده وجهی به‌گروه بزرگترمتعلق‌اند. به‌گروه دوم، اول هشت وجهی، و پس ازآن بیست‌وجهی وابسته است. به‌این دلیل است که بزرگترین قسمت کاینات، یعنی‌زمین، که درآن‌تصویری ازخداوندگار دیده‌می‌شود، دوگروه را ازیکدیگرجدا می‌سازد. زیرا همانطورکه قبلاً ثابت کرده‌ام اجرام‌گروه اول باید درطرف بیرون مدار زمین قرارگرفته باشند و دستهٔ دوم درداخل مدار زمین... بنابراین من به‌این نتیجه رسیدم که مکعب را به‌زحل، چهاروجهی را به‌مشتری، دوازده وجهی را به‌مریخ، بیست و چهاروجهی را به‌زهره، وهشت وجهی را به‌عطارد تخصیص دهم...»

آیا چنین به‌نظر می‌رسدکه این گفته‌ها هذیان یك مالیخولیائی است و یا صفحه‌ای ازکتاب مادام بلاواتزکی (*Madam Blavatzky*)؟ اما مطمئن باشید، اینها از پیش‌بینی شخص یوهانس‌کپلر، از یکی از رسالات او اقتباس شده است‌که در سال ۱۵۹۶، تحت عنوان **رازکیهان**، به‌چاپ رسیده است. وبدینگونه بود روح آن زمان‌که وقتی این مقاله بدست گالیله و تیکوبراهه (*Tycobrahe*) رسید، هردوی‌این‌ستاره‌شناسان‌باتفسیرهای‌تملق‌آمیز به‌جواب مبادرت ورزیدند. درواقع براهه آنقدرتحت تأثیرآن قرارگرفت‌که‌کپلر جوان را دعوت‌کرد تا دستیاری اورا بپذیرد، و در عین حـال اورا تشویق‌کرد تا شیوهٔ سماوی خود را در دستگاه **تیکونین**،کـه نوعـی پیوند بین دستگاه بطلیموسی وکپرینکی است، ومی‌گوید سیارات به‌دورخود حـول خورشید می‌گردند وخورشید حرکتی پاشنه‌گردی به‌دور زمین دارد، پیاده‌کند.

**۱۰**

کپلررابطهٔ بین سیارات وچند وجهیها را«رازکیهان» (*Mysterium Cosmographicum*) نامید. این مطلب‌کـه او این نکته را نه از باب تشبیه،بلکه به‌مثابهٔ‌بیان مصوررابطه‌ای ریاضی وحاکم بردستگاه خورشیدی در نظر می‌گرفت، توسط طرحهای شکل ۱۰،که نسخه بدل اصل‌اند، تأیید می‌گردد. بدیهی است‌که مدل طرح پیشنهادی هرگز ازمرحلهٔ ترسیم تجاوز نکرد، نه به‌خاطر آنکه کپلر اعتقاد خود را به‌ادراك دورهٔ جوانی از دست داد، بلکه ازایـن‌رو کـه نتوانست امکانـی جهت ساختن آن فـراهم آورد.

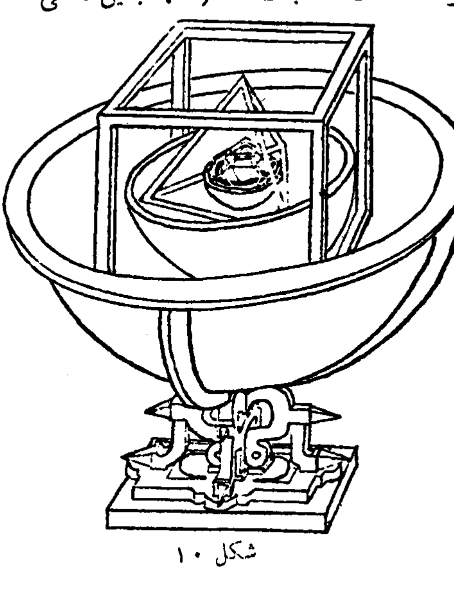
اما در زمینهٔ ریاضیات، طرح نه لنگی‌دارد و نه ناقص است؛ اگر در این‌باره چیزی بایدگفت آن است‌که ازاستحکام‌کامل برخورداراست. درواقع همانطورکه کپلر در نظر داشت، فرض‌کنیم‌که مدارهای سیارات دوایـری متحدالمرکز و متحدالسطح‌اند و خورشید در مرکز دستگاه قرار دارد، در اینصورت قدم اول تعیین مقادیرهم پایهٔ اشعهٔ این دوایراست. این شعاعها را با حروف اول نام شش سیاره $s$, $J$, $m$, $e$, $v$ و $m'$ مشخص‌کرده و فرض کنیم $S$, $J$, $M$, $E$, $V$ و $M'$ نمایش شش‌کره باشندکه این مدارها دوایر عظیمهٔ آنها هستند. در اینصورت، براساس نظرکپلر، مکعبی وجود داردکـه راسهای‌آن برروی‌کرهٔ $S$ ووجوه آن مماس برکره $J$ است. با توجه به‌اینکه قطراین مکعب همان قطر دایرهٔ $S$ وضلع‌آن قطرکرهٔ $J$ است، نتیجه می‌شود که نسبت $s$ به $j$ برابر **قطر مکعب به‌ضلع** آنست؛ به‌عبارت دیگر $\frac{s}{j} = \sqrt{3}$

با امعان نظر هندسی مشابه می‌توان نسبت $\frac{m}{j}$ ، $\frac{e}{m}$ وغیره رابدست‌آورد که منجر به یك دسته رابطه می‌شود: المثنای کامل حسابی برای **میستریوم کوسموکرافیکوم**:

مسئله بر سر آنست‌که تا چه حد این نتایج با مشاهدات بعدی کپلر و قوانینی که‌ازاین رصدها بدست‌آورد مطابقت دارد؟اولین‌این قوانین‌می گوید‌که **مدارهای سیارات دایره نیستند‌بلکه‌بیضیهائی هستند‌که خورشید درکانون آنها قرار دارد** ؛ اما **خروج از مرکز** این مدارها آنقدر ناچیز است‌که به سهولت می‌توان آنها را با یکدرجه تقریب به‌جای دایره گرفت. قانون دوم می گوید‌که حرکت یك سیاره چنانست‌که **در زمانهای مساوی سطح جارو شده توسط شعاع مدار در این زمانها با یکدیگر مساوی‌اند**،در حالیکه قانون سوم می‌گوید‌که **مجذور زمانی‌که برای یك دورگردش کامل لازم است متناسب است با مکعب قطر اطول مدار سیاره.** قانون دوم وسوم برای مدارهای مستدیر نیزصادق‌اند. بنابراین با پاره‌ای احتیاطات منطقی، میستریوم می توانست به مثابهٔ الگوی دستگاه منظومهٔ شمسی پذیرفته شود، **به‌شرط‌آنکه نسبتهائی‌که دربالاگفته شدباه‌فروضات نجومی مطابقت داشته باشند.**

با اینحال، واقعیت حیرت‌انگیز آن است‌که این نسبتها حتی به‌طور جزئی نیز با آنچه‌که حاصل مشهودات است مطابقت ندارند. بدین معنی که ما بدست آورده‌ایم :

$\frac{s}{j} = \sqrt{۳} = ۱/۷۳۲$ ، در حالیکه نسبت بین فاصلهٔ‌متوسط زحل ومشتری به‌خورشیدبرابر ۱/۸۳۳ است... خطائی برابر ۶ در صد که نمی توان آنرا نا دیده ودست‌کم گرفت،واختلاف بین مقادیر مشهود و محاسبه شده، حتی برای بقیهٔ نسبتها ، بزرگترازاینست.دلیل‌آورده‌اند که میستریوم، قبل ازآنکه‌کپلر دسترسی به‌مشاهدات تیکوبراهه



شکل ۱۰

پیدا کند طرح شده بود، و این درواقع درست است. با اینحال کپلر هرگز کارهای اولیهٔ خود را نفی نکرده وبه‌عکس، ربع قرن بعد، درکتابی با عنوان دنیای هم‌آهنگ *De Harmonici Mundi* با قائل شدن صدا برای میستریوم (یا رازکیهان) آن را بزرگتر و برجسته‌تر ساخت: در اثر برخورد اجرام سماوی متحرك کرات نامرئی آهنگهائی با شدت متغیر، اما با اوجی آنچنان بلند، درکیهان پخش شدند که فقط روح حساس خداوند که درخورشید مأوی داشته است توانست **این موسیقی کرات را درك کند.**

## ۱۱

پاره‌ای ازکسانیکه بنوشتن شرح حال کپلر پرداخته‌اند، دراین جهت تمایل نشان داده‌اند تا فعالیتهای اورا درزمینهٔ اعتقاد به‌مسائل مکتوم نادیده بگیرند وچهرهٔ اورا به‌مثابهٔ ناظری مستقل، که مشغول کشف حقایقی است، ترسیم کنند: هرچندکه این حقایق مغایربا ادراکات قبلی اوباشد. این مفسرین خاطرنشان می‌سازندکه عنوان منجم سلطنتی بیشتر برای او افتخارآفرین بود تا سودآور؛ وحتی پرداخت دستمزد ناچیز اوهمیشه به‌تأخیر می‌افتاد، به‌طوریکه هنگام مرگ کپلر، خزانه‌دار بیست هزارفلورن به‌او بدهکاربود، وبه‌هرحال کپلربرای ازدیاد این درآمد ناچیز ناچاربود طالع بینی هم بکند، واین امرظاهراً اشتغال مفصل اورا به‌ستاره‌بینی (*astrology*) توضیح می‌دهد. اما دربارهٔ تفکرات‌عرفانی‌اش دربارهٔ ماهیت‌کیهان، این مفسران اشاره می‌کنندکه کپلر آنها را با طعنه وکنایه وبیشتر به‌خاطرتبعیت ازروح زمان، و بدتر ازهمه، به‌مثابهٔ وسیله‌ای جهت جلب اشخاص کم سوادکه پیشرفتش وابسته به‌آنان بود بیان داشته است.

اما برخلاف فلاسفهٔ اشراقی یونان‌کلاسیك، کپلر گنجینه‌ای از شرح احوال خود به‌میراث گذارد. این «کپلرنامه» به‌نظر من تصویر اورا نه به عنوان دانشمندی ابن‌الوقت، بلکه به‌مثابهٔ طرفدار سرسخت سرمکتوم نشان می‌دهد، با این اعتقادکه خداوند به‌او رسالت داده است تا یگانگی اساسی بین حرکات اجرام سماوی، هم‌آهنگی صوت، منطق عدد و زیبائی شکل هندسی را به‌بشریت بنمایاند، به‌عقیدهٔ من این اعتقاد ویا به‌طوریکه خودش می‌گوید، این «جنون مقدس» بودکه اورا واداشت تا در سرتاسر زندگی شبح کاینات را که در جوانی از آن بارور شده بود دنبال‌کند. او نوشت: «هیچ چیز مرا متوقف نمی‌کند. من باید جنون مقدس خود را راضی کنم. من باید بر نوع بشر پیروز شوم. من ظرفهای طلائی مصریان را به‌سرقت

برده‌ام تا سایبانی مقدس برای خداوند برپا دارم، تا آنها را در آن جای دهم... کار از کار گذشته، کتابی که باید دیر یا زود خوانده شود نوشته شده است، این کتاب ممکن است یك قرن به‌انتظار خواننده بماند؛ مگر خداوند برای یك بیننده شش هزارسال صبر نکرد»؟ آیا اشارهٔ او به‌قوانین حرکت سیارات و یا «میستریوم کسموگرافیکوم» بود؟ در هر صورت، تا آنجاکه ما می‌دانیم بین این دو رجحانی قائل نبوده است. هردوی آنها در برافراشتن این سایبان مقدس سهیم بودند و من کاملاً اطمینان دارم که اگر اورا در برابر انتخاب یکی از آنها می‌گذاردند او اول میستریوم را برمی‌گزید.

نه، علی‌رغم احتجاج مدافعین، من یکنفر گریزی‌ندارم جزآنکه قبول کنم وقتی کپلر می‌کوشید تا توهمات اشراقی خود را ثابت‌کند قوانینی را کشف کردکه‌بدون‌آنها نیوتون به‌نوبهٔ خودنمی‌توانست به‌کشف اصل نیروی جاذبه نائل گردد.

## ۱۲

چه چیزی می‌توانست دانشمندانی راکه درصلاحیت علمی و اخلاقی آنها شکی‌نبود وا دارد تارصدهای‌طولانی وخسته‌کننده‌ای را دنبال‌کنند، و اطلاعات حاصل را درمعرض دید روشهای دقیق وزندهٔ ریاضی قرار دهند، ودرعین‌حال درکارشان به‌ضابطه‌ای خیالی، که به‌خداوند یا طبیعت نسبت می‌دهند، قائل باشند؟ من جوابی برای این سئوال ندارم: اما با اینکه عمری‌راپشت سرگذارده‌ام، می‌دانم‌که این شیزوفرنی (*Schizophrenia*) که با چنین‌شکلی در کپلر تجلی‌کرده، بیش ازآنچه‌که مردم باور دارند، بین بسیاری ازمردان علمی شایع است.

اعتقاد به‌علوم سری وجوه زیادی داشته است‌که همهٔ آنها از نوع ساده‌ای که‌دراین‌فصل‌بدان اشاره‌شد نبوده‌اند. درریاضیات رشد این‌اعتقادات هرگز ازحدود ابتدائی فراتر نرفته است، واحتمالا به‌همین‌دلیل است‌که این اعتقادات درحاشیهٔ‌ریاضیات باقی‌مانده است. دربعضی زمینه‌هائی‌که هم‌مرز با ریاضیات‌اند، علوم سری اشکالی ظریف و بدین سبب‌کم وبیش غیرقابل تشخیص به‌خودگرفته‌است. درواقع وقتی انسان به‌پاره‌ای فرضیات فیزیکی گوش فرامی‌دهد، متحیر می‌ماندکه درچه مواردی این تفکرات غریب با درون نگریهای‌کسانی چون فیثاغورس و کپلر تفاوت دارد.

علوم‌سری با فیثاغورس به‌دنیا نیامد وبا کپلر نیزدفن نشد. نگارندهٔ تاریخ به‌عقب می‌نگرد ووقتی می‌بیند بسیاری از مقدسات دیروز، امروزه به‌مثابهٔ علوم‌سری محکوم‌شده‌اند، باخود می‌اندیشدکه‌آیا سرنوشت اصول بدیهی ماکه روزی‌کنارگذاشته خواهند شد چه خواهد بود؟

# فصل ششم

## سیودمات (*Pseudomath*)

... چنین جنونی بدبختانه محدود به‌یك موضوع نمی‌شود. زیـرا عادت به‌تفکر غلط نیز مـانند استدلال درست تمایل به‌رشد و افزایش دارد.
کندرسه (Condorcet)

۱

درمیان مسائل گوناگونی که زینت بخش تـاریخ پرحادثهٔ ریـاضیات شده‌اند، دستهٔ کوچکی یافت‌می‌شود کـه به‌طرز جالبی دوستدارانش رامجذوب خودکرده است. مسائل مشهور ترسیمی که درفصول اول بدان اشاره کردم به‌این گروه تعلق‌دارند؛ دراینجا نیزاصل‌موضوعهٔ اقلیدس دربارهٔ مـوازیها متعلق‌به‌این دسته‌است. پاره‌ای ازمسائل دیگررامی‌توان تحت‌همین سرفصل رده بندی‌کرد، ازمیان‌آنها فقط به‌ذکرمسئلهٔ فرما (*Fermat*) می‌پردازیم: که هرگاه $n$ عددی صحیح و بزرگتراز ۲ بـاشد، معـادلهٔ $x^n + y^n = z^n$ دارای ریشه‌های صحیح نخواهد بود.

در حالیکه بـا مشکلات ذاتی این مسائل فقط به‌وسیلهٔ منـابع جبرو آنالیزمی‌توان مقابله‌کرد، اما فرمول‌بندی اولیهٔ‌آنها نه به‌علامتهای عجیب و غریب و نه به‌اصطلاحات کج ومعوج، که اینهمه مسائل ریاضی را برای شخص‌عامی مبهم می‌سازد، محتاج نبوده است. هدف این‌مسائل حتی‌بـرای کسانیکه اندکی آموزش وبصیرت ریاضی دارند کاملاً واضح وصریح است. این‌سادگی اغواکننده با این نتیجه‌که پایانی‌برای «راه حلهای» آنها نیست، بسیاری ازغیرحرفه‌ایهاراکه درلافزنی ونامربوط‌گوئی، دست‌کمی ازیکدیگر ندارند فریفته است. غیرحرفه‌ای ازطرف ریـاضیدان منطقی به‌گرمی استقبال

نمی‌شود ـ واین واقعه را بلافاصله به‌حسادت حرفه‌ای نسبت می‌دهد ـ اما به‌طورکلی ناشرروزنامه اورا پذیرامی‌شود. درواقع‌پاره‌ای روزنامه‌ها به‌این موفقیتها آن‌قدر اهمیت می‌دهندکه‌آنرا درقسمت‌خبری درصفحهٔ‌اول روزنامه می‌گذارند. برخی دیگر پا را ازاین نیزفراتر می‌نهند وبا عنوانهای درشت و چشم‌گیر بشارت می‌دهندکه این ویا آن مسئله‌که قرنها تلاش نسلهای بیشماری از ریاضیدانان حرفه‌ای را باشکست روبروکرده است، دراین عصر و امروز به‌وسیلهٔ یك غیر حرفه به‌طورکامل حل شده است. بدین ترتیب است‌که این غیرحرفه‌ای انگشت‌نما می شود؛ اما بدبختانه وقتی رقیب غیر حرفه‌ای‌دیگری باراه حل‌مغایر وناسازگارخود برای همان‌مسئلهٔ دیرین‌ناشر خوش باوردیگری‌را به‌تله می‌اندازد، افتخاراولی دستخوش زوال می‌شود. به‌خاطر تکرار چنین تبلیغاتی است‌که مسائل «مشهور» به‌طورروزمره کسب شهرت می‌کنند، و از طرفی باعث تفریح خاطر آدم خبره و از طرف دیگر سبب سرگشتگی مردم عادی می‌شوند.

## ۲

این مسائل نقش قابل‌توجهی درتاریخ ریاضیات ایفاکرده‌اند. نه‌اینکه آنهاکلید حل مشکلات اساسی باشند، بدان معنی‌که‌بدون راه حلهای خسته کنندهٔ آنها ترقی و تکامل ضوابطی‌که آنها را به‌وجود آورده‌اندمقدورنبوده باشد. نه؛ نقش آنها را بیشتر می‌توان با یك معین عمل مقایسه‌کردکه فعل و انفعال شیمیائی را، بدون‌آنکه وارد عمل شود، تسریع می‌کند. بنابراین مسایل فوق عهده‌دار اختراع بسیاری شیوه‌های جدید بوده‌اند ودربسیاری موارد، و نه درهمهٔ آنها، ضوابط جدید به‌دنبال رد پای‌آنهاگام برداشته‌اند این امر بی‌شباهت به‌داستانی نیست‌که‌گفته‌اند دهقانی پیر در بستر مرگ به‌فرزندانش نشانهٔ‌گنجی را درمزرعه داد، آنها هرچه‌کند وکاوکردند اثری ازگنج نیافتند، اما این‌کند وکاو حاصلی ببارآوردکه ثروتیکه با یافتن‌گنج بدنبالش بودند پیش آن ناچیز بود.

مسائل ناممکن مانند تقسیم زاویه به‌سه قسمت مساوی و دو برابر کردن مکعب در روزگار ما به نظریهٔ معادلات منجر شده و به‌شکلی غیر مستقیم عهده دار ابداع مفهوم بسیار مهم گروه‌گردیده‌اند. کوشش برای تربیع دایره به‌کشف عددهای غیر جبری (*transcendentals*) منتج شده؛ تلاش برای اثبات قضیهٔ فرما نتیجه‌اش نظریهٔ ایده‌آلها بود؛ ناکامی در اثبات اصل خطوط موازی به‌کشف هندسه‌های غیر اقلیدسی پایان یافته که

بدون آنها نظریهٔ نسبیت غیرقابل تصور می‌بود.

مسلماً غیر حرفه‌ای جاه‌طلب با همهٔ این پیشرفتها بیگانه است. در واقع او اصولاً به‌پیشرفتهائی‌که احتیاج به‌بررسی و مطالعهٔ‌کارهای دیگران دارد علاقمند نیست. فقط کافی است بداند مسئله‌ای‌که با آن درگیر است، تاکنون حل نشده و یا اینکه غیرقابل حل بودن آن، به‌وسیلهٔ ریاضیدانان حرفه‌ای اعلام شده است، بقیهٔ‌کار با توکل به‌خداوند ونیرو ودلاوری خود او انجام پذیر است.

## ۳

برخورد با عدهٔ زیادی از این قماش مردم به‌فال من زده شده است. من این امررا برای شکایت پیش نکشیده‌ام، زیرا درست است که‌آنها باعث ناراحتی و عصبانیت من شده‌اند، اما از تجربه‌ای‌که در ضمن ارتباط با انحراف فکری غیر طبیعی آنها بدست آورده‌ام پاداش فراوان نیز نصیبم شده است. درواقع زمانی امیدوار بودم‌که ازاین انبوه مواد خام رساله‌ای دربارهٔ بیماری شناسی استدلال و تعقل بشر تألیف‌کنم. اما هرچه سالها می‌گذرد بیشترشك می‌کنم‌که فراغتی پیدا شود تا خودرا درگیرچنین برنامه‌ای کنم. بنابراین تصمیم‌گرفتم تا پاره‌ای از این موارد را دراینجا ارائه دهم.

با اینکه ویژگیهای دماغی و روحی این اشخاص برای ریاضیدانها آنچنان هم قابل توجه نیست، اما برای روانشناسان مسئله چنین نیست، به‌خصوص برای آن دسته از روانپزشکان‌که درزمینهٔ خویشتن بزرگ بینی بررسی می‌کنند. درحقیقت این‌امید درمن وجود داردکه درمیان خوانندگان شاید چنین‌متخصصینی یافت شوندکه‌تحت تأثیراین اشارات‌گذرا قرارگیرند ودراین زمینه، که به‌نظرمن تاکنون هیچیك ازاهل‌فن بدان‌توجهی نداشته‌اند یك بررسی‌علمی را به‌گردن گیرند.

## ۴

بی‌مناسبت نیست اگر به‌این‌نمونهٔ‌انسان، نامی‌مخصوص اختصاص‌یابد: عبارت «تربیع‌کنندهٔ دایره» البته‌گمراه‌کننده است، زیرا به‌ندرت این‌اشخاص کوشش‌خودرا درچارچوب‌این‌مسئله‌کلاسیك‌محدود می‌کنند. بیشترآنها توجه خودرا به‌هرمشکل ریاضی ـ یا هرمشکلی ازاین باب ـ به‌خصوص ازاین دیدگاه‌که درخورنبوغ آنها است‌معطوف می‌دارند، به‌شرط‌آنکه متخصصین درحل آن درماندگی پیداکرده ویا به‌نتایج منفی رسیده باشند.

من پیشنهادمی‌کنم تا نام «ریاضیدان کاذب» (*Pseudomath*) به‌این اشخـاص اطـلاق گـردد، ایـن اسم را اگوست دمرگان (*Augustus de Morgan*) ابداع کرده است. قسمتی اساسی ازکتاب او بنام *Sudget of Paradoxes* به‌بررسی این اشخاص و استدلال مغالطه آمیزآنها اختصاص یافته است.

دربـارهٔ خوره‌ای‌که فکر مبتلایان به‌این بیمـاری را دائماً می‌خورد دمرگان چنین گفته است: «ریاضیدان‌کاذب مانند میمونی‌که تیغ خودتراشی را دستکاری می‌کند با ریاضیات ور می‌رود. این جانور همانطورکه صاحبش را دیده سعی‌می‌کند صورتش‌را بتراشد؛ اما با زاویه‌ای‌که باید تیغ‌را بدست گیرد وازآن استفاده‌کند آشنائی ندارد وبدین ترتیب حلقوم خودرا می‌برد. حیوان بدبخت تجربه را باردیگرتکرار نمی‌کند! اما ریاضیدان‌کاذب به‌کار خود وفادار می‌ماند، اعلان می‌کندکه صورتش را پاك تـراش‌کرده است و دیگران ریش دارند... احساسی‌که اورا دراین مسائل اغوا می‌کند ازهمان نوع است‌که درپاره‌ای داستانهای عاشقانه به‌شوالیه‌ای برای ورود به‌قلعه ناگشودنی دیوان و جادوگران دست می‌دهد. این ویروس طاعونی هندسه هنگامیکه خودرا برای یکبـار درزندگی جا داد علاج ناپذیرمی‌شود. تنها کاری‌که می‌توان‌کرد پیش‌گیری ازتوسعه وسرایت بیماری به‌کسانی‌است‌که سلامت فکری دارند، همینکه ویروس در مغزجـایگزین شد، قربانی مانند پروانه‌به‌گرد شعله ازاین سو به‌آن سومی‌رود. این‌کار را تکرارمی‌کند، باز به‌آنجائی‌که شروع کرده می‌رسد وحرکت را ازسرمی‌گیرد، بالاخره باردیگر به‌همان نقطهٔ شروع می‌رسد.

## ۵

ریاضیدانهای‌کاذب ازهمهٔ طبقات جامعه وازهرگونه شغل و پیشه‌ای به‌وجود می‌آیند. تعداد مردان بیشتراست، اما نسوان نیزدر مسابقه وارد می‌شوند. درواقع‌من ازدیرگاه توجه‌داشته‌ام‌که تعداد زنان ریاضیدان‌کاذب رو به‌افزایش است، و این محتملاً نشـانه‌ای است برآزادی تدریجی جنس لطیف. اغلب‌کشورهـا، نژادها، آئینها، حرفه‌ها و مشاغل دراینجا حضور دارند؛ فهرست شخصی من دهقانـان وافسران ارتش، یا کارمندان بـانك، دلالان و تجـار، واسطه‌های املاك، معدنچیان، پزشکان و دندانپزشکان و وکلای مدافع، مهندسـان، هنرمندان و پیشه وران، معلمین، وعاظ وحتی رؤسای دبیرستان را دربرمی‌گیرد.

تعداد این اشخـاص چه اندازه است؟ سئوالی است که جوابش را با هیچ‌درجه‌ای ازدقت نمی‌توان داد. هیچ انجمنی ازریاضیدانهای کاذب وجود ندارد. واین جای تعجب نیست، زیراکه هر ریـاضیدان کاذبی تنها خودرا مـالك حقیقت ابدی می‌داند و بـه‌دیگری به‌دیدهٔ لافزن و شیاد می‌نگرد. هنگامیکه آماری ازخدمتگزاران این مسلك وجود نداشته باشد هرتخمینی فقط یك‌حدس‌است؛ بررسی‌شخصی‌من‌که براساس‌تماسهای خصوصی‌وروابطم با آنهـا بوده، نشان میدهدکه تنها درکشور خودمان تعدادشان از چندین هزار متجاوز است.

علی رغم این واقعیت‌که آنها از قشرها و طبقات و مشاغل مختلف به‌این سلك وارد می‌شوند تشابهی جالب، چه در شیوه‌های بـرخوردشان با یك مسئله‌وچه دراستراتژی که برای شناساندن وشهرت خود به‌کارمی‌برند، بین آنها وجود دارد. وقتی موقعیتی پیش می‌آیدکـه از عقاید خود دفاع کند، هریك ازریاضیدانهای‌کاذبی راکه من‌دیده‌ام رویهٔ یکسانی درپیش می‌گیرند که شایسته است نام‌سیاست خسته‌کردن را به‌آن داد. باپشتکاری خستگی‌ناپذیروتوضیحات‌بی‌انتها میخواهدمراحل روشنی‌راکه‌دراستدلالهایش وجود دارد نشان دهد؛ اما وقتی به‌نقطهٔ بحرانی می‌رسد باسرعتی غیرقابل تصورازآن گریزمی‌زند. درواقع به‌هنگام درگیری باآنها به‌این‌نتیجه رسیده‌ام که تنهاراه نجات آن‌است‌که‌باآرامی به‌گفته‌هایشان گوش‌کنم، توضیحات‌آنها را قطع نکنم وصبورانه منتظرزمانی باشم‌که میخواهند قضیه‌را ماست‌مالی کنند.

تنوع زمینه‌های مورد علاقهٔ آنهـا باور نکردنی است. مثلاً اعلان جـایزهٔ ولف اسکول (*Wolf Skohl*) در ۱۹۰۷، جـهت اولین راه حل مسئلهٔ فرما، باعث ارسال آنقدر جواب از طرف ریاضیدانهای کاذب جهان گردیدکه بررسی این مکاتبـات به‌صورت کاری دشوار وبس عظیم درآمد. ظهور نظریهٔ نسبیت کوششهای عده‌ای بسیار را به‌این مجرای جدیدکشاند با این نتیجه‌که هرچندگاهی یك بار ردیه‌ای بر اینشتین نصیب ما می‌شود. اغلب نامه‌هائی ازاشخاص دریـافت‌کرده‌ام‌که درآن قرابتی بین پدیده‌هائی یـافته‌اندکه در نظردانشمندکورفکر، به‌یکدیگرمربـوط نیستند، در حالیکه کسیکه واقعاًدارای روحی‌جهان شمول‌است موفق گـردیده تااصل موضوعهٔ اقلیدس دربارهٔ خطوط موازی، وتربیع دایره، وقضیهٔ فرما وحرکت دائمی واصل نسبیت ووجود خدا، وتئوری‌کوانتای اتم، و پیش بینی بهای بورس واز بین رفتن جنگهـا، و حل اقتصـادی رکود، و آزادی نوع بشراز بلای

بولشویسم رادریك سنتزواحدمتحدکند؛ تازه اینهاتعدادی ناچیزازدستاورد-های مورد ادعای اوست!

**۶**

پشتکارسرسختنانهٔ آنها غیرقابل توصیف است. آنان ظاهراً ازشنیدن دشنام و جواب رد و استهزاء لذت می‌برند. دربارهٔ هواداری لایزال خود از حقیقت داد سخن می‌دهند. بـاید مسلم دانست‌کـه هیچ ریاضیدان‌کاذبی نفعی مادی از اکتشافات خود نبرده است، درحالیکه اغلب‌آنها به‌طوردائم ثروت و موقعیت خویش را درکوشش برای بدست آوردن شهرت از دست داده‌اند. باور ندارم‌که محرك آنها حرص وآز باشد؛ در واقع،گمان باطنی من برآنست‌که حتی‌کسانیکه برای بدست آوردن جایزهٔ یکصد هزار مارکی ولف اسکول تلاش می‌کردند انگیزهٔ اصلیشان میل‌به‌موجه‌ساختن تلاشهای بی‌ثمر سالیان درازشان درنظر دوستان نـزدیك بوده است و نه امید بدست آوردن جایزه. به‌عقیدهٔ من انگیزهٔ مسلطی‌که آنها در مقابل تمام شکستها حفظ می‌کنند، اشتیاق غیر طبیعی آنها به‌شهرت است. یکی ازجالب‌توجه‌ترین نمونه‌های این نوع موردی است مربوط به‌شخصی به‌نام جیمز اسمیت (*James Smith*) تاجری در لیورپول‌که در سالهای شصت قرن گذشته انگشت‌نما شد. اسمیت نیمی از زندگی و مبلغ معتنابهـی از ثروتش را در دفاع ازشیوهٔ تربیع دایرهٔ خود صرف‌کرد، شیوه‌ای‌که هرگاه تمام قسمتهای نامربوط به‌آنرا دوربریزیم، باقیماندهٔ آن عبارت است ازاین‌که نسبت محیط دایره به‌قطر آن دقیقاً برابر$\frac{۲۵}{۸}$ است. مکاتبات‌فراوانی‌باریاضیدانان برجستهٔ انگلیسی زمان خود انجام دادکه در میان آنها مـی‌توان نام‌آورانی مانند ویلیام روان‌هامیلتون (*WilliamRowan Hamilton*)، استوکس (*Stockes*) کلیفورد (*Clifford*) ودمورگان (*Demorgan*) را نام‌برد. همهٔ آنها ابتدا کوشش‌کردند تا اورا سر عقل بیاورند و همهٔ آنها به‌عنوان تلاشی بی‌ربط از آن چشم پوشیدند. برخی از جوابهای این مرد چنان بنیان برانداز بود که هر عقل سلیمی از ترس آفتابی شدن، بلافـاصلـه آنها را ازبین می‌برد. اما نه جان اسمیت! او به‌هزینهٔ خـود،کـه قاعدتاً باید به‌بهـای دارائـی ناچیزش تمام شده باشد، همهٔ مکاتبات را به‌چاپ رسانید وکتاب حاصـل را مجاناً بین دوست و دشمن توزیع‌کرد. این‌کتاب در حـدود پانصد صفحه‌ای سندی ارزشمند و غیرقابل ارزیابی برای بیمارشناسان امراض روانی است.

اصطلاحی درفیزیك‌وجود دارد برای‌نامیدن‌معلولی‌که بعدازقطع‌شدن عمل علت‌باقی‌می‌ماند، مانند پدیدهٔ مغناطیسی یاالاستیکی. چنین‌باقیمانده‌ای پس ازکنار رفتن علت را «*hysteresis* یا پس ماند» مـی‌نامند، و می‌توان آنرا کاملاً به‌جا در بسیاری از پدیده‌های تاریخ علم، وکلی‌تر بگوئیم، در فرهنگ به‌کار برد. ریاضیدان‌کاذب یا «سیودمات» یکی ازاین حالات مورد اشاره‌است. او پدیدهٔعصر ما نیست، بلکه قدمتش با ریاضیات برابری می‌کند وحتی، با مفهومی خاص، از ریاضیات نیزکهنسال‌تـر است. در واقع همانند قدمت ستاره‌بینی و طالع‌بینی برنجـوم وکیمیاگـری برشیمی «سیود ماتمتیك» نیز برریاضیات‌تقدم داشته است. علیهذا، در دورهٔ ریاضیات ماقبل منطق (*Prelogical*)، همه اساتیدفن‌کـم و بیش «سیودمـات» بوده‌اند. شیوهٔ استنتاجی و قیاسی به‌فایده وکارآیی سیودمات پایان بخشید، بااینحال «سیودمات» درست مانند «پس ماند» مدتی است طولانی‌که به‌زندگی خود ادامه می‌دهد.

در یونان قدیم، حتی درگذشته‌های دور، مـانند دوران پریکلس هم این موجود مشکلی‌بود واین‌نکته رامی‌توان ازصحنه‌ای درکمدی آریستوفان به‌نام«پرندگان» استنباط‌کرد. یك نقشه‌بردارآتنی به‌نام مستون (*meton*)- ویك سیودمات تمام عیار- تقاضا می‌کند به‌کشور پرندگان وارد شود. وقتی ازمعلومات او جویا می‌شوند، می‌گوید قادراست فضا رابه‌جریب‌قسمت‌کند و دایره را توسط خط‌کش و پرگـاد تربیع نماید. تقاضای پذیرش او قبول نمی‌شود واز او می‌خواهند پی‌کارش برود. اوبرای شنیدن دلیل آن اصرار می‌ورزد و در این باره‌گفتگوئی به‌صورت زیر واقع مـی‌شود: «چه خطری آنجااست؟ ناسازگاری میان شما شدیداست؟» «نه، بهیچوجه!» «پس موضوع چیست؟» «با توافق‌کامل تصمیم گـرفته‌ایم‌کـه مرد درغگو و حقه‌بازی را بیرون‌بیاندازیم.» جالب‌توجه است‌که دوهزاروچهارصد سال پیش‌آریستوفان ارزیابی صحیحی از تلاشهای این آدمهای ناشی داشت، در حالیکه ناشرین برخی از مطبوعات یومیهٔ ما به‌ندرت‌این فـرصت را از دست می‌دهند تا به دنیا اعلام‌کنندکه در این یا آن تاریخ بالاخره‌گره مسئله‌ای کـه در طـول نزدیك به‌سه‌هزار سالی ریاضیدانان حرفه‌ای راگیج وگمراه‌کرده بود بدست این یا آن غیر حرفه‌ای باز شد.

دوران سیاه قرون وسطـی را می‌توان نوعـی رستاخیز دوران ماقبل منطق دانست. پرورش ناچیز علم آنچنان با افکارکاذب علمـی در آمیخته

بود که می‌توان وظیفهٔ تاریخ‌نویس کنونی را که باآن دوران سروکاردارد با وظیفهٔ کسی که بخواهد مواد اولیهٔ یك ظرف املت را ازهم جداکند مقایسه کرد. ریاضیات نیز ازاین قاعده مستثنی نبود و با **مسائل مشهور** با همان روحیه‌ای که درجستجوی کیمیا ویا اکسیر زندگی بودند برخورد می‌کردند. درواقع عده‌ای را عقیده براین بود که تربیع دایره می‌تواندکلید حل بسیاری از معماها باشد. پاره‌ای از احمقانه‌ترین راه‌حلها برای **مسائل مشهور**، به آن دوران برمی‌گردد؛ بعلاوه بیشترسفسطه‌های «سیودمات» جدید را می‌توان درادبیات قرون وسطی یافت. این که گفته‌اند درزیرآسمان چیزتازه‌ای وجود ندارد، در مورد سفسطه‌ها بیش از حقیقت مصداق دارد.

## ۸

با ظهور عصرجدید، فعالیت «شبه ریاضی» یا «سیود ماتمتیك» به شکل غیر منتظره‌ای فزونی گرفت. در طول قرن هیجدهم همهٔ آکادمیهای علمی اروپا خود را درمحاصرهٔ تربیع‌کنندگان دایره، تقسیم‌کنندگان زاویهٔ به‌سه قسمت مساوی، دوبرابرکنندگان مکعب و طراحان **حرکت ابدی** یافتندکه برای شناساندن دستاوردهای دوران‌گشای خود فریاد برمی‌آوردند. در نیمهٔ دوم آن قرن مزاحمت به‌حدی غیرقابل تحمل شد، به‌طوریکه آکادمیها، یکی پس از دیگری، ناچار شدند بررسی راه‌حلهای پیشنهادی را قطع کنند. اولین مدرسه‌ای که این‌سیاست را رسماً آغازکرد آکادمی فرانسه بود. تصویب‌نامهٔ آکادمی توضیحی به‌قلم کندرسهٔ کبیر به‌ضمیمه داشت، آنچه در زیر می‌آید برگزیده‌ای ازاین‌سند تاریخی جالب است:

«تصمیم امسال آکادمی برآنستکه درآینده هیچیك ازراه‌حلهای مسائل دو برابرکردن مکعب، تقسیم زاویه، تربیع دایره و یا دستگاههائی راکه مدعی حرکت دائمی‌اند مورد بررسی قرار ندهد.... چنین اندیشیده‌ایم که وظیفه داریم دلیلی موجه برای بیان علت اتخاذ چنین تصمیمی از طرف آکادمی اقامه کنیم.... تجربه‌ای که بیش ازهفتادسال سابقه دارد نشان داده است‌کسانی که راه‌حلهائی برای این مسائل می‌فرستند نه به‌ماهیت آنهاآگاهند ونه مشکلاتشان را در می‌یابند، حتی اگر چنین راه‌حلهائی متصور باشد هیچیك از شیوه‌های به‌کارگرفته ازطرف آنان به‌حل این مسائل منجر نمی‌شود. این تجزیهٔ طولانی آکادمی را معتقد ساخته است‌که ادامهٔ بررسی دعاوی کسانی که‌مدعی یافتن‌راه‌حلهای‌مسائل‌فوق‌اندبرای‌علم بی‌ارزش‌است.»

«ملاحظاتی دیگرهنوز وجود داردکه باعث اتخاذ این تصمیم بوده

است. شایع شده است که دولت پاداش قابل توجهی برای کسی که قبل از همه مسئلهٔ تربیع دایره را حل کند در نظر گرفته است.... به‌نیروی این شایعه، عدهٔ بیشماری ازمردم، به‌تعدادی باور نکردنی، کارهای مفید خود را رهاکرده و وقتشان را مصروف حل این مسئله کرده‌اند که چیزی دربارهٔ آن نمی‌دانند، و هیچکدام شرایط لازم برای اینکار را ندارند. بنابراین هیچ خدمتی بالاتر از این نیست که آکادمی با اعلام فوق این اشخاص را ازاین کار منصرف کند. پاره‌ای ازاین افراد که به‌اندازهٔ کافی بدبختی گریبانشان‌را گرفته و معتقدند که دراینکار موفق شده‌اند، حاضر به‌شنیدن ایرادهای هندسه‌دانان نیستند، واغلب به‌خاطر آنکه نمی‌توانند آنرا بفهمند باایراد اتهام حسادت وبی‌اعتقادی به‌بررسی کننده گفتگو را پایان داده‌اند...»

«جنون تربیع‌کنندگان دایره نتیجه‌اش بیش از آنکه موجب ناراحتی و تصدیع شود باعث تضییع وقت‌آنان به‌هزینهٔ خانواده‌شان می‌گردد، زیرا بدبختانه چنین جنونی محدود به‌یك موضوع نمی‌شود، و درست مانند استدلال معقول، همانطورکه بارها اتفاق افتاده است، اعتیاد به‌طرزتفکر سفسطه‌آمیز کششی فراینده دارد. بعلاوه آنها اقامهٔ دلیل می‌کنندکه بدون مطالعه دربارهٔ موضوع به‌راه‌حلهائی رسیده‌اندکه اغلب علما بیهوده درجستجوی‌آن بودند ـ آنان خود را متقاعد می‌کنندکه تحت حفاظت‌خاص پروردگارند. وبااینکه‌عجیب به‌نظر می‌رسد از اینجا، تا این اعتقادکه هر ترکیبی ازاندیشه‌هاکه به‌ذهن آنها خطورکند الهاماتی است، یکقدم بیشتر فاصله ندارند. ازاین‌رو ملاحظات انسانی ایجاب می‌کندکه آکادمی باتوجه به‌بیهودگی چنین بررسیها در صدد برآید تا با اعلام آشکار به‌این اعتقاد شایع، که مایهٔ نابودی بسیاری از خانواده‌ها است پایان بخشد...»

«چنین بود دلایل اصولی که‌آکادمی را برآن داشت تا چنین تصمیمی اتخاذ نماید. اعلام اینکه درآینده آکادمی وظیفه‌ای در این باره ندارد در حکم آنستکه اعلام می‌نماید کوشش کسانی راکه درگیرچنین کارهائی هستند بی‌ارزش وبیهوده می‌داند. اغلب می‌گویند وقتی‌کسی به دنبال راه حلهای واهی رفت ممکن است حقیقتی مفید نیز کشف کند. چنین‌معتقداتی برای روزگاری که‌شیوه‌های کشف حقایق به‌طور مساوی در همهٔ زمینه‌های تلاش، نامعلوم بود ممکن است معتبرباشد؛ اما امروزه، در حالیکه این شیوه‌ها معلوم‌اند، مطمئن‌ترین راه برای رسیدن به‌حقیقت آنستکه خود حقیقت را جستجو کنیم...»

می‌توان تصورکرد این سند تاریخی، کـه دوران درازی است بدست فراموشی سپرده شده، دیروز نگاشته شده است ونه یکصدوهشتاد سال‌پیش. اما این سندچه‌اثری داشته است؟ درست‌است، هرگاه مقصود آکادمیسین‌ها این بوده باشدکه جوامع علمی‌را از دردسر بررسی این راه حلها نجات‌دهند، در اینصورت بیش از حد موفق شده‌اند. بزودی سایر آکادمیسین‌هـا دنبالهٔ کار را گرفتند تا آنکه امروز دیگر برای یك «سیودمات» غیرممکن است تا از تشکیلاتی علمی، شخص مشهوری را به‌عنوان شنونده در مقابـل خود پیداکند. اما، هـرگاه آکادمی فرانسه امیدوار بوده است‌که دنیا را از شر «سیودمات» نجات دهـد. در اینصورت باید قبول کرد این سند با ناکامی رقت‌انگیزی مواجه‌شده‌است. زیرابه‌جرأت می‌توان گفت‌که درتاریخ امروز بیش ار هـر زمان دیگر «سیودمات» وجود دارد؛ بعلاوه هرسال با آهنگی سریع برتعداد آنها افزوده می‌شود، و حالت **بی‌تفاوت و منفی** دنیای علمی بیش از آنکه آتش اشتیاقشان را خاموش‌کند به‌سرسختی‌آنها می‌افزاید.

و همهٔ اینها علی‌رغم این واقعیت است‌که درطول قرن گذشته تمام مسائلی کـه کندرسه برشمرده است به‌نتایج موفقیت‌آمیزی منجر گردیدند. برای «سیودمات» زمان‌پیش نمی‌رود و ساکن است. به‌نظرریاضیدان حل‌این مسائل ممکن است‌پیچیده وعمیق جلوه‌کند؛ امابه‌گفتهٔ‌سلطان تربیع‌کنندگان جیمزاسمیت، برای«سیودمات» اینها چیزی‌جزنمایشهای مسخره، خیالهای باطل ونیرنگ نیستند. وگرچه عجیب به‌نظـر می‌رسد، در این احساسات مردم عادی به‌مقیاسی وسیع سهیم‌اند. درواقع راه حلهائی که ریاضیات نو برای مسائل مشهور ارائه‌کرده است، آنطور کـه از مفهوم کلمه استنباط می‌شود راه‌حل نیستند. اینها به‌دستورالعمل معینی منجرنمی‌شوندکه‌اجرای برخی‌عملیات سنتی را دربارهٔ پاره‌ای عوامل سنتی‌تجویزکنند، بلکه‌به‌اعلام این امرمنتهی می‌گردندکـه چنین دستورالعملی یافت نمی‌شود و غیرقابل دسترسی‌است. بعلاوه‌استدلالی‌که به‌این نتایج منفی‌می‌رسد شامل‌امعان‌نظر به جبر و آنالیز است‌کـه به‌نظرعوام نامربوط می‌آید و بنابراین بهیچوجه متقاعدکننده نیست. «سیودمات» تمام‌این استدلالها را بالبخندی اهانت‌آمیز به‌دورمی‌ریزد، داغ نیرنگ برآنها می‌زند ومنظور از این نیرنگ را مخفی کردن ناتوانی ریاضیدان درپشت پرده‌ای تاریك از علامات ریاضی و نکات فنی می‌داند.

و بدین ترتیب گردونه کماکان به‌دورخود می گردد. هرسال راه‌حلهائی جدید از مسائل قدیمی ارائه‌می‌شود که ریاضیدان جاهل مدتی است آنها را حل کرده واز جدول مشکلات خود حذف نموده است. به‌خصوص قرن خود ما ازاین لحاظ بسیار باروربوده است: راه حلهای متعددی که درروزنامه‌های یومیهٔ ما اعلام شده‌که یکی از آنها شهرت مخصوص و همگانی یافته است. این راه‌حل مربوط به‌مسئلهٔ تقسیم زاویه به‌سه قسمت مساوی و از اکتشافات رئیس یك مدرسهٔ کاتولیك امریکائی است. به‌طور اساسی راه حل این پدر روحانی عبارتست از اینکه زاویه‌ای را سه برابرنموده وسپس ادعا کندکه «بفرمائید این کل زاویه، و این هم تقسیمات آن»! از سئوالهای متعددی که ازمن شده‌است معلوم می‌شودکه شهرت پدر روحانی بایدبه‌دور-دستها نیز رسیده باشد. در واقع چون کار بزرگش چنان مقبول عام قرار گرفت، تشویق شد که مصممانه تحقیقاتش را دنبال کند. در نتیجه کتابی به جهان ارزانی داشت که درآن اصل موضوعهٔ اقلیدس دربارهٔ خطوط موازی را ثابت کرد و درعین حال خط بطلان براینشتین خداناشناس کشید.

من این فصل را باگزارشی از سه مکالمه دربارهٔ همین تثلیث زاویه خاتمه می‌دهم. طرفهای مکالمهٔ من فارغ‌التحصیلان دانشگاه بودند. اولین آنها یك مهندس موفق بود. او پس از استماع توضیحات من، درحالیکه به تلخی خشم خود را مخفی می‌داشت، کلامم را با استهزا و ریشخند قطع کرد: «جمود فکری اشخاصی مانند شما مرا خسته می‌کند، این مسئله مرا بیاد متخصصینی می‌اندازدکه فقط در حدود بیست وچند سال پیش می‌گفتند پروازبه‌آسمان غیرممکن است. به‌فرض اینکه ترسیم کشیش غلط باشد، همانطور که ترسیم کسان دیگری قبل ازاو چنین بوده، چه نتیجهٔ بدی بدست می‌آید؟ ازنظرمن مفهوم آن اینست که این مسئله ذکاوت و استادی بشررا به‌مبارزه می‌طلبد. من اعتماد دارم که‌روزی راه حلهائی برای این مسائل پیدا خواهد شد، و این راه حلهای یافت شده راه همواری نیست که ریاضیدانان حرفه‌ای موظف به‌پیمودن آن باشند».

نفردوم که فردی ادیب بود و دعوی فلسفه نیزداشت گفت: «من با نتایج شما نمی‌توانم موافق باشم. تصور می‌کنم ریاضیدانان از دیدن یك حقیقت مسلم عاجزند، یعنی هرگاه مسئله‌ای بتواند **تحت عباراتی فرمول-بندی شود، تحت همان عبارات نیز قابل حل است.** اینك شما قبول دارید اگرهمهٔ مسائلی که ذکرشد می‌توانند باعباراتی خطی ومستدیرفرمول-

بندی شوند، به‌همین دلیل راه حل آنها به‌خطوط دیگری محتاج نیست».
سومی کـه دلال معاملات ملکی بود به‌تفسیرهای من بـا رضایتـی توأم با بی‌اعتمادی گوش داد. من باب تغییر موضوع و شاید با مهارت و زرنگی تعمدی، اشاره کرد که کالجی که پدرروحانی ریاست آن‌را برعهده دارد دارای تیم فوتبالی بسیار عالی است.

# فصل هفتم

# تحریم

در حقیقت، هنگـامیکه در جریـان یك بررسی ریاضی بامسئله‌ای مواجه‌می‌شویم ویا فرضیه‌ای راحدس می‌زنیم، افکارما تاحل قطعی‌مسئله واثبات دقیق‌فرضیه آرام‌نمی‌گیرد، مگرآنکه‌دلائلی بدست‌آوریم که موقعیت را غیرممکن وبه‌این ترتیب شکست را اجتناب ناپذیر سازد. ازاین‌رو اثبات غیرممکن بودن پاره‌ای راه حلها نقشی مسلط در ریاضیات نوایفا می‌کند، جستجو برای جواب‌چنین سئوالهائی اغلب به‌کشف زمینه‌هائی جدید و بارورترمنجرمی‌گردد.

دیوید هیلبرت (David Hilbert)

۱

کسی‌که محیط مرئی‌شهری بزرگ را درافق‌مشاهده می‌کند، فراوانی خطوط مستقیم وگرد وفقدان سایرخطوط اورا تحت تأثیرقرار می‌دهد. شهر درنمای ظاهری دوردست خود به‌صورت خطوط مستقیم یکنواخت،که‌گاهی با قوسهای دایره‌ای شکل‌گـرفته است، خودنمـائی می‌کند. این رجحان و برتری خط‌مستقیم ومدور محدودبه‌دوره‌های‌ساختمانهائی‌که مادرآن زندگی ویاکارمی‌کنیم نیست، لوازم بغرنج وپیچیده‌ای‌که برای‌تسهیل تلاش‌زندگی طرح می‌شوند؛ ارابه‌هائی‌که ما را ازجائی به‌جای دیگرمی‌برند، جاده‌هائی که درآنها سفر می‌کنیم، بازیهـائی‌که با آنها سرگرم می‌شویم، حتی شکل اطاقهای‌ماواثاثیهٔ‌آن، وسائل‌آشپزخانه واشیاء بی‌ارزشی که‌آنهارا انباشته‌اند همه‌گویای این رجحان وبرتری هستند.

حتی تعجب‌آورتر، منظره‌ایست که در پشت دیوارهای کارخانه‌ها و کارگاهها انتظار ما را می‌کشند. ماشینها، چرخ تراشهـا، مته‌ها، پرسها، ماشینهای فرم دهنده می‌چرخند و پس و پیش می‌روند، درحالت صاف‌کردن، به‌شکل مستقیم درآوردن وتبدیل مواد خامی هستندکه‌طبیعت دراختیارمان گذارده است.

درواقع، برای‌موجود متفکری‌که درسیارهٔ دیگرما را نظاره می‌کند و فارغ ازاغراض بشری است، فعالیت پیچیده‌ای‌که ماآنرا تمدن می‌نامیم به‌نظراو می‌تواند تلاش جمعی باشد تا طبیعت راکه دارای اعمال و رفتاری نامنظم است، وادار به‌قبول اشکال منظمی‌کندکه برای بشررجحان وبرتری دارند.

## ۲

این رجحان مولود رشد زندگی جدید نیست. عصر ماشین تنها آنچه راکه در دوران هزارساله پنهانی در روح بشروجود داشته به‌شکلی برجسته نشان داده است. این رجحان در طرحهای خام دورهٔ توحش، در اشکالی بر روی دیوارهٔ غارهای ماقبل تاریخ نیزدیده می‌شود. ظروف و ادواتی‌که از دستبرد زمانه مصون مانده‌اند شهودی‌گنگ برچنین رجحانی هستند. گوئی بشردائم درتلاش ورقابت به‌طرف این‌اشکال ایده‌آل روآورده است، ووسعت استفاده ازآنها را می‌توان به‌مثابهٔ معیاری ازمعرفت و مهارت اودر مراحل مختلف پیشرفت دانست.

درکوششهای سادهٔ ذهن بدوی انسان، که تازه نسبت به‌شکل آگاهی پیداکرده بود، درکوششهای مخیلهٔ‌چشم بسته، ماآثاری رامی‌بینیم‌که مقدر شده بود پایهٔ علمی بزرگ‌گردد. با سپری شدن زمان، این اشکال برتردر نظربشر نه‌تنها به‌صورت اصول اجتناب ناپذیرطرح وترسیم جلوه می‌کرد، بلکه به‌مثابهٔ عناصراساسی برای توضیح بی‌کم وکاست طبیعت تلقی می‌شد. به‌خاطراین عناصراو می‌کوشید تا اشکال پیچیده‌ای راکه درتجربه به‌آنها بر می‌خورد ساده نماید ودر جریان این‌کوشش دانشی‌که با نیروی عدد رهبری می‌شد رشد نمود و مآلاً به‌بالاترین سطوح‌تجرید دسترسی‌پیداکرد. مناسب است‌که این بدنه ازدانش را «علم اشکال» بنامیم؛ اما به‌علت ارتباط‌تاریخی درازمدت، هویت اولین مورد استعمال را به‌خودگرفته‌که همان هندسه یا اندازه‌گیری زمین‌است. تحت این‌عنوان متواضعانه وباچنین شروعی سرشار ازفروتنی، این علم به‌تدریج تأثیرش را برروی علوم فیزیکی‌گسترش داد.

به‌طوریکه امروز امیدوار است برتمام تفسیرهای منطقی مربوط به‌طبیعت تسلط یابد.

در هرحال، درسراسرتحول طولانی تا به‌امروز لااقل ازیك جهت این علم‌خصلت اولیهٔ‌خودرا حفظ‌کرده‌است: درهندسهٔ‌کیهانی مانندمرحلهٔ ابتدائی واولیهٔ‌علم، مستوی، مستقیم‌و مسئدیرمفاهیم‌اساسی‌خطوط‌ژئودزیك‌وانحناها برای اشکال جدید فضائی هستند.

## ۳

چه چیزاین انتخاب را به‌بشرتحمیل‌کرده است؟

گاه ازافق شهربـزرگ روی برمی‌گـردانیم و چشم‌انداز آرام بخش دوردست را می‌بینیم: رودخانه‌هائی‌که می‌پیچند، دامنهٔ تپه‌هائی‌که روی‌هم می‌غلطند، قطعـات باطلاق و جنگل،‌گاه‌گل وگیاه دوروبرخود را مشاهده می‌کنیم؛ ریشه‌هائی با اشکال عجیب وغریب و ساقه‌ها و برگها و تیغه‌های آنها را؛ ساقها، بالها، وبدنهای‌حیوان وحشی، پرنده وماهی وهمهٔ‌آنهائی‌که برروی زمین می‌خزند.

به‌هیچوجه! دراینجابشرالگوهای‌صاف‌وخطدایره‌ای‌را باانحنای لطیف خود،که عناصربرترذهنی ومورد استفادهٔ اوهستند، پیدا نکرد.

دراینصورت، چرا قـرعهٔ این تمایز به‌نام‌این اشکال مخصوص اصابت کرد؟ اشکالی‌که به‌ندرت‌درپیرامون‌طبیعتی‌که‌بشررا احاطه‌کرده است‌مشاهده می شود. سرچشمهٔ این رجحان درکجاست‌که بدین ترتیب دراشیائی‌که بشر برای‌گذران، راحتی ویا دفاع‌خود ساخته است خودنمائی می‌کند؟ چرا این اشکال به‌وسیلهٔ بشربه‌مثابهٔ سنگ‌بنای طرح‌عظیم ساختهٔ‌دست خودش‌انتخاب شده است ودرجستجوی انطباق آن با جهان مادی است؟

دریونان قدیم، جائیکه‌گهوارهٔ علم قرار داشت، رجحان خط مستقیم ومدور جنبهٔ مذهبی‌یافته بود؛ تنها خط ودایره درترسیم هندسی می‌توانستند به‌کارگرفته شوند؛ سایروسائل، بدون‌توجه به‌فایده ومیدان‌عملشان به‌مثابهٔ شیوه‌های مکانیکی محکوم وبرای فیلسوف بی‌ارزش واعتبار بودند. به‌گفتهٔ پلوتارك مـا این جنبهٔ تحریم مـذهبی را مدیـون افلاطـونیم: «ادوکسوس (*Eudoxus*) و آرکیتاس (*Arekytas*) متوسل به‌شیوه‌های مکانیکـی شدند، برای‌مقصود خود برخی خطوط منحنی‌ومتقاطع دیگررا به‌کارگرفتند اما افلاطون با سرسختی و پیگیری، به مثابهٔ روشهای ویرانگرو انحرافی درمقابل آنچه‌که برای هندسه مفید است ودر نتیجه آنرا ازحالت روحانی و

روشن نگری تا سطح مادی تنزل می‌دهد و علاوه براین، باعث زحمت بی‌ارزش فراوان نیز مـی شود، به‌مبارزه برخاست. و بدیـن ترتیب مکانیك ازهندسه به‌کنارگذارده شد و برای مدتی طولانی فلاسفه به‌آن با نظر تحقیر نگریسته بی‌اعتبـارش دانستند وبدین ترتیب به‌صورت یکی ازهنرهای‌جنگ درآمد».

اینك در برآورد ارزش تـاریخی این گفته‌ها باید به‌خاطر داشت‌که در طول پانصد سالی‌که پلوتارك را از افلاطون جدا می‌کند، استـاد به‌صورت قیافه‌ای‌افسانه‌ای درآمده بود، به‌طوریکه مکتبهای فلسفی‌رقیب برای‌اثبات نظریاتی‌که هیچگاه اودر دوران زندگیش ابراز نـکرده بود، به‌قول او‌استناد می‌کردند. بنابراین می‌بینیم سایر تـاریخ نویسان یونـان به‌هیچوجه تأکید نکرده‌اندکه مصنف‌اصلی این‌تحریم مذهبی افلاطون باشد. درحقیقت‌پاره‌ای ازآنها پا را ازاین فراترنهاده و فیلسوف آتنی را متهم‌کردندکه زمانی خود را تسلیم راه حلهای مکانیکی‌کرده‌که درخور یك هندسه دان ونجیب زاده نیست.

## ۵

هرکس نویسندهٔ این‌حکم شدید باشد، دلایل فراوانی دردست است‌که برخلاف دیگرتحریمها این تحریم موفقیتی بسیاربدست آورده است. درواقع نمی‌توان حدی در ارزیابی تـأثیری‌که این تحریم بردوره‌های بعدی هندسه داشته است تعیین‌کرد، و عجیب آنـکه این اثرحتی درهندسهٔ بعد از دوران کلاسیك بیشتراز دوران یونانی بوده است. درحقیقت این تحریم مذهبی به‌این ترتیب، میان آنچه‌که امروز هندسهٔ مقدمـاتی می‌نامیم ودر آن خط و دایره حاکمیت مطلق دارند، و سایرشاخه‌های علم خط فـاصلی‌کشید، واین خط فاصل حتی تا به‌امروز دست نخورده مانده است ـ اما این امرمانع آن نشد تا هندسه دانان یونان در منحنیهای ممنوعه‌ای‌که پلوتارك ازآنها نام برده است، مهارت واستادی پیدا کنند.

بنابراین، همانطورکه من درفصل قبل خـاطرنشان کرده‌ام، اقلیدس که ازکتاب «مقدمات» اودر طول دو هزار سال به‌مثابهٔ الگوئی برای‌کتب درسی هندسهٔ مقدماتی استفـاده شده است، رساله‌ای هم «در بـارهٔ مقاطع مخروطی» نوشته‌که متأسفانه بدست ما نرسیده است. آپولونیوس کبیراهل پرگا بررسی این‌مقاطع را به‌صورت‌علمی درآوردکه به‌اندازهٔ‌مقدمات اقلیدس روشن و ثمربخش بود. بعلاوه، هندسه دانان یونـان حتی با منحنیهائی با

درجات بالاتر نیز آشنا بوده‌اند، خطوط منحنی که پلوتارك ازآنها صحبت کرده است؛ امروز به‌نام منحنیهای درجه‌دوم مشخص می‌شوند. درحالیکه منحنیهای درجه چهارمی وجود دارند که هیپیاس سوفسطائی ازآن نام برده وامروزه آنها را منحنیهای غیرجبری یا «ترانساندان» می‌نامند.

۶

درجریان قرنهای طولانی زوال وظلمت که به‌دنبال دوران یونان پدیدار شد، همهٔ دستاوردهائی که از آن یاد کردیم به‌بوتهٔ فراموشی سپرده شد، و هنگامیکه با تجدید حیات آموزش، مطالعهٔ ریاضیات از سر گرفته شد، خط فاصل بین هندسهٔ مقدماتی و سایر شاخه‌های علم پر رنگ‌تر از همیشه گردید.

امروز وقتی می‌گوئیم این یا آن مسئله «از راه هندسی» قابل حل است، مقصودمان آن است که آنها را می‌توان به وسیلهٔ دوابزار سنتی، خط‌کش وپرگار، ترسیم کرد.

سایر ترسیمها راکه به‌طور مؤثر به‌وسیلهٔ سایر ادوات، حتی به‌سادگی خط‌کش وپرگار، قابل‌اجراباشند بابرچسب غیرممکن بودن به‌کناری می‌زنیم، زیرا برای حل آنها وسائل سنتی کفایت نمی‌کند.

این اصطلاح ناخوشایند بیشتر مربوط به‌اغتشاش ذهن عامهٔ مردم در مباحث رباضی است، شخص عامی وناوارد می‌شنودکه ریاضیدانها ازحل پاره‌ای مسائل مربوط به میراث کهن به‌عنوان **غیر ممکن** یاد می کنند او طبیعتاً چنین نتیجه می‌گیرد که این مسائل هنوز **لاینحل** باقی مانده‌اند. در واقع آنها به‌ندرت در جریان این امر قرار گرفته‌اند که بیش از پنجاه سال است که آخرین این مسائل، یعنی تربیع دایره، یك قضیهٔ **مختومه** است. بدین ترتیب، برای حقه‌بازهاکه با راه حلهای نامعقول و فریب آمیزشان برای مسائلی که از نظر راه‌حل به‌مفهوم سنتی کلمه به‌بن‌بست رسیده‌انددرب ورود گشوده می‌ماند.

برنامهٔ تحصیلی ریاضیات در مدارس متوسطه وعالی مابیش‌از آنکه تمایلی به‌از بین بردن اغتشاش وپیچیدگی داشته باشد، به‌طور غیرمستقیم آنرا تشدید می‌کند. هرچند این برنامهٔ تحصیلی ممکن است ناقص باشد با اینحال نه‌جغرافیا باجغرافیای **بطلمیوس** تدریس می‌شود ونه‌فیزیك بافیزیك **ارسطو**، درحالیکه از نظر هندسه‌هنوزدرعصر اسکولاستیك هستیم. کتب درسی که‌درمدارس‌ما به کارمی‌روندچیزی جز المثنای رنگ‌ورورفتهٔ **مقدمات اقلیدسی**

نیستندکه به‌وسیلهٔ معلمین مـدارس تألیف می‌شوند واکثریت آنها به‌طور کلی از پیشرفتهای غول‌آسانی که هندسه در این چند سال اخیر داشته است بیخبرند. درنتیجه، حدمتوسط مردم‌عادی بااین اعتقاد مدرسه راترك می‌کنند که همهٔ آنچه راکه می‌توان در زمینهٔ هندسه انجام داد تقریباً دو هزار سال پیش انجام‌گرفته است، و فقط چند مسئله از قبیل تقسیم زاویه به‌سه‌قسمت مساوی باقی مانده‌که‌هنوز در انتظارراه‌حل است،دراینجا است‌که‌متخصصین اقرار به‌درماندگی‌می‌کنند وردای افتخار باید بردوش شخصی غیر حرفه‌ای که به‌وسیلهٔ مقررات وروشهای کهنهٔ ریاضیدانهای حرفه‌ای‌آلوده نشده‌است بیفتد.

## ۷

حداقل باید گفت کـه این پـدیده جالـب توجه است: دراینجا در مقابل ماعلمی وجود داردکه در دوران نو دیدگاه خود را چنان وسعت بخشیده‌که باعث انقلابی واقعی در چشم‌انداز دانش جهان‌گردیده است. با اینحال از لحاظ آموزش ماهنوز در روزگارکهن اسکـندریه به‌سر می‌بریم. اگر بگوئیم محافظه کاری‌گردانندگان مدارس مامسئول چنین وضعی است، در اینصورت‌مشکلات را نادیده انگاشته‌ایم. ریشه‌های ارتجاعی چنین‌جهان شمول و تا این حدعمیق را،که در مقابل حملهٔ سخت پیشرفت اینهمه‌قرنها ایستادگی‌کرده است، باید در تمایل نظری ذهن بشر جستجوکرد.

بدین ترتیب این سئوال پیش می‌آید: آیا رابطه‌ای بین این محافظه‌کاری ریشه‌دار،که تعلیمات عمومی هندسه را به‌خواص خط ودایره محدود نموده، یعنی آئینن‌کهنی‌که استعمـال همهٔ ابزارووسائل را به‌جزخط‌کش و پرگارممنوع‌کرده است، واین تمایل‌نظری بشربه‌خطوط مستقیم ومدور،که بدینسان درکارو فکرش خودنمائی می‌کند، وجود دارد؟

## ۸

باوجود دردسری‌که برای خوانندهٔ هشیار از بیان امری آشکار ایجاد می‌شود، بایدتاکیدکنم که‌متشکلاتی که مسائل‌مشهورساختمانی‌باآن‌مواجه‌اند مربوط به‌طبیعت خود مسائل نیست، بلکه‌فقط ناشی از خصلت محدودیتها است‌که به‌ترسیم‌کلاسیك تحمیل شده است؛ که عبارت **ممکن وغیر ممکـن** مفهومی مطلق ندارند،که در فرمول‌بندی هرمسئلهٔ مشخص مطلب اساسی آن است‌که **دستگاهی**که به‌وسیلهٔ‌آن ترسیم بایدعملی‌گردد معین باشد؛ که‌با

حذف محدودیتها با هر وسیله‌ای قابل قبول که تعریف ریاضی مورد قبول برای‌هندسه‌را با عباراتی‌هم‌ارزخط‌کش وپرگاربشودبه‌آن اطلاق‌کرد،وبا هر مکان هندسی قابل قبول‌دربرابرخط ودایره بدون‌درنظرگرفتن روش مکانیکی ویاترسیمی که‌برای‌ایجاد آن‌به‌کارگرفته شده، عبارات‌ممکن‌وغیر ممکن همهٔ مفاهیم خود را از دست خواهند داد و میدان مسائل **قابل حل** با میدان **همهٔ مسائل** هم‌وسعت خواهد شد.

من اعتراف می‌کنم‌که این اظهارات سخنی پیش‌پا افتاده است. وبااین حال سخنانی پیش پاافتاده وجود دارندکه نمی‌شود برآنها تکیه نکردوآنها را تکرار ننمود. آن حقایقی کـه خصلت **نسبی بودن** مفاهیم را تصریح می‌کنند بـه این دسته از سخنان تعلـق دارند. در حقیقت اشتیاق انسان بـرای **امرمطلق** چنان شدیـد است کـه درك مستقیم او بـرای قبـول براهینی‌که استدلال عقلانیش بدون معطلی و تردید آنرا به‌کناری‌می‌گذارد آمادگی‌کامل دارد. تاریخ چنین مفاهیمی از قبیل نسبیت فضا وزمان نشان بارزی از این تمایل فکری‌انسان است.

## ۹

در پرتو این ملاحظات‌کلی، قبل از همه باید دامنهٔ‌کاربرد ابزارسنتی رابااین‌دیدکه‌کاربرد انحصاری‌آنها فعالیت هندسی‌را محدود می‌کند،مشخص کرد. واز آنجائیکه محدودیت از یونان ریشه گرفته است، اجباراً سرآغاز باید مراجعه‌به‌منابع یونان باشد. جالب آن است‌که می‌بینیم علی‌رغم‌نقش انحصاری‌که خط‌کـش و پرگار در هندسهٔ کلاسیك ایفاکرده‌اند، رساله‌های کلاسیك به‌ندرت وشاید هرگز ذکری از نام این اشیاء به‌میان نیاورده‌اند. در«مقدمات» **اقلیدس** ابزار مربوطه بانام دگرگون شدهٔ **مفروضات بدیهی** یا **مفاهیم عام** معرفی شده‌اند.

استفاده از خط‌کش درگفته‌هائی از این‌گونه تجویز می‌شدکه هرخط مستقیم می‌تواند تابینهایت‌ادامه یابد، که از هردو نقطهٔ متمایز می‌توان‌یك خط مستقیم‌عبورداد دوبالاخره‌هرگاه دونقطهٔ‌متمایزازخطی بردونقطهٔ‌متمایز ازخط‌مستقیم‌دیگر منطبق باشند، تمام‌نقاط این‌دو خط بریکدیگرمنطبق‌اند. کاربردپرگار نیزبااین گفته‌هاتجویزمی‌شدکه‌تنهاترسیم **یك دایره** که‌مرکزش درنقطهٔ دلخواه‌بوده‌وازنقطهٔ دلخواهی‌بخواهم‌بگذردامکان‌پذیراست‌و نه‌بیش.

برخلاف این‌تمایل‌کلاسیك به‌پنهان داشتن ابزار ولوازم،شکل‌جدید برخورد با ساختمان هندسی آشکارا وسیله را مقدم برمسئله قرار می‌دهد.

در واقع، می‌توان همهٔ سئوال را به‌طبقه‌بندی مسائل برحسب وسیله‌ای که برای حل آنها لازم است خلاصه‌کرد.

می‌توان باجدا کردن مسائلی که قابل حل توسط خط‌کش و پرگارند از مسائلی که محتاج به‌وسائل پیچیده‌ترندکار را شروع کرد. به نوبهٔ خوداین مسائل «بالاتر» می‌توانند برحسب ماهیت ابزاری که حل آنها لازم می‌آورد گروه‌بندی شوند. برای مثال زاویه‌ای غیر مشخص توسط مفصل‌بندی معین قابل قسمت به‌سه قسمت مساویست؛ وحال آنکه باچنین وسیله‌ای هیچ دایره‌ای را نمی‌توان تربیع کرد؛ اما این کاررامی‌توان توسط مکانیسمی غلطنده عملی ساخت، درصورتی که پاره‌ای ازترسیمات احتیاج به‌استفاده ازوسائل ومکانیسمهای لغزنده‌دارند. بدین ترتیب مسائل ما عبارت خواهند بود ازمسائل مفصلی (*Linkage-Problems*)، مسائل غلطکی (*Rolling Problems*)، مسائل لغزشی (*Sliding Problems*) وانواع بیشمار دیگری‌که تعداد آنها فقط به‌ابتکار و کاردانی بشر بستگی دارد.

## ۱۰

اما هر طرح‌طبقه‌بندی، هراندازه هم بامهارت تهیه شده باشد، چیزی جز تشریفات توخالی نیست، مگر با **ضابطه‌ای** مشخص پشتیبانی شود، به عبارت‌دیگرمجهز باشد به‌نظامی ازقوانین بدون‌ابهام که هرشخص صالح بتواند معین کندکه موضوعی مفروض به‌رده‌ای مفروض متعلق است یانه. وقتی این امر را در برنامهٔ خود پیاده کنیم؛ مفهوم‌آن چنین خواهد بود که با **جستجوی ضوابط، قابل‌ترسیم بودن به‌وسیلهٔ خط‌کش و پرگار**، کار را شروع کنیم. دراینجا است‌که بااولین مشکل خود مواجه می‌شویم.

در واقع درفرمول‌بندی جهت ترسیم یك‌مسئله چیزی وجود نداردکه نمایانگر آن باشدکه آیا این ترسیم را می‌توان با ابزاری از نوع ابزار سنتی حل‌کرد یانه. استفاده از خط‌کش وپرگارامکان می‌دهدکه هرقطعه‌خطی به‌سه قسمت مساوی تقسیم شود، ولی نه‌قوسی مفروض از دایره؛ یعنی کثیرالاضلاع ۳، ۵ ویا ۱۷ ضلعی را می‌توان در دایره محاط‌کرد، اما کثیر-الاضلاع ۷، ۹ ویا ۱۱ ضلعی‌را نمی‌توان؛ هرقوس‌سهمی‌رامی‌توان تربیع‌کرد اماقوسی از دایره را نمی‌توان. این‌حقایق به‌نوعی نیستندکه بتوان آنها را از صورت مسئله و یا از بررسی اتفاقی یك شکل فرضی استنتاج کرد. علی‌الاصول این مطالب **تجدید فرمول بندی‌کم و بیش پیچیده وظاهراً مصنوعی مسئله را برحسب عبارات جبری وگاهی عبارات آنالیزی لازم**

می‌آورند.

آیا برای رسیدن به‌راه‌حل مسئله ناگزیر باید این‌راه پرپیچ و خم را پیمود؟ تاریخ‌مسائل مشهورجوابی عملی به‌این سئوال‌می‌دهد. زیرا، علی - رغم تلاشهای شجاعانهٔ هندسه‌دانان یونان، به‌مدت تقریباً دوهزار سال این مسائل در سکـون واقعی باقی ماندند و تا زمانیکه جبروآنالیز به اندازهٔ کافی‌پیشرفت نکرد، به‌طور کامل حل نشدند.

درجریان این‌تحقیق، بامسائل‌بسیاری مواجه می‌شویم‌که ازمشکلات ذاتی روش هندسی محـض در ترسیم، پـرده برمی‌دارد، و ضمناً نشان می‌دهدکه چرا هندسه‌دانان باستان از حل این مشکلات عاجز بودند. این مسائل‌به‌شکلی برجسته‌تر رابطه وهمبستگی نزدیك بین ترسیم هندسی رااز یکطرف وطبقه‌بندی عددها را برحسب **خصلت** آنها از طرف دیگـر،آشکار می‌سازند. در تحلیل آخر یك‌ابزار هندسی را می‌توان بایك مقوله‌ازاعداد مطابق دانست. بنابراین، **هرمحدودیتی درمورد ابزار ترسیم‌به‌محدودیتی در زمینهٔ عدد منجر می‌شود.**

# ۲

# گلچینی از میراث یونان

# فصل هشتم

# قضیهٔ وتر

«مقدمات»: مشکل بتوان اثر علمی دیگری را یافت که در چنین دورانی طولانی جایگاه رفیع خود را در زمینهٔ خود حفظ کرده باشد. در واقع، حتی امروزه هر ریاضیدانی باید بهنحوی از انحاء با اقلیدس کنار بیاید.

فلیکس کلین (Felix Clein)

هیچیك از قضایای هندسی مانند رابطهٔ سادهٔ درجه دومی، که با نام قضیهٔ فیثاغورس شناخته شده، چنین اثری برهمهٔ شاخه‌های ریاضیات نداشته است. در واقع، از این لحاظ می‌توان قسمت عمدهٔ سرگذشت ریاضیات کلاسیك، و هم‌چنین ریاضیات نورا دربارهٔ این قضیه نگاشت.

اولا این قضیه نقطهٔ شروع اغلب روابط متری در هندسه است، یعنی خواصی از شکل‌بندیهائیکه قابل تبدیل به‌مقدار و اندازه‌اند. زیراآن اشکالی‌که در هرحال ازشیوه‌های‌کلاسیك تبعیت می‌کنند یا چند ضلعیها و یا چند ضلعیهای در حالت حدند؛ و شیوهٔ بررسی چه تجانس، چه هم سطحی وچه تشابه باشد، در تحلیل آخر، امکان تبدیل یك شکل به‌تعدادی مثلث مورد نظر است.

ثانیاً رابطهٔ فیثاغورس چون رابطه‌ای **غیرخطی**است، کاربردهای عددی‌آن به‌عددهای گنگ‌منتهی می‌شود، ازاین‌رو ریاضیات، تقریباً ازآغاز، با مسئلهٔ گیج‌کنندهٔ مقادیر اندازه ناپذیرمواجه بوده است؛ و این امرتاثیر عمیق و حتی گاهی مختل‌کننده برمسیر تکاملی مفهوم عدد داشته است.

از طرف دیگر تعیین ریشه‌های صحیح معادلهٔ

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad (۱ - ۸)$$

درآن شاخه از ریاضیات کـه نام **نظریهٔ عددها** به‌خود گـرفته، یکـی از مشکلات اولیه بوده است. با بسط و احیای ریاضیات، این امر به‌مسئلهٔ کلی تعیین ریشه‌های صحیح معادلهٔ زیرمنتهی شده است:

$$x^n + y^n = R^n \quad (۲ - ۸)$$

به‌طوریکه توان $n$ عددی صحیح وغیر مشخص باشد.

بیان اینکه‌چنین عددهای سه تائی برای توانهای بزرگتر از عدد ۲ وجود ندارند به **قضیهٔ فرما** مشهوراست. این قضیه نیزتاامروز درمحدودهٔ حدس و گمان باقی مانده است.

با ظهور هندسهٔ تحلیلی، جنبهٔ مقداری قضیه فزونـی گرفته است. کاربرد مستقیم قضیه به**فرمول فاصله** منجر می‌شودکه به‌وسیلهٔ آن طـول هرقطعه خط را بـرحسب **مختصات دوسر** آن‌می‌توان محاسبه کـرد. مثلاً نمایش تحلیلی معادله عبارت است از دوایری در صفحه که آن نیز به‌نوبهٔ خود به‌طرز فکر بـارور طبقه‌بندی و تـوضیح مکانهای هندسی به‌وسیلهٔ معادلات جبری منجرشده است. مفهوم **ارزش مطلق** یك عدد مختلط، که نقشی عمده در نظـریهٔ توابع برعهده دارد، به‌همین دسته از مفاهیم فکری تعلق دارد.

اعمال شیوه‌های بینهایت کوچك به‌چشم‌انداز فرمول وسعت زیادی بخشید. استفاده از فرمول به‌صورت دیفرانسیل منجربه‌اندازه‌گیری طول قوسهای مسطح شد. در نهایت امر این شیوه به منحنیهای فضائی سرایت کرد و پس از آن به‌سطوح منحنی تعمیم یافت.

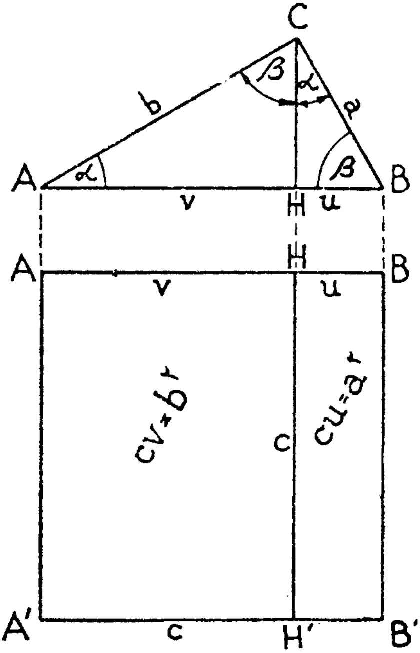
آخرین تأثیر قضیهٔ فیثاغورس، که اهمیت آن‌کمتر از سایرین نیست، برهندسه‌های غیراقلیدسی است. وقتی قضایای بدیهی هندسی مورد تحلیل انتقادی قرارگرفت، به‌زودی روشن شدکه رابطهٔ فیثاغورس بین اضلاع یك مثلث قائم‌الزاویه **هم ارز اصل موضوعهٔ اقلیدس دربارهٔ خطوط مـوازی است.** بنابراین اگرمی‌خواستیم این اصل‌موضوعه را به‌دور اندازیم و سایر قضایای بدیهی‌را نگه داریم، باید شکل دیگری‌را جانشین رابطهٔ‌فیثاغورس می‌کردیم. این‌ملاحظات ریمان (*Riemann*) را به‌اندیشهٔ تاریخی و قرن‌ساز تعریف **ساختمان فضا** به‌وسیلهٔ اشکال درجه دوم رهنمون شد، و این اندیشه وقتی به‌خصائل چندگانهٔ فضاـ زمان‌گسترش پیداکرد **اساس‌ریاضی نظریهٔ نسبیت** گردید.

## ۲

اجازه بدهید دوبرهان از قضیهٔ فیثاغورس‌راکه به اقلیدس نسبت‌داده شده است بررسی کنیم. من کلمهٔ نسبت داده شده را باآگاهی به‌کاربرده‌ام، زیرا نشانه‌های مشخصی در دست است که برهان بیان شده در آخر **کتاب اول «مقدمات»** اولین بار توسط هندسه دان برجسته ادوکسوس(*Eudoxus*) که حداقل یك نسل قبل از اقلیدس می‌زیسته عنوان شده است، وحال‌آنکه برهان تشابه که در جلد ششم آمده است با نام پایه‌گذار اصلی‌آن طالس برچسب خورده است. سیمای مشخصهٔ برهان اول آن است که قضیهٔ فیثاغورس را نه‌به عنوان **رابطهٔ** متری‌بین اضلاع یك مثلث قائم الزاویه، بلکه به‌مثابه خاصیت **مربعهائی** که برروی‌این اضلاع بنا می‌شوند توصیف می‌کند. این بیان تحت‌اللفظی قضیه برهان را به **سطوح‌هم‌ارز** محدود می‌کند. اینك برای اینکه درمورد دوچند ضلعی غیرمتجانس بخواهیم‌ثابت کنیم‌که دارای سطوح مساوی‌اند، علی‌الاصول احتیاج به‌مراحل واسطه‌ای و خطوط معین داریم،که استدلال را پیچیده و شکل را مبهم می‌سازد. این امر می‌تواندگویای این باشدکه چرا برهان اول‌سرچشمه یأس برای اینهمه مبتدیان بوده است، و چگونه حتی کسانیکه به آن چسبیده بوده‌اند به‌ندرت توانسته‌اند این احساس راکه چنین برهانی ساختگی والزاماًبغرنج و تو درتوست کنار بگذارند. از آن رواست‌که فیلسوف طنز پرداز آلمانی شوپنهاور با اشاره‌ای‌اهانت‌آمیز که: این اثبات نیست، بلکه «تله‌موش»است، آنرا نادیده‌گرفته وبه‌کناری‌گذارده است.

از زمان «مقدمات» اقلیدس تاکنون دوهزار و دویست‌وچند سالی می‌گذرد، و در این فاصله‌کتابهای بسیاری دربارهٔ هندسه نوشته‌شده است. بعضی ازآنها رونویس و برخی استفادهٔ کورکورانه از «مقدمات» است. با اینحال درمیان آنها تعدادی یافت می‌شودکه تا حدودی مدعی اصالت‌اند. ولی حتی آنها نیزبه‌عنوان **برهان قضیه** فیثاغورس همین «تله موش» را ارائه می‌کنند، درحالیکه از استدلال زیبای کتاب ششم به‌ندرت، و حتی هرگز، ذکری به‌میان نیامده‌است. و ضمناً، نه تنها برهان شق دوم‌به‌شکلی جالب توجه ساده است، بلکه یکی شناختن رابطهٔ فیثاغورس با موجودیت اشکال متشابه توسطاین برهان، به‌ریشه واقعی مسئله منتهی می‌شود. بیان امر باعبارتهای‌امروزی بدان معنی‌است‌که: دریك میدان هندسی که‌درآن‌دو شکل بدون آنکه درعین حال همانند باشند نتوانند متشابه باشند، رابطهٔ بین اضلاع یك مثلث شکل فیثاغورسی نخواهد داشت.

درقضیهٔ ۳۱ ازکتاب ششم «مقدمات»، برهان تشابه، از خاصیتی که جزو مشخصهٔ مثلثهای قائم‌الزاویه است‌نتیجه می‌شود. اصل به‌کار رفته در شکل ۱۱ نموده‌شده‌است. عمودی که ازرأس $C$ زاویهٔ‌قائمه بروتر واردمی‌شودمثلث$ABC$را به‌دو مثلث‌قائم‌الزاویهٔ$AHC$و$BHC$ تقسیم می‌کند؛ هریك ازاین دو مثلث بامثلث اصلی**هم‌زاویه‌اند** وبنابراین باآن‌متشابه. از اینجا دونسبت زیر بدست می‌آید.



شکل ۱۱

$u : a = a : c$ و $v : b = b : c$

که از آنها چنین نتیجه می‌شود

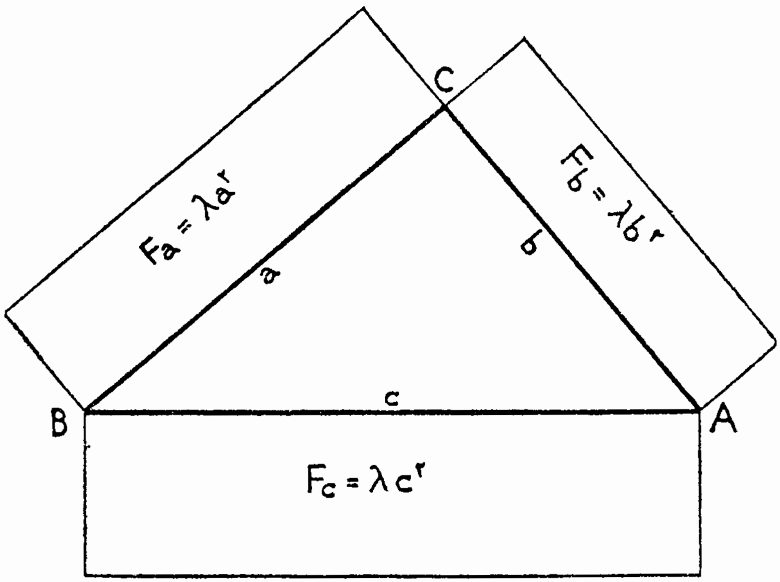
$$a^2 = cu \quad \text{و} \quad b^2 = cv$$

و با جمع دو رابطه

$$a^2 + b^2 = c(u + v) = c^2$$

شکل ۱۱ نمایش تفسیر این‌رابطه‌به‌زبان سطوح‌است. امتداد ارتفاع مثلث $ABC$ مربعی راکه برروی وتربناشده است، به دو مستطیل $(HA')$ و $(HB')$ تقسیم می کند؛ بر اساس روابط بالا، سطوح این مستطیلها به‌ترتیب برابرند با $a^2$ و$b^2$. به‌طوریکه اکنون خواهیم دید، این خاصیتی است‌که اقلیدس بدون استفاده از مثلثهای متشابه درپی اثبات آن دربرهان اولیهٔ خود بود.

به‌عنوان مسئله‌ای قابل ذکر بایدگفت‌که برای اقلیدس قضیهٔ‌کتاب ششم پیش ازآنکه شکل ثانوی برهان باشد، تعمیمی از قضیهٔ فیثاغورس بوده است. چنین است‌گفتار او: «درمثلثهای قائم‌الزاویه شکل مستقیم‌الخطی‌که برروی‌وتر بنا شده باشد، برابر است بااشکالی بااوصاف متشابه و متشابه با شکل قبل‌که بر روی‌اضلاع مربوط به‌زاویهٔ قائمه ساخته شده‌اند». ترسیم‌موجود در «مقدمات» سه مستطیل متشابه را نشان می‌دهد

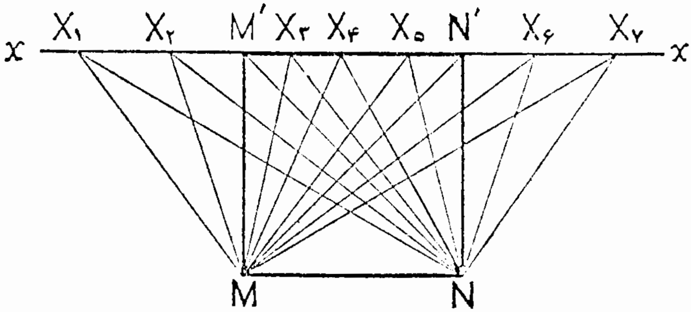



شکل ۱۲

( شکل ۱۲ ). با اینحال « اشکال بااوصاف متشابه » می توانستند مثلثهای متساوی‌الاضلاع ویا حتی سه نیمدایره‌باشند.

۴

**کلید برهان سطح** درقضیهٔ فیثاغورس، قضیهٔ۴۷ ازکتاب«مقدمات»، عبارتست از لمی‌که امکان مـی‌دهد هر مثلث مفروض را به‌مثلث هـم‌سطح دیگری تبدیل‌کنیم، بدون‌آنکه الزاماً این مثلث همانند با اولی باشد. این لم در شکـل ۱۳ نشان داده شده است‌کـه در آن $MN$ قطعه خطـی است به‌طول معین. $xx$ خطی نامحدود و موازی با $MN$، $X$ نقطه‌ای دلخواه بر روی $xx$. وقتی‌نقطهٔ $X$ طول خط را می‌پیماید مثلث $MXN$ تغییرشکل می‌دهد، اما **سطح آن دست‌نخورده‌می‌ماند.** همینکـه این لـم به‌فکرما خطور کرد، **حیلهٔبـرهان اقلیدس** روشن مـی‌شود. هـدف آنست کـه ثابت شود مثلثهای $HBQ$ و $MBN$ در شکـل ۱۴ **هم‌سطح‌اند.** به‌اعتبار لم فوق، $HBQ$ را می‌توان با مثلث‌هم ارز $CBQ$ جانشین کرد، و $MNB$ را تـوسط مثلث هم‌ارز $ANB$. بـااینحـال در مثلثهـای $CBQ$ و $ANB$



شکل ۱۳

داریم:

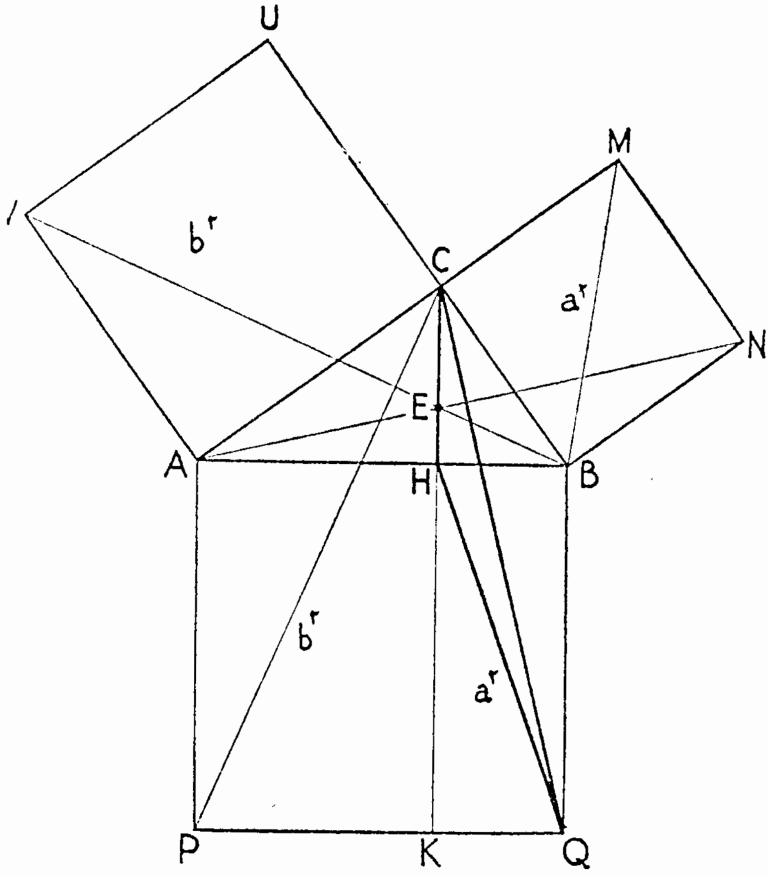
$AB = QB$;  $CB = BN$; زاویهٔ $QBC$ = زاویهٔ $ABN$

بدین ترتیب $CBQ$ و $ANB$ همنشت‌اند (*congruent*) و بنابراین **همسطح‌اند.** ازمثلثها بگذریم و به‌مستطیلها بپردازیم، می‌بینیم $BHKQ$ هم‌ارزاست با $BCMN$ وبا استدلال‌مشابه $AHKP$ هم‌ارز است‌با $ACUV$

**۵**

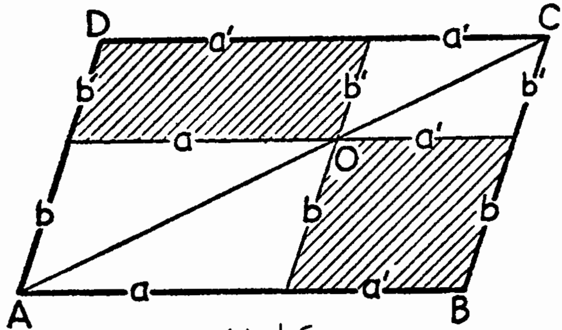
چرا اقلیدس به‌برهان پیچیدهٔسطح جای برجسته و مشخصی داد و برهان سادهٔ تشابه را به‌آخر بررسی‌خود دربارهٔ اشکال متشابه موکول کرد؟ جواب اینست که نویسندهٔ «مقدمات» با باریك‌بینی خاص خود نمی‌خواست قبل ازآنکه بررسی‌کاملی در موردکسرها و نسبت‌هاکرده باشد وارد روابطی‌شودکه به‌اصل‌تشابه مربوط می‌شود. درکتاب پنجم «مقدمات» چنین بررسی به‌طور دقیق انجام گرفته است.

کسی‌که امروز «مقدمات» را می‌خواند از توجه غیرعادی و شرح جزئیات پردردسری‌که اقلیدس دربارهٔ پاره‌ای مفاهیم به‌کاربرده دچارتعجب می‌گردد، مفاهیمی‌که دورهٔ تحصیلات جدیدبااشاراتی مختصر ازآن صرفنظر کرده است. مخصوصاً تنوع عجیب موارد خاصی‌که مورد بحث قرارگرفته گیج‌کننده است، در حالیکه امروزه ما به‌این موارد به‌دیدهٔ شکال مختلف یك قانون‌کلی می‌نگریم. یك دلیل این پرحرفی آشکار وضع ابتدائی است که جبر یونانی داشت. با نبودن علامت‌گذاری مناسب، ریاضیدانان یونان به‌شیوه‌های توضیحی متوسل می‌شدند، این امر درنهایت امر به‌استفاده از




شکـــل ۱۴

فهرست کلمات وجملاتی دشوار و قوانینی که بسیاری از آنها امروز به‌مثابهٔ چیزی زائد و نامعقول به‌چشم می خورد منجر می‌شد. یکـی از حـالات مـورد بحث **فرضیهٔ نسبتها** است که قسمت مهمی از جبر توضیحی را کـه توسط هندسه‌دانان یونان بـرای‌بیان **روابط متریك** بـه‌کار بـرده مـی‌شد تشکیل مـی‌دهـد. در اینجـاست کـه اختـلاف بین نمایش کـلاسیك و نو به‌چشم‌مـی‌خورد. بـرای نشان دادن مـوضـوع، تناسب $a:b=a':b'$ و «المثنای آن» یعنی تساوی $ab'=a'b$ را در نظر بگیریم. سهولتی کـه با آن امروز از یك تـوضیح به تـوضیح دیگر می‌رسیم مشهود است؛ در




شکـل ۱۵

اینصورت‌ملاحظه می‌کنیدآنچه راکه امروزامری‌جزئی درکار جبر می‌دانیم برای یونانیان قضیهٔ اساسی هندسه بود. این قضیهٔاساسی به هرزوج چهار ضلعی متشابه یك زوج چهار ضلعی دیگر که سطوحشان برابراولی‌ها است اختصاص مـی‌دهد. بـه همراه این قضیه یك شکل هندسی وجود دارد که در شکل ۱۵ دیده می‌شود. هرگاه $o$ نقطه‌ای دلخواه در درون متوازی‌الاضلاع $ABCD$ باشد، خطوط موازی با اضلاع متوازی‌الاضلاع کـه از نقطهٔ $O$ رسم شوند آنرا به‌چهار متوازی‌الاضلاع هم زاویه $(OA)$، $(OB)$ $(OC)$، $(OD)$ تقسیم می‌کنند، کـه برای اختصار نام آنهـا را «خانه» می‌گذاریم. قضیهٔ موردگفتگو چنین‌است: **هرگاه خانه‌های (OA) و(OC) متشابه باشند دراینصورت خانه‌های(OB) و (OD) هم‌سطح‌اند و بالعکس** شرط تشابه تنها درصورتی به‌وجود می‌آیدکه نقطهٔ $O$ برروی ایـن و یا آن قطر $ABCD$ قرارگیرد. بدین ترتیب به‌المثنای‌هندسی رابطهٔ $a{:}b = a'{:}b'$ که نتیجه‌اش $a \times b' = a' \times b$ است می‌رسیم و بالعکس.

## ۶

با اینحـال اشتباه است اگرتفصیل دادن اقلیدس را دربحث تناسبها تنها به‌علت پـائین بودن سطح جبردر یونـان بدانیم. واقعیت آن است‌که یونانیان درنمایش نسبتهابه‌وسیلهٔ اعداد دچار تردید بودند، وعلت حاکمیت این تردید وجود مقادیر اندازه ناپذیر (*Incommensurable*) بود.

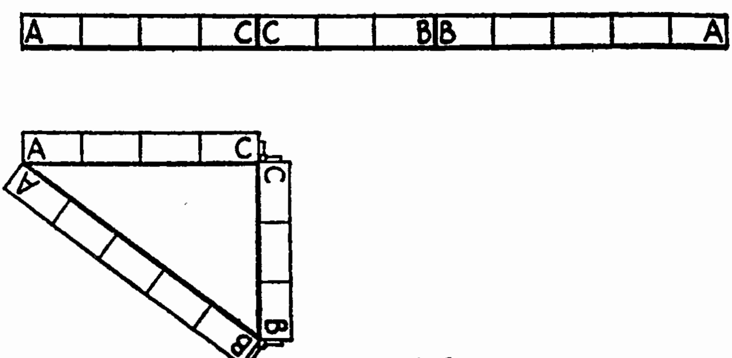
چگونه می‌توان نسبت محیط دایره‌ای را به‌قطرآن و یـا نسبت قطر مربعی را به‌ضلع آن، بدون توسل به‌روندهای بینهایت و حدهای آنها، که وارث این همه شك و تردیدند، معین‌کرد؟ اقلیدس یك نفر افلاطونی بود،

و انعکاس مجادله‌ای که توسط معماهای زنون برخاسته بود درعصراو هنوز فروکش نکرده بود. برای آنکه دچار وسوسه نشویم واین احتیاط ضروری را دست کم نگیریم، اجازه بدهید تا درد ناشی‌از **نظریهٔ جدید اعداد گنگ**. بررسی انتقادی وایرشتراس (*Weirstrass*)، کانتور (*Cantor*)، ددکیند (*Dedkind*)، پوانکاره (*Poincarē*) و تضادها و مجادلات تلخی راکه هنوز خاطرهٔ آن نزد ریاضیدانهای پیرتر نسل ما زنده مانده است یادآوری کنیم.

## ۷

شکل ۱۶ ترسیمی است شماتیك ازچیزی که می‌توان نام خط‌کش‌مفصلی به‌آن داد. طول مفصل طویل‌تر $AB$ برابر ۵ واحد واز مفصلهای کوتاه به‌ترتیب برابر با ۳ و ۴ واحد است. اگرمفصلهای بیرونی حول پاشنه‌های $B$ و $C$ بگردند تا نقاط انتهائی آنها منطبق‌بر $A$ شود، مثلث حاصل $ABC$ دارای‌زاویهٔ‌قائمهٔ $C$ خواهد شد که بااتکای به‌وضع موجود خواهیم داشت:

$$۳^۲ + ۴^۲ = ۵^۲$$




شکل ۱۶

این شیوهٔ ترسیم زاویهٔ قائمه هزاران سال پیش از فیثاغورس معمول بود. ترتیب فوق توسط ممیزان ومساحان‌مصرقدیم، در مسائل‌مربوط به‌تعیین موقعیت محل، به‌وسیلهٔ چینیها، به‌عنوان تراز درکار بنائی ودر سایر سرزمینهای‌شرقی به‌مشابهٔ‌نوعی **گونیای**‌نجاری به کارمی‌رفت. شواهد فراوانی دردست است که قدما از وجود پاره‌ای‌دیگراز **مثلثهای گویا** آگاه بودند، یعنی مثلثهائی راکه می‌توان با عددهای سه‌گانهٔ (۱۳، ۱۲، ۵) و (۲۵،

۲۴، ۷) مشخص کرد، و بدون شك پی‌جوئی چنین اعداد سه‌گانه بود که ریاضیدانان‌یونان‌قدیم‌را به‌قضیهٔ فیثاغورس رهنمون شد.

این‌قضیه تأیید ظفرنمون فلسفهٔ‌عددی فیثاغورس بود. اما این‌پیروزی دیری نپایید، زیرا خود تعمیم قضیه از وجود **مقادیرگنگ** پرده برداشت. برای فیثاغوریان اولیه هر مثلث یك **مثلث‌گویا** بود، زیرا عقیدهٔ آنان برآن بودکه همهٔ چیزهای قابل اندازه‌گیری **قابل سنجش نیزهستند.** این حکم تا حد یك اصل بدیهی برایشان مسلم بود، و وقتی اعلام می‌کردند عددحاکم برکاینات است، منظور آنها عددهای‌صحیح بود، زیرا خود این ادراك که‌مقادیری‌هم‌می‌توانند موجودباشندکه مستقیماً توسطعددهای‌صحیح قابل بیان نباشند، نسبت به‌چشم‌انداز وتجربهٔ‌آنها به‌یك اندازه بیگانه بود.

## ۸

پاره‌ای مفسرین‌جدید افکارریاضی، متمایل‌اند به‌این‌که این‌گونه افکار را به‌عنوان مفاهیم ساده لوحانهٔ اعصارگذشته نادیده انگارند. اما در نظر کسی که در کار روزانهٔ خود با ابزار ریاضی سروکار دارد ـ وامروزه تعداد این‌گونه‌کسان به‌هزاران تن می‌رسد ـ ریاضیات وسیله‌ای برای هدف است ونه خود هدف؛ درنظرآنها این مفاهیم نه‌متروك‌اند ونه ساده لوحانه، زیرا اعدادی‌که برای او دارای مفهوم علمی‌باشند؛ یا **ازشمارش** ویا از **اندازه‌گیری** به‌وجود می‌آیند، و بنابراین یا **اعداد صحیح‌اند** ویا **کسرهای‌گویا** البته او باید با سهولتی نسبی استفاده ازعلائم وعباراتی راکه دال بروجود مقادیرغیرگویا هستند آموخته باشد، اما این اصطلاحات برای او فقط در شمارتسهیلات‌کلام است، و درنهایت امرعددگویا به‌مثابهٔ تنها اندازه‌ای‌که کاربرد عملی دارد در برابرش سربلند می‌کند.

هرگاه این شخص، که به‌خاطرساده لوحی‌خودسرزنش می‌شود، کوشش کندتابه‌عمق‌اصطلاحات‌پیچیده‌ومرموزنفوذکند، به‌زودی درمی‌یابدکه رونددائی‌که برای حمایت از این موجودات‌گنگ کمك‌گرفته شده‌اند به‌طورکلی برای او غیرقابل دسترسی، و لذا بی‌فایده‌اند. ولی هرگاه درکوشش خود جهت توضیح چنین موجودی برحسب عباراتی‌که برای اعدادگویا به‌کار می‌برد پافشاری‌کند، به‌سختی به‌او یادآوری می‌کنندکه در مسائل غیرگویا گاهی‌می‌توان نسبت به‌بینهایت طفره رفت ولی هرگزنمی‌توان ازآن‌اجتناب نمود. زیرا خاصیت ذاتی‌این مقادیرغیرقابل اندازه‌گیری این‌است‌که هرقدر عددگویای‌معینی «شبیه» به‌آنها باشد، باز عددگویای دیگری‌می‌توان یافت

که حتی ازعدد اولی هم به‌آن «شبیه‌تر» است.

این‌شخص درمیان فیثاغوریان بیشتر احساس یگانگی‌می‌کند تا درمیان جانشینان دقیق و سخت‌گیر او. او مشتاقانه اعتقاد آنها را براینکه تمام اشیاء قابل اندازه‌گیری قابل سنجش‌اند درآغوش می‌کشد. درحقیقت وقتی درمی‌یابدکه چگونه اصلی به‌این زیبائی وسادگی تعمداً به‌دور انداخته شده است متحیرمی‌ماند. ودر غایت امر، ریاضیدان ناچارمی‌شود مسلم بداندکه این اصل نه به‌خاطر تضادش با عمل، بلکه به‌خاطر آنکه با اصول بدیهی هندسی ناسازگار است به‌دور افکنده شده است.

## ۹

در حقیت هرگاه اصول بدیهی هندسی معتبر باشد، **در اینصورت قضیهٔ فیثاغورس بدون استثناء درست و معتبر است.** و هرگاه قضیه درست باشد در اینصورت مربعی که برروی قطر یك مربع با ضلع واحد به وجود می‌آید برابر است با ۲. از طرف دیگر هرگاه **گفتهٔ فیثاغورس درست باشد،** در اینصورت ۲ باید مجذور اعدادی گویا باشد، واین خود بااصول حساب عددهای گویا در تضاد است. چرا؟ زیرا این اصول، درمیان سایر مطالب، متضمن آنندکه **هرکسری می‌تواند به‌ساده‌ترین شکل خودکه حداقل‌یکی از جملات آن فرد است تبدیل‌شود.** ومجذور هر عدد فرد عددی است فرد؛ و مجذور یك عدد زوج عددی است قابل تقسیم بر۴. در اینصورت فرض کنیم‌که دوعدد صحیح $n$ و $R$ موجود باشند به‌طوری که، $\frac{R^{۲}}{n^{۲}} = ۲$ باشد، دراینصورت داریم:

$$R^{۲} = ۲n^{۲}$$

نتیجه آنکه $R$ زوج است، زیرا صورت و مخرج کسر مزبور به‌کوچکترین عدده‌ای قابل قبول تبدیل شده‌اند و $n$ باید فرد باشد. بدین ترتیب این نتیجهٔ غیر قابل دفاع بدست می‌آید که طرف چپ یك تساوی قابل قسمت بر ۴ است، در صورتیکه طرف راست قابل تقسیم بر ۴ نیست.

استدلال مذکور بیان امروزی برهان‌اقلیدس دربارهٔ **عدد غیرگویای** $\sqrt{۲}$ است. سادگی‌اش دلالت برآن دارد که این بیان چیزی جز استفاده از برهان قدیمیتر نیست، شاید همان برهانی‌که فیثاغوریان را عمیقاً سردرگم‌و در نهایت امر آنها را ناچار به‌تغییر نظرگاه خود دربارهٔ عدد کرد.

روشن است که استدلال به‌مورد یك مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین محدود نمی‌شود. مثلث قائم‌الزاویه‌ای را می‌توان درنظر گرفت که اضلاع آن عددهایی صحیح مانند $n$و $g$ باشد و $g^2 + n^2$ **مجذور کامل نباشد.** بایك استدلال مشابه بابرهان **اقلیدس** می‌توان به‌سهولت ثابت‌کرد که‌چنین مثلثی گویا نیست. این امر به‌روشنی وجود بینهایت مثلث غیرگویا راآشکار می‌سازد. بعلاوه، اکثریت مسلط مسائل ترسیمی هندسهٔ کلاسیك درست به همین مثلثهای غیرگویا وابسته‌اند: کافی است دراین زمینه **تقسیم طلائی** رسـم **چند ضلعیهای منتظم، و تنصیـف زاویه‌های‌معمولی** را ذکـر کنیـم.

واقعیت‌آن است که تعیین مثلثهای گویا مسئله‌ای هندسی نیست،زیرا به‌طریق هندسی راهی بـرای جدا کردن مثلث‌های گویا از غیرگویا وجود ندارد. درضمن مسئله‌ای‌هم نیست‌که جبر قادربه‌حل آن باشد، زیرا قوانین جبر رسمی همانقدرکه تابع عدهای‌گویا هستند ازعددهای کنگ نیز تبعیت می‌کنند. در تحلیـل آخـر باید گفت مسله عبارتست ازبررسی **عددهای صحیح.**

# فصل نهم

# سه‌تائی‌ها

ماقضیه‌ای زیبا، باتعمیمی کامل، یافته‌ایم، به‌اینصورت که‌هرعدد صحیح یامجذورکامل است ویامجموع دو،سه ویا حداکثر چهار مجذور کامل. این قضیه به پاره‌ای از رازهای پوشیدهٔ عددها مربوط است و ممکن نیست درمحدودهٔ این صفحه‌برهانی جهت‌آن ارائه داد.

فرما (Fermat)

۱

این فصل در بارهٔ عددهـای صحیح بحث می‌کند، بخصوص در بارهٔ عددهای صحیح‌مثبت‌به‌عبارت‌دیگر، دربارهٔرشتهٔ«طبیعی»۱، ۲، ۳، ۴، ... یعنی نقطهٔ شروع همهٔ ریاضیات. شاخه‌ای ازریاضیات که به‌بررسی عددهای صحیح اختصاص دارد به‌نام نظریهٔ عددها شناخته شده است. ریشهٔ این نامگذاری ناخوشایند مبهم است، امـایـك امر محقق است؛ برای سرزنش واضع این نام بی‌مسمی نبایدبه‌یونان‌رفت.

یونان قدیم دوکلمهٔ مشخص‌برای عدد داشت، آرتیموس(*Arthimos*) برای عدد صحیح ولگوس(*Logos*) برای عدد به‌طور عام، وگرچه‌درادبیات عامیانه دوعبارت‌بابی‌توجهی‌به‌جای یکدیگر به‌کار گرفته شده‌اند، نویسندگان ریاضیات کم وبیش درقائل شدن‌به‌تمایز این دوباهم متفق‌اند. بنابراین‌نظریهٔ عددها اریتمتیکا (*Arithmetica*) نامیده شد، درحالیکه آنچه راکه امروزما حساب یعنی «اریتمتیك» می‌نامیم، همان «لوجیستیکا»است. کلمهٔ آخرکه در اصطلاح ارتش باقیمانده است به همان‌کلمهٔ یونانی *Logisticos* یاحسابدار

برمی‌گردد، و به‌خصوص به‌حسابدار وابسته به‌ارتش اطلاق می‌گردید که کارهای برنامه ریزی حساب و کتاب و تدارك تجهیزات را بر عهده داشت.

واضع نام بی‌مسمی وابسته به‌دورانی است که عدد را به‌مفهوم **عدد مثبت** و یاچیزی درحدود آن، می‌گرفتند. از آن دوران تاکنون راه درازی پیموده‌ایم، تحول مفهوم عدد به صورت یکی از عمیق‌ترین، بارورترین و دوردست‌ترین بررسیهای ریاضیات درآمده و در واقع مناسب است که به‌این بررسی وسیعتر نام **نظریهٔ‌عدد** اطلاق گردد. بنابراین تأسف‌آور است که این اسم را رشته‌ای‌که منحصراً با عددهای صحیح سروکار دارد، غصب کرده است.

ممکن‌است گفته شود، وقتی به‌روشنی‌مفهوم‌این اسم بی‌مسمی‌تشخیص داده شد، به‌راحتی می‌توان آنرا تصحیح کرد، اما‌کسی‌که چنین افکاری از مغزش می‌گذرد نیروی عادت را، حتی در مسائل مربوط به‌ریاضیات، دست کم می‌گیرد.

درست است‌که نقطهٔ شروع هر بررسی اصولی ومنظم دربارهٔ مفهوم کلی عدد باید عددهای صحیح باشد و بنابراین می‌توان دریافت که نظریهٔ عددهای صحیح نوعی مقدمه برای **علم عدد** است وبه‌همین جهت شایستهٔ اطلاق نامی‌که به‌آن داده‌اند می‌باشد. اما بارسیدگی دقیق در می‌یابیم‌که عمدهٔ‌گرفتاری نظریهٔ عددها به‌صورت امروزی‌اش **عددهای صحیح به‌طور کلی** نیست، بلکه باانواع مخصوص آن است که منفرداً ویا به‌شکل یك دسته مورد بررسی‌قرار می‌گیرند. برخی ازمسائل این نظریه، درواقع‌چنان وضع خاصی دارندکه برنده‌ترین ابزارهای آنالیز اغلب برای حل مشکل آنها کند است؛ و در نتیجه پاره‌ای از این مسائل تا به امروز لاینحل مانده‌اند.

مبارزه برعلیه این مسائل بزرگترین ریاضیدانها را، از فرما گرفته تا هیلبرت (*Hilbert*)، به‌کوشش واداشته است. شیوه‌هائی مخصوص با استادی خارق‌العاده توسط این اساتید به‌کارگرفته شده است، واین‌شیوه‌ها به‌نوبهٔ خود سایر شاخه‌های ریاضیات را غنی کرده‌اند. باهمهٔ اینها، نظریهٔ عددها مانندگنبد باشکوهی است‌که بررأس بنای ریاضیات به‌چشم می‌خورد ولی جزئی ازساختمان اصلی آن نیست. این نظریه مانند پرهیزکاری‌پاداش خود را در بطن خود دارد. درواقع، رویهمرفته می‌توان بررسی درهرشاخهٔ ریاضیات نورا بدون برخورد بالزوم کاربردابزار مربوط به‌نظریهٔ عددبر

عهده گرفت. از این‌رو درعصر ما که عصر تخصص‌های جزئی باتعدادی بیشمار است، اغلب ریاضیدانها بدون آنکه به نظریهٔ عدد آگاهی داشته باشند می‌توانندگلیم خود را ازآب بیرون بکشند. گوس این‌نظریه‌را به‌نام «ملکهٔ ریاضیات» اعلام‌کرد، اما برای ریاضیدان‌عصرحاضر، این نام‌بدون محتوی جلوه می‌کند.

## ۲

آنچه راکه نام قضیهٔ فیثاغورس به‌خودگرفته است می‌توان به‌شکل زیربیان کرد. تعیین تمام دسته‌هایی از عددهای صحیح که در معادلهٔ زیر صادق‌اند:

$$x^۲ + y^۲ = R^۲ \qquad (۱-۹)$$

من نام این دسته‌ها را سه تائیهای فیثاغورس و یا به‌اختصار سه تائی می‌گذارم. جمله‌های $x$ و $y$ **اضلاع** و $R$ **وترسه‌تائی است.** هرمثلثی‌که‌اضلاع آن را بتوان با عددهای‌صحیح بیان‌کرد، **مثلث‌گویا** نامیده می‌شود. این بیان چشم‌اندازکلمهٔ «گویا» را محدود نمی‌کند. زیرا اگرمثلثی را بتوان به‌وسیلهٔ **عددهای گویا**،یعنی‌عددهای‌صحیح‌ویاکسری‌نشان‌داد،دراینصورت با تغییرمتناسب دستگاه شمارش، نمایش‌آن باعددهای فقط صحیح‌کار مشکلی نیست.

شاخه‌ای از نظریهٔ عددکه با ریشه‌های صحیح معادلات سر وکار دارد به‌نام تحلیل دیوفانتوس نامگذاری شده است. این نام منتسب به‌ریاضیدان اهل اسکندریه قرن چهارم بعد ازمیلاد است، و تا آنجاکه ما می‌دانیم او اولین‌کسی بودکه باشکلی اصولی ومنظم، این‌نوع مسائل را مورد بررسی قرار داد.

**معادلهٔ دیوفانتوس** (۹-۱) نوعی مخصوص از معادلهٔ همگن است. سیمای برجستهٔ این معادلات چنین است: هرگاه ($x$ ، $y$ ، $R$) دسته‌ای از مقادیری‌باشندکه درمعادلهٔهمگن صدق‌کنند، دراینصورت دسته‌های **متناسب** ($nx$ ، $ny$ ، $nR$) به‌ازای کلیهٔ مقادیر $n$ نیزریشهٔ این معادله می‌باشند. زیرا ازخاصیت همگن بودن رابطهٔ فیثاغورس می‌توان سه‌تائی را به **اول** و **غیر اول** طبقه‌بندی کرد. یك سه‌تائی اول است، هرگاه جمله‌های آن نسبت به‌یکدیگر اول باشند؛ به‌عبارت دیگرمقسوم علیه مشترکی نداشته باشند. برعکس، جمله‌های سه تائیهای غیراول دارای مقسوم علیه مشترك‌اند. مثالهایی برای سه تائیهای اول عبارتند از (۳، ۴، ۵)، (۵، ۱۲، ۱۳)

(۸، ۱۵، ۱۷)؛ مثالهائی برای سه تائی‌های غیراول، (۹، ۱۲، ۱۵)، (۱۰، ۲۴، ۲۶)، (۸۰، ۱۵۰، ۱۷۰).

به‌هریك‌ازسه‌تائیهای‌اول$(R، y، x)$، بینهایت‌سه‌تائی‌غیراول‌وابسته‌است:
$(۲x ، ۲y ، ۲R)$، $(۳x، ۳y، ۳R)$، $(۴x ، ۴y ، ۴R)$، ...، $(nx، ny ، nR)$...

ازطرف‌دیگرهرگاه $(x، y ، R)$یك سه‌تائی غیراول باشد،همیشه می‌توان یك سه تائی اول انتخاب کردکه جمله‌های آن **متناسب** با $x$ ، $y$ و $R$ باشند، و این امر به‌وسیلۀ تقسیم‌هریك‌ازجمله‌های سه‌تائی به **بزرگترین مقسوم علیه مشترك** آنها امکان پذیراست. من این‌عمل‌راکوچك‌کردن نامگذاری می‌کنم. اول‌بودن یا غیر اول بودن هرسه تائی مفروض بستگی به اندازۀ مقسوم علیه مشترك‌آن دارد. شکل‌ضمنی برای‌یافتن‌این مقسوم‌علیه به‌وسیلۀ قضیۀ زیرکه خودنتیجۀ مستقیم‌شکل ممکن‌رابطۀ فیثاغورسی است، آسان می‌شود:

**هرگاه دو جمله از یك سه تائی فیثاغورسی قابل قسمت به‌عددی باشند، جملۀ سوم نیز به‌همین عددقابل تقسیم است.** این قضیه دو نتیجۀ فرعی دارد: اول برای‌تعیین بزرگترین مقسوم علیه مشترك یك سه تائی کافی است بزرگترین مقسوم علیۀ مشترك دوجمله ازیك سه تائی را بدست آوریم؛ و دوم **هرگاه دوجمله ازیك سه تائی نسبت به‌یکدیگراول باشند خود سه تائی اول خواهد بود.** برای مثال دستۀ (۱۴۰، ۱۷۱، ۲۲۱)را در نظربگیرید. آیا این دسته یك سه تائی است، و اگرچنین است اول‌است یا غیر اول؟

دستۀ فوق یك سه تائی است، زیرا:

$$۲۲۱^۲ - ۱۷۱^۲ = (۲۲۱ + ۱۷۱)\ \ (۲۲۱ - ۱۷۱) = ۳۹۲ \times ۵۰ =$$
$$= ۱۹۶۰۰ = ۱۴۰^۲$$

و اول نیزهست، زیرا ۱۴۰ و ۱۷۱ **نسبت به‌هم اولند.** از طرف دیگر، دستۀ (۳۶، ۱۰۵، ۱۱۱) اول نیست، زیرا بزرگترین مقسوم علیه‌مشترك آن ۳ است، و سه‌تائی اول حاصل از کوچك‌کردن آن عبارتست از (۱۲، ۳۵، ۳۷).

## ۳

یك راه‌حل جامع جهت‌معادلۀ فیثاغورس، برای دوران ما نگهداری شده‌است. درحالیکه اشارات‌بسیاری درمورد مسئله درکتاب‌دهم «مقدمات» اقلیدس، درآریمتیکا ازدیوفانتوس وچند رسالۀ دیگرریاضی‌از دوران کلاسیك وجود دارد،کوششی منظم وسیستماتیك برای رسیدن به‌مسئله انجام‌نگرفته

است. یك علت این امرتقریباً روشن است: توجه به‌گویا بودن در هندسهٔ کلاسیك نقشی بسیار اندك داشته است و هندسه مورد تـوجه والا و برتر ریاضیدانان بوده است.

این‌مسئله را با قطعیت می‌توان تأییدکرد. یونانیان کاملا به‌اهمیت مفهوم **اول بودن** آگاهی‌داشتند؛ آنهامی‌دانستندکه **یکی ازاضلاع سه‌تائی اول زوج است و دیـگری فرد، وآنچه مربـوط به‌وتر است همیشه فرد خواهد بود.** آنهـا می‌دانستندکه چگونه برخی ازسه تائیها را می‌توان از عددی نـامعین ساخت، واز این نتیجه‌گـرفتندکه **مجموعهٔ سه تائیهای اول بینهایت‌اند.** من پاره‌ای ازبرهانها وروشهای آنها را، البته به‌روایت جدید تشریح خواهم‌کرد.

بـگذارید ابتدا به مسئلهٔ هم جنسی ( *Parity* ) بپردازیم. حـالت مربـوط به‌سه جملهٔ فـرد مردود است، **چون مجموع دو عدد صحیح فرد زوج است**؛ درحالیکه بیش ازیك‌جملهٔ زوج نیزبه‌علت خواص‌عددهای‌اول قابل قبول نیست. بنابراین فقط یك جملهٔ زوج خواهیم داشت، وباقی می‌ماندکه ثابت‌کنیم آن جملهٔ زوج وترنیست. عکس‌مسئله را پذیرفته وفرض کنیم $x = ۲u + ۱$ ، $y = ۲v + ۱$ و $R = ۲W$ بـاشد. مقـادیرفوق را در دستور به‌جای خودشان بگذاریم بدست می‌آید:

$$۴\ (u^۲ + v^۲ + u + v) + ۲ = ۴W^۲$$

که با توجه به‌طرف راست‌که قابل قسمت بر۴ است وطرف چپ مضربی از ۴ نیست مردود است.

اینك چنین حدس‌زده شده است‌که فیثاغوریان می‌دانستندکه هر **عدد صحیح فرد می‌تواند برای یکی از اضلاع‌سه تائی اول به‌کار رود،** و در حالیکه‌به‌دنبال سه‌تائیهایی‌که دوعبارت آن **عددهای صحیح متوالی باشند** می‌گشتند، به‌این‌خاصیت پی پردند. این یك‌گمان محتمل است، زیرا اثبات قضیه درحیطهٔ‌دانش‌آن‌عصرقراردارد. اجازه بدهیدفرض‌کنیم‌که $y$ و $R$همان جمله‌های متوالی بـاشند، وفرض‌کنیم $y = ۲p$ و $R = ۲p + ۱$ باشد، در اینصورت مقادیرفوق را درمعـادلهٔ فیثاغورس گذارده و ازآن $x$ را بدست می‌آوریم، خواهیم داشت $x = \sqrt{۴p + ۱}$. اینك، **مجذور هرعدد فردی شکل** $۴p + ۱$ را خواهدداشت، ودرنتیجه‌می‌توان‌برای $x$ هرعددفردی را اختیارکرد. برای‌مثال؛ اگر $x = ۹$ باشد دراینصورت $x^۲ = ۸۱$ ودرنتیجه $p = ۲۰$ وبنابراین‌$y = ۴۰$ و $R = ۴۱$ خواهد بود، به‌طورکلی باگذاردن $x = ۲s + ۱$ سه‌تایی زیربدست می‌آید:

$$R=2s^2+2s+1 \text{ و } y=2s(s+1) ، x=2s+1 \qquad (۲-۹)$$

این سه تائیها به‌ازای همهٔ مقادیر پارامتر $s$ اولند **زیرا دو عدد صحیح متوالی نسبت به‌هم همیشه اولند.** وقتی $s$ ازیك تا بینهایت تغییر می‌کند، بینهایت مجموعهٔ متمایز از سه‌تائیهای اول بدست می‌آوریم.

ازطرف دیگر، افلاطونیها نسبت به‌سه تائیهائی که دوجملهٔ اول آنها عددهای صحیح متوالی و فردند توجه بیشتری داشتند. با روش قبل می‌توان نوشت:

$$x=2p-1 \qquad\qquad R=2p+1$$

و از آنجا $y=2\sqrt{2p}$ بدست‌می‌آید. نتیجه‌آنکه $2p$ بایدمجذورکامل باشد. به‌جای $2p$ مقدار $4s^2$ را می‌گذاریم وسه تائی زیر بدست می‌آید:

$$x=4s^2-1 \quad ، y=4s \quad ، R=4s^2+1 \quad (۳-۹)$$

و این دستگاه برای تمام مقادیر **پارامتری** اول است، زیرا **دو عدد صحیح فرد متوالی همیشه نسبت به هم اولند.** بنابراین هریك از جمله‌های تصاعد عددی زیر به‌یك دستگاه سه‌تائی وابسته است:

$$۴ ، ۸ ، ۱۲ ، ۱۶ ، ... ، ۴s ، ...$$

## ۴

فیبوناچی (*Fibonacci*) به‌دنبال آن بود تا نتایج قبلی را با تعیین سه‌تائتهای اول، که تفاوت بین وتر و ضلع زوج آن معین است، توسعه بخشد، و از آنجا کشف کرد که مسئله دارای جوابی نیست **مگر تفاوت مذکور خود مجذورکامل باشد.** این امر او را به‌این فکرراهنمون شدکه سه‌تائیهای فیثاغورسی را به‌وسیلهٔ **دوپارامتر** بیان‌کند، واین اندیشه، نقطهٔ عطفی درتاریخ مسئله به‌وجود آورد.

نام رسمی این ریاضیدان با قریحه اول قرن سیزدهم (شاید تنها اروپائی قرون وسطی‌که شایستهٔ چنین عنوانی است) لئوناردو(*Leonardo*) و اهل پیزا بود. پدرش کارمند جزء حمل و نقل و لقب «بوناچیو» (*Bonaccio*) را داشت که به‌اصطلاح آن زمان به‌معنای **آدم ساده‌لوح** است. از اینجا «فیبوناچی» به‌معنای **پسر آدم ساده لوح** است. همشهریان لئوناردو تنها به‌این ستایش و تعارف اکتفا نکردند: اوهم چنین *Bigollone* یعنی بی‌کله، نیزنامیده می‌شد. در مقابلهٔ مغرورانه با این اهانتها،لئوناردو هردو لقب را به‌جای نام مستعار خود به‌کار برد. عنوان لاتینی کتابی که افکار مذکوردرفوق، اولین‌بار، درآن ارائه‌گردید ممکن است به‌زبان‌لاتینی

جالب باشد، اما ترجمهٔ تحت‌اللفظی آن چنین است:

**«کتابی دربارهٔ معادلات درجهٔ دوم، نوشتهٔ لئوناردوی بی‌کله، پسر مرد ساده لوح پیزا».**

فیبوناچی اولین کسی بود که دستاوردهای یونان در هندسه و نظریهٔ عدد را باجبر اعراب وعددنویسی موضعی هندیها درآمیخت. در واقع اولین اثراو *Liber Abacus* باید به‌مثابهٔ کوششی درحمایت‌از **اصل موضعی بودن** تلقی گردد. کتاب در مزایای شیوهٔ جدید نسبت به‌عدد شماری سنتی رومی که‌درآن زمان‌هنوز به‌شکل همه‌جانبه‌ای مورد استفاده بود، به‌تمجیدفراوان پرداخته؛ و این امر از آنجا معلوم می‌شودکه در کتاب مثالهای فراوانی از زندگی تجارتی شکوفان آن دوران آورده شده است. او همچنین کتابی دربارهٔ هندسه نوشت و گرچه به‌گنجینهٔ میراث یونان چندان نیفزود، ولی دربه‌کار بردن جبربرای‌مسائل هندسی پیشتاز بود.

اما سهم‌عمدهٔ اوبه‌نظریهٔ عدد مربوط می‌شود. و هم‌او بودکه‌اندیشهٔ به‌وجود آوردن توالیهای حسابی را به‌وسیلهٔ آلگوریتمها ارائه داد. او بسیاری از اتحادهائی را که امروز با نام ویت، اولر یا لاگرانژ وابسته است می‌دانست و با استادی از آنها استفاده کرده است. درست است که بیان استدلالی اوگاهی اندکی به‌خطاآلوده است؛ با اینحال به‌طورکلی این براهین برای آن عصربه‌شکل قابل توجهی دقیق است.

## ۵

شکل واقعی برخورد فیبوناچی با قضیهٔ فیثاغورس چنین است:

اگر $y$ ضلع زوج یك سه تائی اول با وتر $R$ باشد، در اینصورت عددهای صحیح $R+y$ و $R-y$ نسبت به‌هم اولند، زیرا اگر آنها دارای مقسوم علیه مشترکی مانند $D$ باشند، در اینصورت $D$، هم مجموع آنها و هم تفاوت آنها را می‌شمارد. یعنی $۲R$ و $۲y$ قابل قسمت بر $D$ خواهند بود، و این غیرممکن است، زیرا $R$ و $y$ نسبت به‌هم اول فرض شده‌اند و $R+y$ و $R-y$ فردند. اینك لمی را به‌کمك می گیریم که علی‌رغم سادگیش نقش اساسی دربسیاری ازبحثهای مربوط به‌نظریهٔ عدد ایفامی‌کند:

اگر $A$، $B$، $C$،... عددهایی‌صحیح ومثبت باشندکه **مقسوم علیه مشترکی با یکدیگر نداشته باشند،** هرگاه

$$A.B.C\ldots = S^n \qquad (۴-۹)$$

باشد، **یعنی درصورتیکه حاصلضرب ایـن عددهای صحیح توان nام‌یك**

**عدد صحیح باشد، دراینصورت هریك ازعوامل مربوط، اصالتاً توان n ام یك عدد صحیح خواهند بود،** وازآنجا می‌توان نتیجه گرفت:

$$A = a^n \quad ، B = b^n \quad ، C = c^n \dots \qquad (۴'-۹)$$

که در آن $a$، $b$، $c$،... به نوبهٔ **خود عددهایی صحیح و نسبت به‌یکدیگر اولند.**

این مطلب را در معادلهٔ فیثاغورس به‌کار می‌بریم، خواهیم داشت:

$$(R+y)(R-y) = R^۲ - y^۲ = x^۲$$

ونتیجه می‌شودکه دوعدد صحیح $u$و$v$ وجود دارند به‌طوریکه

$$R+y = u^۲ \quad و \quad R - y = v^۲ \qquad (۵-۹)$$

وهرگاه اضلاع سه‌تائی باعبارتهای فوق بیان شوند به‌صورت زیردر می‌آیند:

$$x = uv \quad و \quad ۲y = u^۲ - v^۲ \quad و \quad ۲R = u^۲ + v^۲ \quad (۶-۹)$$

باتوجه به‌اینکه $u$ و$v$ فرداند، $u+v$ و$u-v$ زوج خواهند بود. از این مطلب می‌توان استفاده‌کرد ونوشت $u+v = ۲p$ $u-v = ۲q$.

که‌اگر آنرادر (۹-۶) قرار داده وساده‌کنیم معلوم می‌شود:

$$x = p^۲ - q^۲, y = ۲pq, \; R = p^۲ + q^۲ \qquad (۷-۹)$$

انتخاب بدون شرط و «اتفاقی» عددهای صحیح $p$ و $q$ ممکن است سه‌تائی فیثاغورسی را به‌وجود آورد، ولی این سه‌تائی الزاماً اول نخواهد بود مگر آنکه پارامترهای $p$ و$q$ **نسبت به‌یکدیگر اول وباگونه‌های متضاد باشند.**

در واقع، اگر $p$ و $q$ مقسوم علیه مشترکی مانند $D$ داشتند، در اینصورت $D$ می‌باید $x$ و $y$ و $R$ را نیز بشمارد. و اگر $q$ و $p$ هر دو فرد می‌بودند دراینصورت $p^۲ - q^۲$ و $p^۲ + q^۲$ می‌بایست زوج باشند، **بنابراین شرط لازم برای اول بودن یك سه تائی که با معادلات (۹-۷) نمایش داده شده آن است که‌یکی‌از پارامترها فردودیگری زوج‌ونسبت به‌یکدیگر اول باشند. این شرایط کافی نیز می‌باشند.**

## ۶

اهمیت واقعی شکل بررسی فیبوناچی آن است که قضیهٔ فیثاغورس رابه «دودرجهٔ آزادی» تبدیل می‌کند واینکار را به‌شکلی منحصر به‌فردانجام می‌دهد. از بیان این امر مقصود من آن است‌که هرگونه‌جواب اصلی‌معادلهٔ $x^۲ + y^۲ = R^۲$ را می‌توان برحسب دوعدد صحیح $p$ و $q$ بیان داشت که

عدد دوم نسبت به‌اولی، اول وازگونهٔ مخالف آن باشد.
رابطهٔ

$$R = q^{2} + p^{2} \qquad (۸-۹)$$

شیوه اصلی تنظم یافته‌ای از تشکیل سه تائی فیثاغورسی را به‌شکلی که درجدول آمده است ارائه می‌دهد:

و ترسه‌تائی‌های اول؛ $R = p^{2} + q^{2}$

| عددهای زوج مجذورکامل / عددهای فرد مجذورکامل | ۴ | ۱۶ | ۳۶ | ۶۴ | ۱۰۰ | ۱۴۴ | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ۱ | ۵ | ۱۷ | ۳۷ | ۶۵ | ۱۰۱ | ۱۴۵ | -- |
| ۹ | ۱۳ | ۲۵ | | ۷۳ | ۱۰۹ | | -- |
| ۲۵ | ۲۹ | ۴۱ | ۶۱ | ۸۹ | | ۱۶۹ | -- |
| ۴۹ | ۵۳ | ۶۵ | ۸۵ | ۱۱۳ | ۱۴۹ | ۱۹۳ | -- |
| ۸۱ | ۸۵ | ۹۷ | | ۱۴۵ | ۱۸۱ | | -- |
| ۱۲۱ | ۱۲۵ | ۱۳۷ | ۱۵۷ | ۱۸۵ | ۲۲۱ | ۲۶۵ | -- |
| . | . | . | . | . | . | . | |

هرعدد جدول از مجموع دوعدد فرد و زوج، که مجذورکامل‌اند، به وجودآمده وبنابراین‌وترهای سه‌تائی «خانه‌های سفید» از جمع مجذورهای کاملی‌که نسبت‌به‌هم اول نیستند به‌وجود آمده وبنابراین متناظرباجوابهای غیراول‌اند.

تاچه‌حد دانستن یکی از عدهای سه‌تائی اول تعیین‌کنندهٔ دوتای دیگر است؟ دستور اساسی قسمت قبل جواب این سئوال را به‌طریق زیر می‌دهد:

اول: هرعدد صحیح فرد حداقل یکی از اضلاع یك‌سه‌تایی اول‌است. درواقع، هرعدد صحیح فرد را می‌توان به‌شکل زیرنوشت:

$$n = a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} \ldots = A.B.C\ldots \qquad (۹-۹)$$

که در آن $A$، $B$، $C$،... عبارتند از عددهای صحیح فرد که دو به دو نسبت به‌هم اولند. به طور کلی چند راه وجود دارد که بدانوسیله می‌توان $n$ را به حاصل ضرب دوعدد صحیح مانند $M$ و $N$ که نسبت به‌هم اولند، تجزیه‌کرد. به‌جای هریك از عددهای چنین ترکیبی‌می-

توان‌نوشت $M=p+q$ و $N=p-q$ و از آنجا یك‌سه‌تائی معین بدست آورد. یك‌خاصیت‌مخصوصی‌وقتی است‌که $x=x\times ۱$ باشد و سه‌تائی راکه در قسمت ۳ ذکر آن رفت بدست‌آورد. دراین سه‌تائی ضلع زوج و **وتر دوعدد صحیح متوالی‌اند.**

دوم: هر گاه $y$ عددی صحیح و زوج؛ اما مضربی از ۴ نباشد، **در اینصورت جوابی برای معادلهٔ فیثاغورس وجود ندارد،از طرف‌دیگر هر مضربی از ۴ حداقل یك ضلع از دو سه تائی اول است.**
درواقع هرمضربی از ۴ رامی‌توان به‌شکل زیرنوشت

$$y=۲^{k}A.B.\ C...$$

از آنجا

$$pq=\frac{۱}{۲}y=۲^{k-۱}\,A.B.C...\qquad (۱۰\text{-}۹)$$

که از آنجا $k\geqslant ۲$ و $A$، $B$، $C$،... فرد و دوبه‌دو نسبت به‌یکدیگر اولند. اگر روش قبل را اجراکنیم به‌این نتیجه می‌رسیم‌که به‌طورکلی چند راه وجود دارد که می‌توان $\frac{۱}{۲}y$ را به حاصلضرب دوعامل اول نسبت به‌یکدیگر،که یکی از آنها زوج ودیگری فرد باشد، تبدیل‌کرد. در میان آنها همیشه انتخاب $p=\frac{۱}{۲}y$ و $q=۱$ وجود داردکه به‌دستهٔ افلاطونی،که در قسمت ۳ از آن بحث شد، منجر می‌شود و دو جملهٔ آن عددهای فرد متوالی‌اند؛ ضمناً یك انتخاب دیگر ممکن است:

$$p=۲^{k-۱}\quad \text{و}\quad q=A.B.\ C...$$

سوم: **تحت چه‌شرایطی عدد صحیح مفروض R وتریك‌سه‌تائی‌اول خواهد بود؟** می‌توان گفت‌که $R$ باید مجموع دومجذور کامل از گونه‌های متضاد،که نسبت‌به‌یکدیگر اولند، باشد؛ اما به‌معنای دیگر این همان‌چیزی است‌که دربارهٔ آن سئوال شده است. درواقع چگونه می‌توان به‌طور قطعی نشان دادکه عدد صحیح فرد مفروضی مانند $R$ به‌خصوص وقتی $R$ عددی است بزرگ، می‌تواند یا نمی‌تواند مجموع مجذورهای دو عدد صحیح باشد.

## ۸

جواب عملی به‌این سئوال قضیه‌ای بودکه فرما بدون ارائه برهان در نامه‌ای به‌پدر روحانی مرسن (*Mersenne*) که به سال ۱۶۴۰ نگاشت، بیان کرد. اثبات این قضیه در ۱۷۵۴ توسط اولر و پس از آن به

شکل ساده‌تر و همه جانبه‌تری توسط لاگرانژ، لژاندر (*Legendre*) و گوس انجام گرفت. این امر مآلاً به بررسیهای غیر منتظرهٔ مربوط **به خواص حسابی اشکال درجهٔ دوم** منجر گردید. با اینحال در این جا این مطلب مورد نظر نیست و به همین دلیل من بـه بیان قضیهٔ فرما و شرح مختصر کاربرد آن در مسئلهٔ فیثاغورس اکتفا می‌کنم.

قبل از هر چیز می‌دانیم که هرعدد فردیا از دستهٔ $۴n+۱$ است ویا از دسته $۴n+۳$، و بیان این مطلب به گونهٔ دیگر چنین است که هرگاه عدد فردی را به ۴ تقسیم کنیم **باقیماندهٔ** آن یا ۱ است ویا ۳. بعدا باید گفت هرعددی کـه **مجذور کامل وفرد است** الـزاماً از دستهٔ $۴n+۱$ خواهد بـود. زیـرا

$$(۲p+۱)^۲=۴p(p+۱)+۱=۴n+۱$$

حال اجازه بدهید هرعدد صحیحی راکه از مجموع دومجذور کامل به وجود آمده باشد باعبارت **دو مجذوری** مشخص کنیم؛ دراینصورت عددفرد دومجذوری همواره ازنوع $۴n+۱$ خواهد بود. زیرا مولفه‌های آن $p^۲$ و $q^۲$ دارایی گونه‌های متضادند. نتیجه آنکه هروترقابل قبول برای یك‌سه‌تائی اول از نوع $۴n+۱$ است، یعنی یکی از جمله‌های تصاعد عددی زیر خواهد بود:

۵، ۹، ۱۳، ۱۷، ۲۱، ۲۵، ۲۹، ۳۳، ۳۷، ۴۱، ۴۵، ۴۹، ۵۳، ۵۷، ۶۱، ۶۵، ... (۹-۱۱)

عددهایی که زیر آن خط کشیده شده است دومجذوری‌اند: دیده می‌شود که این عددهای صحیح یااولند، مانند۵، ۱۳، ۱۷، ۲۹، ویا **توانهائی از دومجذوری اول** مانند ۲۵، ۱۲۵، ۱۶۹. می‌بایست چنین بررسی تجربی، فرما را به کشف خود راهنمایی کرده باشد.

## ۹

قضیهٔ دومجذوری فرما را چنین می‌توان بیان کرد: **هـرعدداولـی از نوع $۴n+۱$ را می‌توان به مجموع دومجذور کامل تجزیه کرد واین تجزیه منحصر به فرد است.** برعکس، اگر معادلهٔ (۹-۱۲) $x^۲+y^۲=R^۲$ فقط دارای یك جواب برای $x$ و $y$ باشد، دراینصورت $R$ عددی است اول. بعلاوه هرگاه معادلهٔ (۹-۱۲) اصولا دارای جوابی باشد، در اینصورت $R$ یا **دومجذوری اول است، یا حاصل ضرب دو عدد اول دو مجذوری.** کاربرد این قضایا دربارهٔ مسئلهٔ فیثاغورس چنین است: **شرط لازم برای آن**

که یك عدد صحیح فرد R وتریك سه‌تائی اول باشد آن است که **تمام مقسوم‌علیه‌های اول R از نوع ۱+۴n باشند.** دراینجاشرط کافی‌نیزخواهد بود. بنابراین وترسه‌تایی‌اول **قابل قسمت** بر۳، ۷، ۱۱، ۱۹ یاهر عدداولی از نوع $۴n+۳$ نخواهد بود. این محدودیت در مورد اضلاع $x$ و$y$سه‌تایی صادق نیست. در واقـع، این و یا آن ضلع دیگر سه‌تایی باید مضربی از۳ باشد. ایـن امر نتیجهٔ مستقیـم معـادلهٔ (۹-۷) است که بر حسـب آن داریم:

$$xy = ۲pq\,(p^۲ - p^۲) \qquad (۹-۱۳)$$

زیرا، هرگاه $p$ مضربی از۳ نباشد، در اینصورت $p^۲$ ازدستهٔ $۳n+۱$ است؛ هرگاه نه $p$ ونه $q$ مضربی از ۳ نباشند، در اینصورت هم $p^۲$ و هم $q^۲$ از دستهٔ $۳n+۱$ خواهند بود و در نتیجه تفاضل آنها قابل تقسیم بر۳ است. در اینصورت $x\,y$ همیشه قابل تقسیم بر۳ و در نتیجه بر۱۲ نیزقابل قسمت خواهد بود.

از طرف‌دیگر، **وترR ممکن است** بر ۵ قابل‌قسمت‌باشد، دراینصورت یکی از جمله‌های **سه تائی اول** باید قابل قسمت بر ۵ باشد. در اینجا یك برهان «سرانگشتی» ارائه می‌گردد: **توان چهارم** هرعدد صحیح $p$ به‌صفرو یابه ۵ ختم می‌شود، اگر $p$ قابل قسمت بر۵ باشد؛ و به۱یا۶ختم می‌شود هرگاه $p$ به ۵ قابل قسمت نباشد. نتیجه آنکه هرگاه نه$p$ ونه $q$ مضربی‌از ۵ نباشند دراینصورت $p^۴$-$q^۴$به‌۵قابل قسمت است. بنابراین اگر ضلع‌زوج $y$ مضربی از ۵نباشد، در اینصورت حاصل ضرب $Rx$ قابل‌قسمت‌بر۵است. از ترکیب این خواص نتیجه می‌شودکه **حاصل ضرب سه جمله از یك سه تائی اول‌همیشه به‌۶ قابل قسمت است، حقیقتی‌که برفیبوناچی پوشیده نبود.**

## ۱۰

قضیهٔ فرما از نظر جنبه هـای رسمی خود چیزی جز تفسیری ازیك اتحاد جبری‌که به‌شکل «بیانی» به‌وسیلهٔ فیبوناچی به‌کار رفته است نیست؛ این اتحاد چنین است:

$$(p^۲ + q^۲)\,(p'^۲ + q')^۲ = (pp' + qq')^۲ + (pq' - p'q)^۲$$
$$= (pp' - qq')^۲ + (pq' + p'q)^۲ \quad (۹-۱۴)$$

که در حالت خاص وقتی $p' = p$ و $p' = q$ باشد به‌صورت زیر درمی‌آید

$$.(p^۲ + q^۲)^۲ = (p^۲ - q^۲)^۲ + (۲pq)^۲$$

عبارت مزبور توسط فیبوناچی جهت تأیید **سازگاری** با معادلات (۹-۷) به‌کار رفت. درعین حال اهمیت این اتحادها در **رسمی** بودن محض آنها است، ومنظور من آن است‌که آنها **نه‌تنها در مورد عددهای صحیح، بلکه در مورد کلیهٔ عناصری که از قوانین رسمی جبر تبعیت می‌کنند صادق‌اند.**

این اتحادها نمایانگر آنند که حاصلضرب هرعدد صحیح دو مجذوری خودیك دومجذوری، وبنابراین از نوع $۴n + ۱$ است. اما از طرف دیگر، هرعدد صحیح از نوع $۴n + ۱$ یك دو مجذوری نخواهد بود. معمای این مشکل در این‌امر نهفته‌است‌که حاصلضرب دو عدد صحیح از نوع $۴n + ۳$ از دستهٔ $۴n + ۱$ است. زیرا یك عدد صحیح فرد مانند $R$ برای آنکه دو مجذوری باشد باید شکل $۴n + ۱$ را دارا باشد؛ اما این شرط‌کافی نیست. کفایت شرط وقتی‌است‌که $R$ عددی اول نیز باشد، که همان قضیهٔ فرما است.

## ۱۱

هرگاه‌کسی مسئله را در پرتو امعان نظر به‌گذشته مورد توجه‌قرار دهد، آیا می‌تواند ادعا کندکه معادلهٔ فیثاغورس، پس از آنکه دو هزارو-پانصدسال کوشش ریاضیدانان طراز اول را باخوددرگیرکرد، بالاخره کاملاً حل شده است؟ جواب این سئوال به‌شکل مواجههٔ در برابر حل‌یك مسئله مربوط می‌شود. عدد فرد $R$ از دستهٔ $۴n + ۱$ مفروض است مسئله‌برسرآن است‌که مشخص شود آیا سه‌تائی اولی باوتر $R$ وجود دارد، و اگر چنین سه‌تائی موجود است، اضلاع آن‌کدامند. قضیهٔ فرما این سئوال را به‌تعیین مقسوم علیه‌های اول $R$ محدودکرده است ودر بادی امر به‌نظر می‌رسد که بدین ترتیب مسئله حل شده است. بدبختانه این یکی از مواردی است که با مهارت توسط ۱ا۱اتوستن به‌عبارت زیر بیان شده است: «جایگزینی امری پیچیده‌تر به‌جای موضوعی پیچیده». در حقیقت نه‌تنها مافاقد معیاری موثر برای بررسی **اول‌بودن** عددهای صحیح هستیم، بلکه وسائل عملی که در دسترس ماست چنان‌محدودندکه این‌وظیفه را وقتی اعداد از ۱،۰۰۰،۰۰۰ تجاوز کردند به‌شکلی غیر قابل تصور مشکل می‌سازند. برای نشان دادن مطلب آخر، مورد عدد ۱،۰۰۰،۰۰۹ رادرنظر بگیریم.

دریك مقاله‌که درسال۱۷۷۴ به‌چاپ رسید، اولراین عدد رادرفهرست عددهای اول قرار داده بود. در مقالهٔ بعدی اشتباه خود را تصحیح کردو مقسوم علیه‌های اول این عدد صحیح را تعیین‌کرد، ضمناً یادآوری نمودکه

اشتباه قبلی‌اش ناشی ازآن بوده است که‌او تصور میکرد **تجزیهٔ منحصر به‌فرد** عدد صحیح مورد بحث عبارتست از:

$$۱،۰۰۰،۰۰۹ \quad = ۱۰۰۰^۲ + ۳^۲ \qquad (a)$$

ولی اکنون کشف کرده‌است که این عدد رابه‌شکل دیگری هم‌می‌توان تجزیه کرد که عبارتست از:

$$۱،۰۰۰،۰۰۹ \quad = ۲۳۵^۲ + ۹۷۲^۲ \qquad (b)$$

که‌پرده ازخصلت مرکب بودن عدد برمی‌دارد.

سپس اولر بـه‌دنبال آن رفت تا مقسوم علیه‌های ۱،۰۰۰،۰۰۹ را با شیوه‌ای محاسبه کند که الگوی آن‌را برهان یکی ازقضایای فرما تشکیل می‌داد واو درمقالهٔ قبلی خود آن رابدین شکل بیان کرده بود: **هرگاه عدد صحیح R قابل تجزیه به بیش‌از یک دو مجذوری باشد، دراینصورت R عددی است مرکب.** مطلب جالب در مورد این شیوه آن است که نه‌تنها وجود مقسوم علیه‌هائی را ثابت می‌کند، بلکه امکان می‌دهد تاآنها را برحسب عناصر تجزیه‌های معین محاسبـه کنیـم. بدین ترتیب در حالـت مورد نظر، اولر معلوم کرد که

$$۱،۰۰۰،۰۰۹ \; = \; ۲۹۳ \times ۳۴۱۳ \qquad (c)$$

باتوجه به‌اینکه هردومقسوم علیه عددهایی اولند، تجزیهٔ دیگری‌وجود ندارد.

# فصل دهم

# هلالهای هیپوکرات

شاید گاهی چنین به‌نظر برسد که هندسه می‌تواند رهبری آنانیز رابرعهده گیرد، اما در حقیقت درجلوی آن فقط بمانند فانوس کشتی که چراغ فرا راه ارباب خود دارد، حرکت می‌کند.

جمز سیلوستر (James Silvester)

۱

این هیپوکرات نیز مانند هیپوکرات ( بقـراط ) پزشك، کـه سوگند نامه‌اش‌را پزشکان حتی به‌هنگام شکستن آن نیز محترم می‌شمارند، دراواسط قرن پنجم قبل از میلاد ظهورکرد. من باورندارم که این‌دو هرگزیکدیگررا دیده ویا از یکدیگر چیزی شنیده باشند. در واقع این نام درمیان یونانیان قدیم رایج بوده است.

ظاهراً یونانیان به‌نگهداری‌اسب و سوارکاری ارج می‌نهادند، و از آنجا«*Hippo*» یعنی اسب، به‌شکل‌پیشوند در هیپوکرات، هیپیاس، هیپارك ویابه‌شکل‌پسوند درفیلیپوس (*Philippus*)، اسپیوسیپوس (*Speusippus*) و گزانتیپه (*Xanthippe*) آمده است.

هیپوکرات هندسه‌دان از خیوس، جزیره‌ای که بیش از صد و شصت کیلومتر از ملطیه، زادگاه طالس فـاصله دارد، سر برآورد. در واقع قصهٔ زندگیش دربسیاری‌ازمواردبی‌شباهت‌به‌داستان‌زندگی طالس نیست. او نیز زندگی‌را ازتجارت‌آغازکردوبه‌تعلیم‌پایان داد؛ اونیزپس‌ازرسیدن به‌سن‌بلوغ دربارهٔرازهای‌عدد وبسط و توسعهٔ آن‌شروع به‌کارکرد. بااینحال مربیان‌اونه

راهبان، بلکه دنباله‌روان پرشور تعالیم فیثاغورس بودند که در آن زمان به‌صورت آئینی واقعی درآمده بود. زیرا چنین نقل شده است‌که هیپوکرات در دیداری از آتن به‌دسته‌ای از فیثاغوریان رسیدکه آنچه را دربارهٔ هندسه وحساب می‌دانستند بدو آموختند، و پس از آن که ثروت خود را از دست داد به‌فروش این رازهای ریاضی به‌هرکسی‌که بتواند وبخواهد بهای آن را بپردازد تن در داد، و بدین ترتیب به‌اعتماد مربیان خود خیانت ورزید؛ و این داد و ستد رذیلانه، خشم واقعی استادان قبلی اورا برانگیخت، که پس از آن دستاوردهایش را باسکوتی توهین‌آمیز ارزیابی‌کردند.

اما چگونه ثروتش را از دست داد؟ آری، یك روایت برآن است‌که کشتی او به‌وسیلهٔ دزدان دریایی در میان دریا غارت شد، اما ارسطو که هیچگاه فرصت را ازدست نمی‌داد تا داغ خود را علیه ریاضیدانان تازه‌کند دربارهٔ این واقعه روایتی چنین فریبنده دارد. او نوشته است‌که: «همه‌می‌دانندکسانیکه درزمینهٔ معینی برجسته وهوشمندند دراغلب زمینه‌های دیگر کودن وخرفت‌اند، از این‌رو هیپوکرات باتبحری‌که در هندسه داشت،چنان کودن وبیحال بود که یك مأمورگمرك بیزانطیوم (*Bizantium*) توانست ثروت اورا به‌یغما برد».

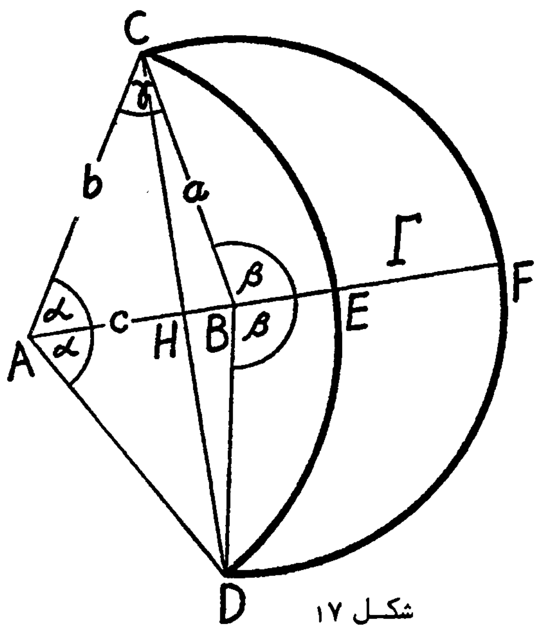
قلمروسهم‌او مسئله‌ای‌است قابل گفتگو، زیرا،در حالیکه‌فیثاغوریان کار اورا نفی می‌کنند، مخالفین آنها درست در قطب مخالف قرار دارند. بنا به‌گفتهٔ بعضی، اورساله‌ای دربارهٔ هندسه نگاشته‌که در نوع خودازطراز اول است، و در میان بسیاری از نوآوریها کاربرد حروف بزرگ را برای تعیین‌رأسهاونقطه‌های‌یك‌شکل‌هندسی به‌کارگرفته‌است. ازکتاب درسی‌مزبور اثری باقی نمانده است، اما فن توضیح یك شکل به‌وسیلهٔ قرار دادن حروف درنقطه‌های اصلی، ازآن به‌بعد همگانی شده است.

تبدیل معمای دلیان به‌**قرار دادن میانگین متناسب بین یك قطعه و دوبرابر آن** را ارا‌توستن به‌او نسبت‌می‌دهد. وازهمین‌طریق بوده‌است‌که‌راه برای همهٔ اشکال بعدی حل مسئله هموار شده است. برخی ادعا می‌کنندکه او اولین کسی بودکه ثابت‌کرد سطح دایره برابر است بامثلثی باقاعده‌ای برابر محیط دایره و ارتفاعی مساوی باشعاع آن، و بدین ترتیب مسئلهٔ **تربیع** دایره به **اصلاح** محیط آن تبدیل می‌گردد. دیگران پارافراتر نهاده ومدعی‌اندکه او اولین‌کسی بودکه این اندیشه‌را که سطح محصور در یك منحنی حد چند ضلعی متغیری است‌که در داخل این منحنی محاط شده باشد ارائه داد، واین اندیشه درآن عصر دورهٔ جدیدی را آغازکرد.

تاچه اندازه این گفته‌ها باواقعیت یکی است وچه مقدار آن خیالبافی است، برما پوشیده است. بنابراین اجازه بدهید که دربارهٔ یکی ازدستاوردهای او که دوست و دشمن متفقاً دربارهٔ آن سکه را به‌نام اوزده‌اند، یعنی هلالهای هیپوکرات گفتگو کنیم.

## ۲

اگر کلیتر صحبت کنیم، یك هلال ویا ماه قسمتی از صفحه است که به وسیلهٔ دوقوس دایره محدود شده باشد. بااینحال در آنچه که می‌آید مافقط دربارهٔ حالتی که هر دو قوس در یکطرف وتر مشترك خود، مانند $CD$ در شکل ۱۷ قرارگرفته باشند گفتگو می کنیم. **محور تقارن** هلال. یا آنطور که یونانیان می‌نامیدند، **منیسکوس** (*Meniscos*)، از دومرکز، یعنی $A$ و $B$ وازنقطه‌های وسط قوسها که همان $E$ و $F$ باشد می‌گذرد. درواقع، هلال به‌وسیلهٔ مثلث $ABC$ کاملاً مشخص می شود؛ بنابراین قدم در تربیع هلال، بیان سطح آن بر حسب عناصر متشکلهٔ مثلث فوق خواهد بود. اما هیپوکرات چنین کاری نکرد؛ و حتی اگر می‌خواست نمی‌توانست و اگر هم




شکل ۱۷

می‌توانست نمی‌خواست.

اولا: ارتباط بین سطح هلال وعناصر مثلث مفاهیمی را دربردارد که خارج ازدید هندسهٔ کلاسیک است. درحقیقت، اگر سطح هلال‌را با $\Gamma$ نشان دهیم وسطح چهار ضلعی $ABCD$ رابا $\Delta$ و شعاعهای دایره‌ها را با $a$ و $b$ و زاویه‌های مرکزی‌که حاوی دوقوس‌هلال‌اند با $\alpha$۲و $\beta$ ۲، دراینصورت بـابررسی مستقیم شکل، رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\Gamma + \text{قطعهٔ}\ CADEC = \Delta + \text{قطعهٔ}\ CBDF$$

از اینجا، این فرمول بدست می‌آید:

$$\Gamma = \Delta + (a^2\beta - b^2\alpha) = ab\sin(\beta-\alpha) + (a^2\beta - b^2\alpha) \quad (۱-۱۰)$$

فرمولی‌که نه‌تنها شامل توابع مثلثاتی $\alpha$ و $\beta$ بلکه متضمن خود این زاویه‌ها نیزمی‌باشد.

بدین ترتیب، چنین ملاحظاتـی از زاویه سنجـی دور از دانش عصر هیپوکراتی بوده است.

۳

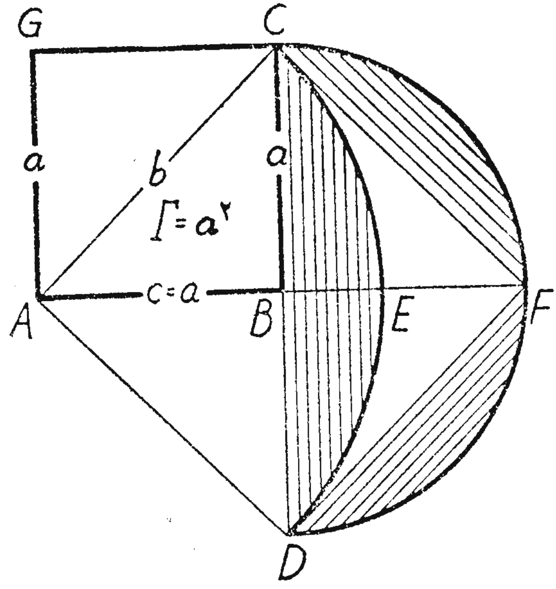
ثانیاً، توجه هیپوکرات به‌هلال غیر مشخص نبود، بلکه حالتی خاص از آنرا که به هلال **قابل‌تربیع** مشهـور است مورد نظر قرار داد. دقیقتر بگوئیم، قسمتی محصـور از یك صفحه وقتی قابـل تربیع است‌که بتوان مربعی هم سطح باآن توسط خط‌کش و پرگار ساخت، هر متوازی‌الاضلاعی قابل تربیع است، زیرا می‌توان آنرا به‌مستطیلی هم سطح، که‌آن نیزبه‌نوبهٔ خود قابل تبدیل به‌مربعی هم سطح است تبدیل کرد، به‌طوریکه ضلع آن ذات وسط وطرفین ضلعهای مستطیل است. همین امربرای مثلث هم صادق است، ازآن نتیجه می‌شودکه **سطح محصور به‌وسیلهٔ یك چند ضلعی به‌طور کلی قابل تربیع است به‌شرط آنکـه خود چند ضلعی را بتوان توسط اعمالی باخط‌کش وپرگار به‌وجود آورد.**

**مثـال دیگـر از سطح قابـل تـربیع قطعه‌ای از سهمـی است،** یعنی ناحیه‌ای که توسط قوسی از سهمی و خطی‌که دوانتهای این قطعه را به‌یکدیگرمتصل‌می‌کند به‌وجودمی‌آید؛ زیرا طبق قضیهٔ مشهور ارشمیدس، **سطح قطعه‌ای ازسهمی برابر است بادوسوم سطح مثلث محصوربه‌وسیلهٔ و ترومماسهای وارد بر سهمی.** مثال برای‌سطح **غیر قابل تربیع**عبارتست از خود دایره، یاهر قطعه و یـا قطاع متعلق به‌آن‌که قابل ترسیم به‌وسیلهٔ خط‌کش وپرگار است.

بنابراین، وجود هلال قابل تربیع به‌هیچوجه امر روشنی نیست. با با اینحال. یك چنین هلالی در شکل ۱۸ نشان داده شده است، و سادگی بیش ازحد آن نمایانگر آن است که قبل ازهیپوکرات نیز ازوجودآن آگاهی داشته‌اند؛ زیرا آنچه ما می‌دانیم اینست که این هلال می‌توانست به‌مثابهٔ نقطهٔ عزیمتی در بررسیهای او به‌کار آید. در اینجا قوس بیرونی یك‌نیمدایره است وقوس درونی یك ربع دایره. یك بررسی مستقیم شکل نشان می‌دهد که سطح هلال‌برابراست با $\Gamma = a^2$ که درآن $a$ شعاع قوس بیرونی‌است.

۴

برخی تاریخ نویسان بر این عقیده‌اند که هیپوکرات تصور می‌کرد تعداد هلالهای قابل تربیع بینهایت‌اند. به‌نظر من‌شواهدمویداین عقیده، ناچیز است؛ و حتی‌ناچیزتر از آن، ادعای بی‌دلیل و طعنه‌آمیز ارسطواست دایر بر اینکه هیپوکرات هلالهای خود را تعمداً به خاطر **تربیع دایره** اختراع کرده است. از طرف دیگر، کاملاً ممکن است که هیپوکرات امکان تربیع دایره‌را نفی نکرده باشد و هلالها رابرای‌نشان دادن اینکه‌اشکال‌خطی ومستدیر می‌توانند دارای سطوح مساوی باشند به‌کار برده باشد. این امر




شکل ۱۸

می‌تواند مبین آن باشد که چرا هیپوکرات به‌بررسی حالت خاصی از هلال، که از این به‌بعد نام آنرا هلال هیپوکرات می‌گذاریم، خود را محدودکرده است. **شرایط زیر دراین هلالهای‌مخصوص‌صادق‌اند:**

اول، قطاعهای $ACED$ و $BCFD$ (شکل ۱۷)، که ازدوقوس هلال ایجاد می‌شوند **از نظر سطح بایکدیگر برابرند؛** ودوم، **زاویه‌های مرکزی این قطاعها قابل سنجش‌اند.**

شرط اول با علامت گذاری کـه در فرمول (۱-۱۰) به‌کار رفته به رابطهٔ زیر منجر می‌شود

$$a^2\beta = b^2\alpha \qquad (۲-۱۰)$$

که از آن نتیجه می‌شود:

$$\Gamma = \Delta \qquad (۳-۱۰)$$

یعنی: **سطح‌هلال‌هیپوکرات‌برابراست‌باسطح چهارضلعی محصور به وسیلهٔ چهار شعاعی‌که از «نوك شاخهای» هلال می‌گذرند.** بنابراین چنین هلالی **قابل تربیع‌است، هرگاه وتنهاهرگاه، مثلث ABC توسط‌خط‌کش و پرگار قابل‌ترسیم باشد. با به‌کار بردن قانون سینوسها در مثلث ABC، معادلهٔ زیربدست می‌آید:**

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \qquad (۴-۱۰)$$

با اینحال، این توضیح، مسئلهٔ تربیـع راحل نمی‌کند؛ برعکس فقط مشکل را پررنگ‌تر و برجسته‌تر می‌سازد. مطلب از این قرار است: آیـا می‌توان $\sin\alpha$ و$\sin\beta$ رابرحسب عددهای‌گویا وگنگ درجهٔ‌دوم بیان‌کرد؟ این سئوالی هندسی و یا جبری، ویا حتی سئوالی در میدان آنالیز، نیست؛ ایـن مسئله‌ای در مقیاس حساب متعالی و غیر جبری است؛ میدانی از ریاضیات مملو از سئوالاتی‌که پیشتازترین مغزهای یکی دوقرن اخیر را به مبارزه‌طلبیده‌است. پاره‌ای‌ازآنها، مانندخصلت غیرجبری عددهای$\pi$و$e$نتایج موفقیت‌آمیزی بدست‌داده‌اند. بااینحال، حل مشکلات این‌دوعددچنان‌نبوده است‌که شیوه‌هائی عمومی جهت حمله به‌مسایل خویشاوند آنهارا به‌وجود آورد. درحقیقت می‌توان به‌طورمسلم اظهار داشت‌که حساب‌غیرجبری‌بیش از سایر شاخه‌های ریاضیات مشکلات حل نشده وحدسیات‌ثابت نشده دارد.

**۵**

اینك فرض‌کنیم‌که زاویه‌های $\alpha$و$\beta$ قابل‌سنجش باشند. این بدان‌معنی

است که عددهای صحیحی مانند $p$ و $q$ وجود دارند به‌طوریکه

$$\frac{\alpha}{p}=\frac{\beta}{q} \text{ یا } \alpha=p\omega \text{ و } \beta=q\omega \quad (۵\text{-}۱۰)$$

و یا

که هرگاه این مقادیر را در (۱۰-۴) بگذاریم خواهیم داشت:

$$q\sin^{2}p\omega = P\sin^{2}q\omega \qquad (۶\text{-}۱۰)$$

رابطهٔ اخیر را می‌توان به‌مثابهٔ معادله‌ای که بیان کنندهٔ همهٔ **هلالیهای هیپوکرات** است ارزیابی کرد، چه‌این هلالها قابل تربیع باشندو چه نباشند. عددهای صحیح $p$ و $q$ را بدون از دست دادن عمومیت‌می‌توان نسبت به‌هم اول درنظر گرفت، یعنی‌زاویهٔ $\omega$ را **به‌عنوان بزرگترین اندازهٔ مشترک** $\alpha$ و $\beta$ قبول کرد. شکل‌هلال هیپوکرات فقط به $p$ و $q$ بستگی دارد، از این‌رو من هلال را با علامت ($p$ و $q$) نشان خواهم داد. که در آن $q$ بزرگترین این‌دو است.

معادلهٔ (۱۰-۶) فقط در شکل ظاهری خود فوق جبری است. در حقیقت خواهیم دیدکه می‌توان آنرا بادستکاری مختصری به‌معادلهٔ‌معمولی ازدرجهٔ $q$-۱ تبدیل کرد. هرگاه‌این معادلهٔ نهائی‌ریشه‌ای گویا بپذیردیا ریشه‌ای قبول کندکه‌قابل بیان به‌عبارت **درجهٔ دوم گنگ** شامل‌عددهای گویا باشد، در اینصورت‌هلال**قابل تربیع** است. اگر چنین ریشهٔ «قابل‌قبولی» وجود نداشته‌باشد، در اینصورت هلال غیر قابل تربیع است.

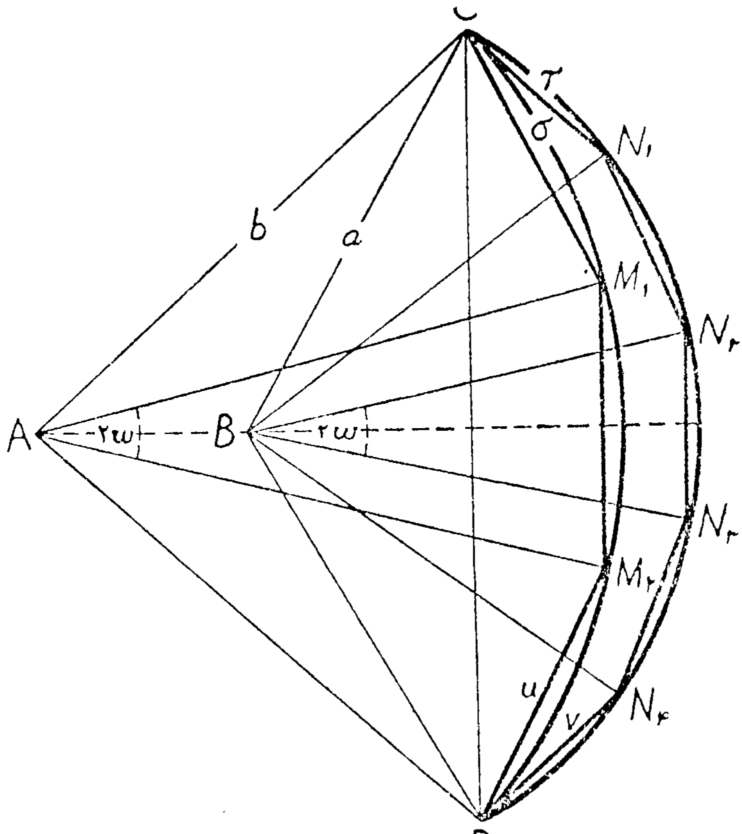
## ۶

چگونه هیپوکرات از عهدهٔ‌این مشگلات برآمد؟ در ابتدای کارچگونه دچار اشتباه ولغزش شد؟ چه‌چیزی او را برای دنبال کردن مسئله ترغیب کرد؟ آیا او می‌دانست که هلال قابل تربیع برای $q=۵$ موجود و برای $q=۴$ وجود ندارد؟ آیا آنطور کـه پـاره‌ای مفسرین اصرار دارند، او به‌وجود تعدادی نامحدود هلال قابل تربیع معتقـد بود؟ آیا او مسئله را به‌آنچه‌که ما امروز هلالهای «جبری» می‌نامیم محدودکرده بود، چون‌درك كرده بودكه‌كليه هلالهای ديگر غير قابل تربيع‌اند، یاآنکه انگیزهٔ او فقط مقتضیات روز بود؟ برای پاره‌ای از این نکات هیچگونه اطلاعی در دست نیست، برای پاره‌ای‌دیگر آگاهی ما چیزهای مبهم واغلب مغایر بایکدیگر است، وبا توجه به‌اینکه اولین توضیحات دربارهٔ هیپوکرات چند قرن پس از مرگ اونوشته شده، تعجب‌آور نیست. اما جهت تنقیح هراثر بایدباشدت به‌دانش وروح زمانی‌که آن اثر درآن ظاهر شده است متوسل شد. بااینحال

در مورد هیپوکرات آگاهی ما از بصیرت آن دوران اندك است، و تازه آن مقدار کوچکی هم که اطلاع داریم غالباً از تحقیقات نظری ما دربارهٔ دستاوردهای او مایه گرفته است. در حقیقت این یك دور تسلسل است!وبا اینحال شیوه‌های هیپوکراتی در درك ریاضیات یونان چنان واجد اهمیت است که من تصمیم گرفتم از خطر احیای سهم او در این باره استقبال کنم.

## ۷

هیپوکرات اساس استدلال وترسیمهای خود را برپایهٔ قضایای مربوط به‌قطعات **متشابه** قرار داد. این عبارت امروز به‌ندرت به‌کار می‌رود، امادر تفکرات و تحقیقات مربوط به‌یونان در زمینهٔ تربیع دایره کاملاً نقش عمده برعهده‌داشته‌است. یك **قطعهٔمستدیر** به‌طورکامل‌توسط شعاع و **زاویه‌ای** که تحت آن وتر مربوطه از مرکز دایره دیده می‌شود ، مشخص می گردد. هرگاه دو قطعهٔ مستدیردارای شعاعهای مساوی و زاویه‌های مرکزی‌برابر باشند، آن دوقطعه **همنشت** یا *Congruent* خواهند بود. ازطرف دیگر هر گاه این دوقطعه دارای زاویه‌های مرکزی متساوی و شعاعهای نا برابر باشند، آنها رامتشابه می‌خوانند. این‌توضیحات‌تعاریفی بیش به‌نظرنمی‌رسند ولی ارزش آنها بیش از یك تعریف است. در حقیقت تعمیم همنهشتی و تشابه از اشکال خطی به‌اشکال غیرخطی و منحنی ــکه ضمناً این‌امربه‌خود **هیپوکرات** نسبت داده می‌شود ـ از راه یك **روند بینهایت** انجام می گیرد، بدین شکل‌که قوس یك منحنی به‌مثابه حد محیط متغیر مربوط به‌چند ضلعی درنظرگرفته می‌شود. بدین اعتبار جنبهٔ **شریك تشابه** ،که ازقضیهٔ مثلثهای متشابه ناشی شده و برای چند ضلعیها نیز تعمیم یافته بود، اعتبارش‌برای شکل بندیهای منحنی الخط مورد قبول قرار می‌گیرد. یکی از مواردمورد گفتگوقطعهٔ مستدیر است؛ قوسهای‌دوقطعهٔ متشابه باوترهایشان‌متناسب‌اند، در حالیکه **سطوح قطعات متشابه متناسب با مربعهای بنا شده برروی وترها تغییر می‌کند.** اینك هلالی ازنوع **قابل سنجش** را در نظر بگیریم. مانند قبل زاویه‌های مرکزی را $2\alpha$ و$2\beta$ و مقیاس مشترك آنها $2\omega$ بنامیم و بدین ترتیب مانند گذشته $\alpha = p\omega$ و $\beta = q\omega$ فرض شوند. **هیپوکرات** کار را از اینجا شروع کردکه قوس داخلی رابه $p$ قسمت مساوی‌تقسیم کرد و انتهای تقسیمات را توسط وترهائی به‌یکدیگر وصل نمود و با این روش دستگاهی از قطعات همنهشت به‌وجود آوردکه هریك از آنها دارای شعاع



شکل ۱۹

$a$ و زاویهٔ مرکزی ۲ω هستند (شکل ۱۹). او همین روش را برای قوس بیرونی به‌کار برد و دستگاهی از $q$ قطعهٔ همنهشت‌که هریک‌دارای شعاع $b$ و زاویهٔ مرکزی ۲ω بودند تشکیل داد. روشن است‌که دستگاه اول خارج هلال قرار داشت واثبات آنکه‌دستگاه دوم کاملاً **داخل هلال** قراردارد کارمشکلی‌نیست. بعلاوه هرقطعه‌ای ازدستگاه اول‌باهرقطعه‌از دستگاه دوم متشابه است، بنابراین اگر وترهای متناظر دودستگاه را با $u$ و $v$ وسطوح قطعات متناظر را با σ و τ نمایش دهیم، دراین صورت بامقدمه‌ای که در بالاذکرشد، خواهیم داشت:

$$\sigma:\tau = u^{۲}:v^{۲} \ \ldots \qquad (۷-۱۰)$$

قدم بعدی در استدلال هیپوکراتی چنین است: درمیان بینهایت نوع از هلالهای متوالـی، تعدادی یافت می‌شوند کـه برای‌آنها دو دستگاه از قطعات دارای یك سطح‌اند، به‌عبارت دیگر

$$p\sigma = q\tau \qquad (۸-۱۰)$$

اگر $\Gamma$ هلالی باشدکه از خاصیت بالا برخوردار است، در اینصورت با حذف دستگاه قطعات دوم از هلال و اضافه‌کردن دستگاه قطعات اول به آن، **چند ضلعی بسته‌ای‌که سطح آن برابربا هلال است تشکیل می‌شود. در اینصورت هلال قابل تربیع است اگر چند ضلعی قابل تربیع باشد، و چند ضلعی قابل تربیع است هرگاه ترسیم آن توسط خط‌کش‌وپرگار** عملی باشد. (به‌شکل ۱۹ راجعه شود)

دراینجاترسیم‌هلال $(q\ ،\ p)$ به‌ترسیم چند ضلعی با $q+p$ ضلع منجر می‌شود. البته چند ضلعی دارای محیطی مخصوص است. قسمت خارجی‌آن از $q$ ضلع متساوی هر یك به‌طول $u$ و محاط در دایره‌ای به‌شعاع $a$ ؛ و قسمت داخلی بااضلاعی‌که هر کدام برابر $v$ و محاط در دایره‌ای به‌شعاع $b$ تشکیـل شده است. اضـلاع $u$ و $v$ به‌وسیلهٔ رابطـهٔ زیـر بـه‌یکدیگـر وابسته‌اند:

$$u : v = \sqrt{q} : \sqrt{p} \qquad (۹-۱۰)$$

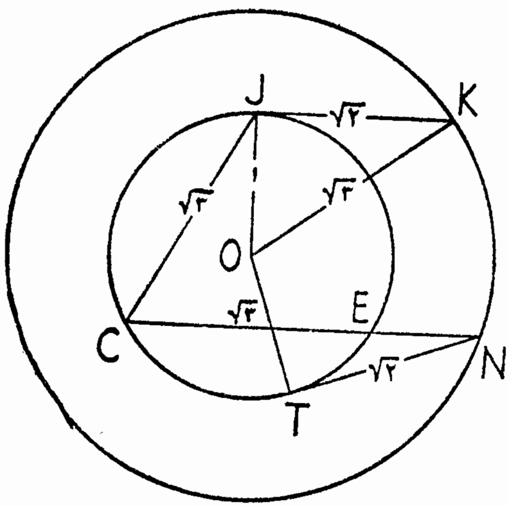
به‌سهولت می توان نشان دادکه چنین چند ضلعهای «هیپوکراتی» برای‌کلیهٔ مقادیر صحیح $p$ و $q$ «وجود دارند». اما این مصادره به‌مطلوب است. مسئله این است‌که **آیا چند ضلعی وابسته به هلال** $(q,\ p)$ **قابل تربیع است؟ به‌عبارت دیگرآیا می‌توان آنراتوسط خط‌کش وپرگار ترسیم کرد؟**

در حقیقت، سطح چند ضلعی هیپوکراتی برابر است با سطح $\Delta$ از چهار ضلعی $ACBD$ که در قسمت چهارم این فصل ملاحظه‌گردید. زیرا با توجه به‌نسبتها داریم:

$$\alpha:\beta = p:q \quad \text{و} \quad u:v = a:b$$

شرط (۱۰-۹) هم از راست با $b^2\alpha = a^2\beta$، وبه‌طوریکه معلوم‌است مستلزم تساوی $\Delta = \Gamma$ است. بنابراین **چند ضلعی هیپوکراتی قابل‌ترسیم به‌وسیلهٔ خط‌کش و پرگار است، هرگاه برای چهار ضلعی مزبور چنین کاری انجام شدنی باشد، وبالعکس.**

از طرف دیگر گرچه این‌دو معیار قابلیت تربیع از جنبهٔ نظری دارای یك ارزش‌اند، شیوه‌های عملی ساختمان هر یك از آنها چندان مشابهتی با یکدیگر ندارند. به نظر می رسد برای کسی که تمام وسائل جبر رسمی را درسر انگشت خود دارد و با یك حرکت دست از یك دستاورد به‌دستاورد دیگری‌می‌رسد، این مسئله‌بی‌اهمیت جلوه‌کند. اما برای هندسه‌دان‌کلاسیك که وسیله‌ای برای **روابط متریك** به‌جز زبان پرزحمت **جبر ترسیمی**ندارد انتخاب شیوه مسئله‌ای نبوده است‌که تنها مربوط به‌ذوق درریاضیات‌باشد.
یکی از موارد مورد نظر **معادلهٔ درجه‌دوم** ، یابهتر گفته شود هم ارز کلاسیك‌آن بود: دستگاهی‌از معادلات که نوع متداول آن‌عبارت است از:




شکـل ۲۰

$$x+y=a،xy=c^{۲} \text{ و } x-y=b,xy=c^{۲} \quad (۱۰\text{-}۱۰)$$

که البته در آن $a$، $b$ و $c$ به‌عنوان قطعه خطهای مستقیم مفروضی در نظر گرفته شده‌اند. راه‌حلهای ترسیمی این دومسئله اساسی در شکل ۲۰ نشان داده شده است؛ **ذات‌وسط وطرفین برای دوقطعه،کلید ترسیم‌هردومسئله است.** امروز اینکار برای ما چیزی جز یك عمل حسابی ساده نیست، اما ریاضیدانان یونان به‌آن به‌مثابهٔ مسئلهٔ مهم هندسی می‌نگریستندوروشهای مختلفی برای رسیدن بـه‌آن ثبت‌کرده بودند.
یکی از این تدابیرکه برپایهٔ قضیه‌ای بودکه هندسه‌دانان یونان‌برای

آن اهمیتی به‌سزا قائل بودند، در شکل ۲۰، و **برای‌حل ترسیمی‌معادلات دو مجهولی زیر**

$$x-y=\sqrt{۳}, \qquad xy=۲ \qquad (۱۰\text{-}۱۱)$$

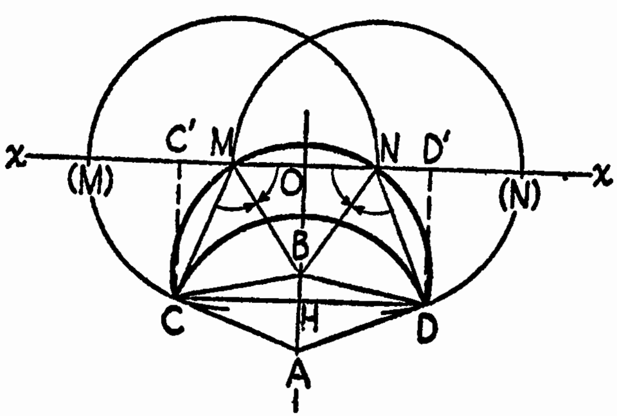
به‌کار برده شده است و به‌طوریکـه خواهیم دید در ساختمان هلالهائـی از دستهٔ (۲و۳) وارد می‌شود. قضیهٔ مورد بحث را می‌توان به‌صورت زیر بیان‌کرد: **طول مماس وارد از یك نقطه بردایره باتمام طول قاطعی‌که از این نقطه بردایره می‌گذرد و قسمت بیرونی آن، نسبت ذات وسط و طرفین دارد** بدین ترتیب درشکل۲۰:

$$NT^{۲}= NC.NE$$

در ایـن شکل $CF$ ضلع مثلثی متساوی‌الاضلاع محاط در دایره‌ای به‌شعاع واحد است، به‌عبارت دیگر $CE=\sqrt{۳}$. دایرهٔ متحدالمرکزبزرگتر دارای شعاع $\sqrt{۳}$ و مماسِ وارد بردایره از نقطهٔ دلخواه $K$ واقع بر روی دایرهٔ بزرگتر دارای طولی برابر $\sqrt{۲}$ است، نتیجه آنکه قطعات $NC$ و $NE$ جواب ترسیمی معادلات (۱۰-۱۱) خواهند بود.

## ۱۰

برای هلال از نـوع (۱ و ۳) چند ضلعی هیپـوکراتی عبارت از **ذوذنقه** ایست‌که طول سه‌ضلع‌آن برابر یکدیگراست. اگر این طول‌را $u$، و $u$ را برابر یك فرض‌کنیم در نتیجه ضلع چهارم برابر است با$v=\sqrt{۳}$. یا به




شکـل ۲۱

طوریکه هیپوکرات می‌بایست استدلال کرده باشد، نسبت **ضلع بزرگتر از ذوذنقه به‌ضلع کوچکتر آن برابر است با نسبت ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع به‌شعاع دایره‌ای که این مثلث درآن محاط است.**

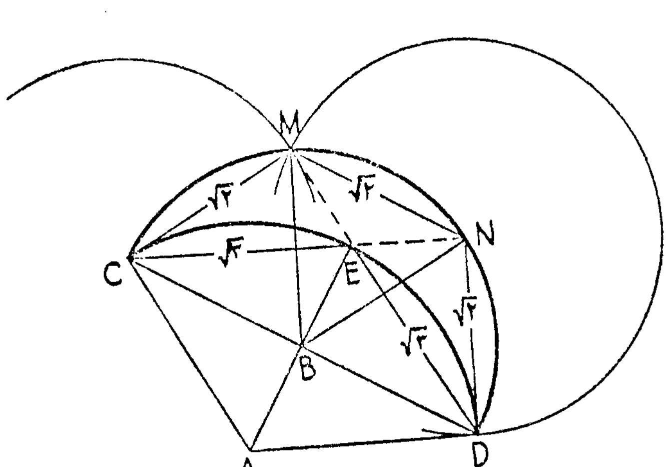
بدین ترتیب ترسیم هلال (۱و۳) سرراست وساده است. (شکل ۲۱) برروی محور حامل $x$ $x$ نقاط زیر را بدین‌ترتیب انتخاب‌می‌کنیم:

$MN = ۱$ و $C'D' = \sqrt{۳}$؛ به‌مراکز $M$ و$N$ دو دایره باشعاع واحد رسم می‌نمائیم. خطوط‌قائم صادره ازمحور $x$ $x$ درنقاط $C'$ و$D'$ این دودایره را دررأسهای $C$و$D$ ازذوذنقهٔ مورد نظر قطع می‌کنند. برای تعیین مرکز $B$ ازهلال، منصف‌الزاویهٔ $M$ را رسم کرده و برای تعیین مرکز $A$، عمود $CA$ را بر$CM$ واردمی‌کنیم.

برای‌هلال ازدستهٔ (۲ و ۳) **پنج‌ضلعی** مربوطه‌نوعی **ذوذنقهٔ ناقص و بی سرو ته است**: $CEDNMC$ درشکل ۲۲. درواقع با بررسی زاویه‌های این شکل بندی، چنین بدست می‌آید که اضلاع شاخهٔ داخلی $CE$ و $DE$ راکه امتداد دهیم ازراههای $N$ و $M$ شاخهٔ‌خارجی می‌گذرند. همین بررسی نشان می‌دهدکه اضلاع $CM$ و $DN$ ازشاخهٔ بیرونی مماس برقوس داخلی‌هلال‌اند. از طرف دیگر،باتوجه به(۱۰-۹)داریم $u : v = \sqrt{۲} : \sqrt{۳}$ دراینصورت اگر درنظربگیریم‌که $u = \sqrt{۲}$ و $v = \sqrt{۳}$ است معلوم می‌شود:

$$\overline{CN} - \overline{EN} = \overline{CE} = \sqrt{۳} \; ; \; \overline{CN} \;.\; \overline{EN} = \overline{ND}^{۲} = ۲ \qquad (۱۱-۱۰)$$

بدین‌ترتیب به‌معادلات چند مجهوله‌ای‌که درقسمت قبل ازآن گفتگو




شکل ۲۲

کردیم و به‌راه حل ترسیمی که درشکل ۲۰ داده شده می‌رسیم. درشکل ۲۲ ترتیب مراحل کار چنین است:

(۱) وضع نقـاط $C$ ، $E$ و $N$ را اختیار می‌کنیم، (۲) بقیهٔ رأسهای $M$ و $D$ را معین می‌کنیم، (۳) مرکز $D$ برای قوس بیرونی محل تقـاطع منصف‌الزاویه‌هـای عمود برقطرهـای $CN$ و $DM$ از ذوزنقه است، (۴) مرکز $A$ مربوط به‌قوس داخلی‌هلال به‌وسیلهٔ ترسیم خطوط عمود بر $CM$ و $DN$ بدست می‌آید.

دراینجا بازسازی اشکال ۲۰ ، ۲۱ و ۲۲ فقط برای امعان نظر ارائه می‌شود. این بازسازیها مبتنی براطلاع موثق از روشهای خود هیپوکرات نیستند، چنان بازسازیهـای فراوان دیگری هم‌که درظرف بیست و دو قرن فاصله میان دو دوره ارائه شده‌اند بر معلومـات مسلمی اتکا ندارند. آنچه من می‌توانم بـرای حدس وگمـان خود ادعاکنم آن است‌که این حدس و گمان از دایرهٔ دانش زمان حل مسائل ـ به‌آن صورت‌که من آن را تصور میکنم ـ بیرون نیست.

## ۱۱

برگردیم به‌تحلیل جبری مسئلهٔ هیپوکراتی، ومن‌رابطهٔ (۱۰-۴) را که درفصل ۴ بیان شده است به‌عنوان رابطهٔ معرف در نظرمی‌گیرم:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$$

**دستهٔ (۲و۱)**: دراینجا $\beta=2\alpha$ است. ازاین‌رو $\sin 2\alpha=\sqrt{2}\,\sin\alpha$.

بـا حذف ریشهٔ «بی‌معنی» $\sin\alpha=0$ به $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$ می‌رسیم. بنابراین $\alpha=45^\circ$ و $\beta=90^\circ$ است. این همـان هلالی است‌که درقسمت ۴ مورد بحث قرارگرفت ودرشکل ۱۸ نشان داده شد.

**دستهٔ (۱ و ۳)** : در اینجا $\beta=3\alpha$ و $\sin 3\alpha=\sqrt{3}\,\sin\alpha$. به‌جای $\sin 3\alpha$ می گذاریم $3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$. مـانند حالت قبل ازجواب « بی‌معنی» چشم‌پوشی می کنیم وخواهیم‌داشت $\sin\alpha=\frac{1}{2}\sqrt{3-\sqrt{3}}$. هلال‌مربوط درشکل ۲۱ نشان‌داده شده است: زاویهٔ $\gamma$ در $C$ برابراست با $2\alpha$. سطح چهارضلعی $ACBD$ عبارتست از $ab\sin 2\alpha$ ، **و هلال قابل تربیع است.** درحقیقت معلوم می‌شود که:

$$\Gamma = a^{\frac{3}{4}} \times a^{-\frac{1}{2}} \times 3 \times 2$$

**دستهٔ (۲ و ۳)** : در اینجا $\gamma = \omega$ ، $\alpha = 2\gamma$ و $\beta = 3\gamma$. معـادلهٔ $\sqrt{2}\ sin3\gamma = \sqrt{3}\ sin2\gamma$. درقبال $cos\gamma \equiv x$ به‌معادلهٔ **درجهٔ دوم** منجر می‌شود، یعنی. $4x^2 - x\sqrt{6} - 1 = 0$. نتیجه عبارتست از:

$$cos\gamma = \frac{\sqrt{22} + \sqrt{6}}{8}$$

(به‌شکل ۲۲ مراجعه شود).

هلال قابل تربیع است و برای آن خواهیم داشت

$$\Gamma = \frac{1}{8}\sqrt{18\sqrt{3} - 6\sqrt{11}}$$

**دستهٔ (۱ و ۴)**: در اینجا $\beta = 4\alpha$ و $sin4\alpha = 2sin\alpha$. این رابطه به $4cos^3\alpha - 2cos\alpha - 1 = 0$ منجرمی‌شود. اگرداشته‌باشیم $sec\alpha = x$ به‌معادلهٔ درجهٔ سومی به‌صورت زیرخواهیم رسید:

$$x^3 + 2x^2 - 4 = 0$$

هـر ریشهٔ گویـای این معادلهٔ درجهٔ سوم باید عددی صحیح و در حقیقت‌مقسوم‌علیهی برای ۴ باشد. در اینجا باگـذاردن عددهای مربوطه به‌جای $x$ می‌بینیم هیچیك از مقسوم علیه‌های ۴ در معادله صادق نیست؛ **بنابراین معادلهٔ درجه سوم دارای ریشه‌های گویا نبوده وبه‌همین اعتبار دارای ریشه‌های درجهٔ دوم نیست.** از اینجا هلال (۳ و ۴) قابـل تربیع نخواهد بود.

**دستهٔ (۱ و۵)**: دراینجا

$$sin5\alpha = \sqrt{5}\,sin\alpha = 5sin\alpha - 20sin^3\alpha + 16sin^5\alpha$$

و بدست می‌آید

$$x = sin\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5} + 4\sqrt{5}}{2}}$$

بنابراین هلال (۱ و۵) **قابل تربیع** است.

**دستهٔ (۳ و ۵)**: دراینجا $\alpha = 3\omega$ و $\beta = 5\omega$ و $\gamma = 2\omega$.

معادلهٔ توضیحی عبارت است از:

$$\sqrt{3}sin5\omega = \sqrt{5}sin3\omega$$

مانند دستهٔ (۱ و۵) این‌معادله به‌درجهٔ دوم از $sin^2\omega$ منجرمی‌شود. هلال (۳ و ۵) بدین ترتیب **قابل تربیع است.**

دستهٔ (۲ و ۵) و (۴ و۵) **غیرقابل تبدیل بهدرجهٔ دوم** بوده و بنابر این **قابل‌تربیع نیستند.**

## ۱۲

بحث بالابراساس مقاله‌ای است که در ۱۸۴۰ به‌وسیلهٔ تئودورکلوسن (*Teodore Claussen*)، ریاضیدان آلمانی منتشرشد، و تا آنجا کـه من می‌دانم او اولین‌کسی است‌که مسئلهٔ هیپوکراتی را در معرض تحلیل‌جبری قرار داد. بـررسی او همانطورکه دیدیم، نه‌تنها قابل تربیع بودن هلالهای (۲ و ۱۲)، (۱ و ۳) و (۲ و ۳) را کـه توسط هیپوکرات کشف شده بـود روشن‌کرد، بلکه نشان دادکه دو هلال از «درجهٔ ۵» یعنی (۱ و۵) و (۳ و ۵) نیز قابل تربیع‌اند، و بعلاوه ثابت‌کردکه سایرهلالهای از درجهٔ پنجم غیرقابل تربیع‌اند و همین امر در مورد هلالهای درجهٔ ۴ و ۶ صادق‌است. **کلوسن** حدس زدکه **مسئلهٔ هیپوکراتی به‌غیراز ۵ هلالی‌که اکنون ذکـر آنها رفت، شقوق قابل‌تربیع دیگری‌ندارد؛** اما اگرهلالهای دیگری‌وجود داشته باشند، باید **از دستهٔ عددهای اول باشند.**

این آخرین فرضیه، شصت و چند سال بعد، هنگامیکه ادموند لاندو (*Edmond Landau*) ثابت‌کردکه نه تنها **دستهٔ هلال قابل تربیع**عددی است اول، باید **عدد اول‌فرما**، یعنی از نوع ۱ + $۲^n$ باشد، به‌ثبوت‌رسید. اینك ایـن عددهای اول نقش مهمی در تقسیم دایره به‌تقسیمات مساوی، یعنی سایکلوتمی، ایفا می‌کنند. به‌عباراتی آشناتر، هرگاه امکان داشته‌باشد که توسط خط‌کش و پرگار چند ضلعی منتظمی با تعداد اضلاع فرد، مثلاً $q$ ضلع بسازیم، در اینصورت $q$ یا عدد اول فرما، مانند ۳، ۵، ۱۷، ۲۵۷ است و یا **حاصل ضرب مجذور آزاد این عددهای اول.** این سئوال پیش می‌آیدکـه آیا رابطه‌ای پیچیده بین هلالهای قابل تـربیع و چند ضلعیهای منتظم قابل ترسیم با خط‌کش وپرگار وجود دارد؟

درست، مدتها قبل از آنکه اندیشه‌ها و تحقیقات نظری در این‌زمینه نیروئی حرکتی به‌خود بگیرد، معلوم شدکه هیچیك از ۱۶ هـلال از دستهٔ ۱۷ قابـل تربیع نیستند. هنگامیکه در ۱۹۳۴ ریاضیدان روسی چبوتارف (*Tchebotarev*) ثابت کرد که **هلال** $(q, p)$ **غیرقابل تربیع است وقتی** $p$ **عددی فرد و** $q$ **بزرگتر از ۵ باشد،** پیش‌بینی کلوسن بیشتر مـورد تأیید قرارگرفت.

بالاخره در۱۹۴۷ دورودنف (*Dorodnov*) اهل شوروی نتایج بدست

آمده توسط چبوتارف را بـه **اندازه‌های زوج** $p$ تعمیم داد و بدین ترتیب حدس قابل توجه **کلوسن** را کـه فقط هلالهای قابل تـربیع هیپوکراتـی عبارتند از:

**(۱۰ و ۱۲) ... (۳ و۵) و (۱ و ۵)، (۱ و۳)، (۱ و۲)**

و بیش‌ازیکصدسال از آن می‌گذشت، به‌ثبوت رسد

## ۱۳

چنین است تاریخ مسئله‌ای کـه در عـداد قدیمی ترین وقایع تاریخ ریاضیات قرار دارد. صورت مسئله‌یکصدو پنجاه سال پس از مرگ پایه‌گذار و ـ چیزی که مهمتر است ـ یکصد و پنجاه سال قبل از آنکه «مقدمات» اقلیدس آفتابی شده تنظیم شد، و بـرای مدت دوهزار و پانصد سال در حالتی زنده و معلق باقی ماند، و تنها هنگامی‌که منابع مشترك‌آنالیز جدید و نظریهٔ عددها در خدمت آن قرارگرفتند به‌شکلی جزئی حل گردید.

میگویم **به‌شکل جزئی**، زیرا فرضیه‌هـای کلوسن ـ لاندو ـ دوروودنف فقط به‌جنبه‌های جبری‌قضیه محدود می‌شوند. هنوز این سئوال باقی مانده است کـه آیا محدودیتی‌که توسط هیپوکرات وضع شده است، از شرایط لازم قابل تربیع بودن‌است؟ به‌خصوص مسئله شامل تعیین مقادیری از $\alpha$ و $\beta$ است‌که برای آنها هرسه تابع زیر:

$$sin\alpha,\quad sin\beta,\quad H = \beta sin^{۲}\alpha - \alpha sin^{۲}\beta \quad (۱۰ - ۱۳)$$

بتوانند در عیـن حال بـرحسب عددهای گویا و مجذور عددهای گنگـی که در بین عددهای‌گویا وجود دارند بیان شوند، و یا ثابت شود که چنین مقادیری به‌جز آنکه $H = o$ باشد وجود ندارند. و تا آنجاکه من می‌دانم این مسئله از **حساب ترانساندان** هنوز مورد بحث هم قرارنگرفته است.

# فصل یازدهم
# منحنی قابل تربیع هیپیاس

باگفتار، مطلبی‌راحل‌کردن‌چیزیست، وحل‌آن‌بااندازه
ودر عمل، چیزی دیگر.

(Jacobe Steiner) **یاکوب شتینر**

## ۱

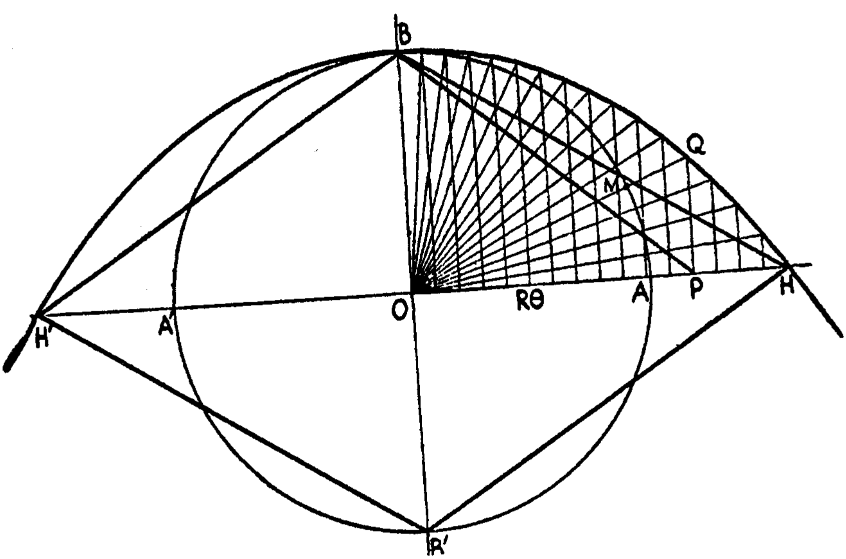
هیپیاس سوفسطایی اهل‌اله، تقریباً هم‌عصر هیپوکرات اهل کیوس به‌منظور خاص **تربیع دایره** ، یك منحنی اختراع‌کرد. درحدود یك‌قرن بعد،راه‌حل هیپیاس توسط دینوستراتوس (*Dinostratus*)، یکی از اعضای مکتب افلاطون‌وبرادرمناخموس (*Menaechmus*)، که در**مقاطع مخروطی**شهرت داشت، احیاو تکمیل گشت. امروزه نه‌از اصل ونه از احیای آن مدرکی کتبی دردست‌نیست. پاپوس‌وسایر مفسرین، خود منحنی را به‌خوبی توصیه کرده‌اند، اما بیان آنها در این زمینـه کـه چگونه «کوادراتریکس» (*Quadratrix*) توسط هیپیاس و دینوستراتوس در مورد**مسئلهٔ تربیع** به‌کار برده شده است به‌هیچوجه قانع‌کننده نیست.

عبارت «مکانیکال» که هندسه‌دانان قدیم در توصیف منحنی هیپیاس به‌کار برده‌اند، پاره‌ای از تاریخ نویسان واکه می‌خواهند چنین بفهمانندکه هیپیاس برای ایجاد منحنی خود به‌برخی وسـایل مکانیکی توسل جسته گمراه‌کرده است؛ زیرا آنها فراموش کرده‌اند که ریاضیدانان یونان عادت داشتند به تمام ترسیمهایی‌که، به‌جز خط ودایره، متضمن مکانهای هندسی دیگرند، برچسب کلمهٔ «مکانیکال»را بزنند. سایر مورخین، درحالیکه‌خصلت هندسی این دستاورد را می‌دانستند، در توضیح عامل محرك آن دچاراشتباه شده و خواننده را تحت تأثیر این اعتقاد باقی می‌گذارند کـه هیپیاس و

دینوستراتوس تنها کاری که کرده‌اند عنوان مسئله بوده است.

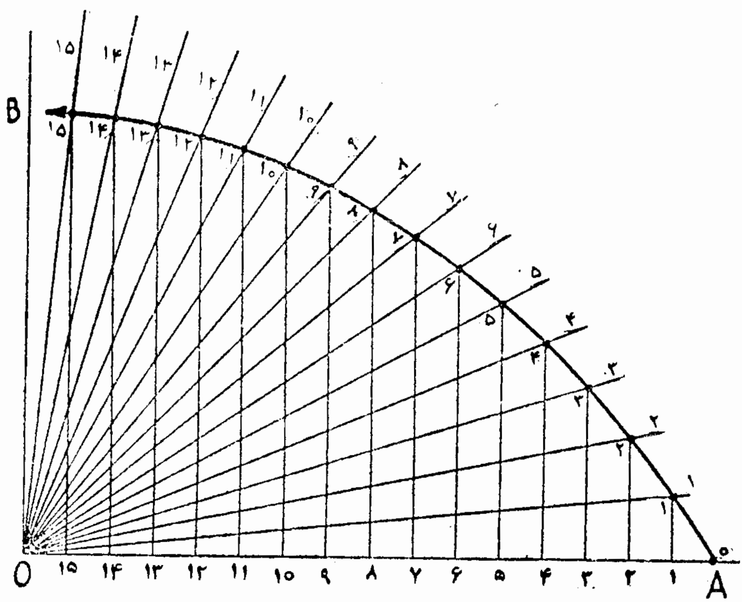
۲

مسئله عبارت **از ساختن مثلثی بوده است که سطح آن برابر قطاع مستدیر مفروضی باشد.** به‌خصوص درمورد مربع دایره. درشکل ۲۳ قطاع مربوط $BOM = \frac{1}{2} RS$ است که درآن $R$ شعاع و $S$ طول قوس است. فرض کنیم $OP$ برابر $S$ باشد: در اینصورت مثلث $BOP$ هم سطح قطاع است. ازطرف دیگر، فرض کنیم که عمود وارد بر $OP$ امتداد شعاع $OM$ را در $Q$ قطع کند؛ در در اینصورت وقتی $M$ محیط قوس قطاع را می‌پیماید نقطهٔ $Q$ منحنی قابل تربیع ($Quadratrix$) هیپیاس را به وجود می‌آورد. هرگاه این منحنی به طور کامل ترسیم شود، می‌تواند نه‌تنها برای تربیع هر قطاعی از دایره، بلکه جهت تبدیل **هرقوسی ازدایره** به‌مثابهٔ **شابلون** به‌کار رود. به‌خصوص مثلا $HOB$ هم سطح چهار ضلعی $OAMB$ خواهد بود و لوزی $HBH'B'$ هم سطح است با دایره، و باتوجه به‌اینکه تبدیل لوزی به‌مربع هم سطح با خودش، عملی است که توسط خط‌کش و پرگار امکان‌پذیر است، **تربیع دایره** به‌طور مسلم ممکن گردیده است.




شکل ۲۳

هر گاه تحلیل هیپیاس تاهمین جا ختم می‌شد، در اینصورت این سوفسطایی به‌حق متهم به‌مصادره به‌مطلوب می‌شد. زیرا فقط در صورتی می‌توانست «کوادراتریکس» را بسازد که بداند چگونه قوسی از دایره را تبدیل به‌خط مستقیم کند. یعنی قطعه‌خطی مستقیم برابر طول قوس بسازد، واگر او تبدیل قوس دایره را به‌خط مستقیم می‌دانست در اینصورت احتیاجی به‌کوادراتریکس نداشت. با اینحال اندکی منطقی‌تر به‌نظر می‌رسد که حدس بزنیم وقتی هیپیاس به‌این نقطه از کار رسید، مسئله را **معکوس کرد**؛ به‌عبارت دیگر، به‌جای آنکه به‌جستجوی قطعه‌ای از خط مستقیم متساوی الطول با قوس ربع دایره بپردازد، **به‌دنبال یافتن دایره‌ای که ربع محیط آن برابر قطعه خط مستقیم مفروضی باشد رفت.** این به‌آنمعنی است که کوادراتریکسی با قاعدهٔ مفروض بسازد؛ کاری




شکـــل ۲۴

که بدون خارج‌شدن از قلمرو موروثی، باید نقطه به‌نقطه عملی کرد. روش کار درشکل ۲۴ نموده شده است. یك دسته شعاع متساوی الفاصله از هم، زاویهٔ قائمهٔ $xoy$ را به $n$ زاویهٔ مساوی قسمت می‌کنند؛ قطعه مفروض $OA$ نیز به‌همین تعداد قسمت شده است، یعنی $n$ قسمت متساوی. عمودهای $ox$ در نقطه‌های تقسیم، شعاعهای متناظر را در نقاطی قطع می‌کند که برروی

کوادراتریکس موردنظر قرار دارند. بازیادکردن **این تقسیمات** تعدادی‌لازم از نقطه‌ها بدست خواهند آمدکه به حد کافی **تنگ هم** قرارگرفته‌اند. اما نقطهٔ **رأس** $B$ از کوادراتریکس را که هدف اصلی مسئلهٔ **هیپیاس** است باید به‌مثابهٔ **حد تقسیم بینهایت** درنظرگرفت، ومن تصور می‌کنم که این همان چیزی بودکه حقیقتاً فکر **هیپیاس** را به‌خود مشغول داشته بود

## ۳

برحسب این تفسیر، تربیع هیپیاسی‌کوششی بود برای تعیین نسبت محیط یك دایره‌به‌قطر آن، از راه‌اعمال‌حد **بینهایت مرحلهٔ متوالی**. المثنای تحلیلی این روش فرمول زیر است:

$$\lim_{n \to \infty} n\,tg\frac{\pi}{۲n} = \frac{\pi}{۲} \qquad (۱-۱۱)$$

ضمناً این یکی‌از فرمولهایی است‌که **ارشیمدس** درقرن بعد برای‌تعیین مقدارتقریبی $\pi$ به‌کاربرد. دردستاورد ارشمیدس، دایره به‌عنوان حدمشترك دودستهٔ چند ضلعی منتظمی بودکه یکدسته محاط ودستهٔ دیگر محیط بردایره بودند و تعداد اضلاعشان به بینهایت می‌رسید. وقتی این امر در مورد یك چهارم دایره به‌کار رود،شکل‌کار به‌نامساوی زیر منجر می‌شود:

$$n\sin\frac{\pi}{۲n} < \frac{\pi}{۲} < n\,tg\frac{\pi}{۲n} \qquad (۲-۱۱)$$

برای تجلیل از افکار **هیپیاس** باید به‌خاطر داشت که تربیع اواولین اقدام شجاعانهٔ ثبت شده در میدان **روندهای بینهایت** بود، و این اقدام شجاعانه در ۴۵۰ سال قبل از میلاد صورت گرفت، و از سن ریاضیات بیش از یك قرن ونیم نمی‌گذشت، و کوادراتریکس هیپیاس اولین منحنی بود (البته به‌جز دایره) که ما از آن اطلاعی تاریخی وثبت شده در دست داریم.

و این واقعه حداقل یك قرن قبل ازکشف **مقاطع مخروطی** به‌وقوع پیوست، و در چنین شکل‌کاری **هیپیاس** برای این منحنی وسایلی به کاربرد که دوهزارسال بعد توسط **فرما** ودکارت به‌مثابهٔ وسیله‌ای برای **هندسهٔ تحلیلی** به‌کارگرفته‌شد.

در اینجا باید شمای مختصری از مسئله‌ای که امروز موضوعی حل شده است، اما تاریخی پرحادثه در سه‌قرن گذشته داشته است، ارائه دهیم؛ یعنی شمائی از **طبقه بندی منحنیهای مسطح.** کوششهای یونانیان دراین جهت که دقیقاً برپایه‌ای هندسی قرار داشت، بیشتر سطحی بود و به‌یك معنا بارور نبود. باظهور هندسهٔ تحلیلی مسئله وارد مرحله‌ای جدید شد. دکارت اولین کسی بود که پیشنهاد کرد تامنحنیها براساس خصلت معادلاتی که نمایندهٔ آنها هستند طبقه‌بندی شوند؛ به‌عبارت دیگر براساس روابط تابعی خود، که معرف آنها در دستگاه **مختصات مستقیم‌الخط است.** او به‌خصوص به مکانهائی که معادلاتشان را می‌توان به صورت **کثیرالجمله‌ای** از دو متغیر نشان داد علاقمند بود. امروز ما چنین مکانهائی را **جبری** می‌نامیم، و **توان** $n$ ازکثیر الجملهٔ معرف منحنی را، درجهٔ آن‌منحنی می گوئیم. بااینحال، دکارت افکار دیگری دربارهٔ این موضوع داشت: او درجهٔ مکان هندسی رابر حسب آنکه **عدد** $n$ **زوج یافرد باشد،** به‌وسیلهٔ عددهای صحیح $\frac{1}{2}n$ و یا $\frac{1}{2}(n+1)$ تعریف کرده است. بدین ترتیب، آنچه راکه ماامروز به‌عنوان **درجهٔ چهارم** می‌شناسیم، برای دکارت ازدرجهٔ دوم بود، وخطوط‌مستقیم‌و مقاطع مخروطی را به عنوان مکانهای هندسی از درجهٔ اول ارزیابی می‌کرد.

نیوتن، درجهٔ مکان هندسی را بادرجهٔ معادلهٔ مربوطهٔ آن یکی کرد، اما دراین امر نیز احتیاط به‌خرج داد. تأمل او برای آنکه خطوط مستقیم را وارد دسته‌بندی منحنیهاکند، اورا به‌آنجاکشاندکه عدد صحیح $n-1$ را به‌عنوان **جنس** مکان هندسی تعریف کرد. بنا براین خط مستقیم در عداد مکانهای هندسی بادرجهٔ ۱ وجنس ۰ قرار گرفت. علی رغم شخصیت نیوتن، این اندیشه ریشه نگرفت و امروز اصطلاح جنس کاملاً به‌مفهوم دیگری مورد استفاده قرار گرفته است.

اما دربارهٔ منحنیهائی مانند سیکلوئیدها، حلزونیها وسینوسوئیدهاکه امروز آنها را درعداد منحنیهای غیر جبری (ترانسانداِن) قرار می‌دهیم، مدرکی وجود نداردکه نیوتن به‌این منحنیهای غیر جبری نامی دسته‌جمعی اطلاق کرده باشد. بااینحال اوتأییدکرده است که درجهٔ چنین مکانهائی‌راباید به‌عنوان‌درجهٔ بینهایت‌موردتوجه قرارداد، زیراخط مستقیم‌آنهارادربینهایت

نقطه قطع می‌کند.

**۵**

اصلاح *Transcendental* را لایپ‌نیتز (*Leibnitz*) وضع کرد. این فیلسوف و ریاضیدان اشراقی‌از موهبتی خارق‌العاده، درزمینهٔ الهام‌وپیش‌بینی، برخوردار بود. در پیشاپیش اغلب روشهای ریاضی حرکت می‌کرد- گاهی اوقات بیش از یك قرن قبل از آنکه روشی بارور شود. تقسیم‌عددها به‌توابع **جبری** ویا به‌طوریکه لایپ‌نیتز نامگذاری کرده است، تحلیلی، و **مافوق‌جبری یامتعالی** یکی از موارد مورد اشاره است. باپیش آگاهی از مسیر جبرنو، لایپ‌نیتز در بسیاری از بیاناتش تأییدکرد برای هرعدد جبری فقط می‌توان یك معادلهٔ‌جبری باضرایب‌گویااختصاص‌داد نه‌بیش. او درجهٔ این معادله را مرتبهٔ عدد جبری می‌نامد. درحالیکه‌در می‌یابد مقادیری نیز وجود دارندکه هیچ‌کثیرالجمله‌ای‌را نمی‌توان به‌آنها اختصاص داد،پیشنهاد می‌کندکه نام‌آنهارا «متعالی» (ترانساندانتال) بگذاریم، زیرا، آنطورکه او می‌گوید، آنها از **تحلیلهای جبری** فراتر می‌روند.

به‌همین ترتیب، توابعی وجود دارندکه هرقدر دستکاری شوند تبدیل به‌روابط‌کثیرالجمله‌ای نخواهندشد. لایپ‌نیتز این توابع‌رانیز بانام«متعالی» تعریف‌کرده است. او از این حقیقت‌که معادله‌ای ازنوع‌ترانساندان‌می‌تواند ریشه‌ای جبری وحتی عددی‌گویا بپذیرد دچار تعجب شده است: برای مثال معادلهٔ $x^x + x = 30$ که عدد $x = 3$ درآن صادق است. بااینحال او چنین پدیده‌ای را در عداد استثناها تلقی کرده معتقد است که «به‌طور کلی **در معادلات غیر جبری، فقط عددهای غیر جبری صادق‌اند».**

جریان‌وقایع بعدی سرگردانی و حیرت لایپ‌نیتز را تأیید کرد، ودر عین حال حقانیت حدس وگمان او را نیز تقویت نمود. رابطهٔ بین عددهای غیر جبری از یکطرف‌وتوابع غیر جبری از طرف دیگر، به‌مثابهٔ مسئله‌ای حل نشده تابه‌امروز باقی مانده است.

سرگذشت هلالیهای هیپوکرات، خصلت **غیرجبری‌بودن** $e$ و $\pi$ و بسیاری ازمسائل بلاجواب‌درزمینهٔ **حساب متعالی**،پیش‌بینی می‌کندکه‌مسئله لایپ‌نیتز برای مدت زمانی در فهرست مسائل ریاضیات باقی خواهد ماند.

**۶**

کتابهای درسی ما دربارهٔ هندسهٔ تحلیلی باشیوه‌ای متدیك تقسیماتی

راکه هم اکنون به‌اختصار بیان کردم دنبال می‌کنند. پس از خاتمهٔ موضوع خط مستقیم ودایره، این کتابها به‌کار مقاطع مخروطی ویا منحنیهای درجهٔ دوم می‌پردازند. متعاقب این قسمت نیز منحنیهای درجه سوم و چهارم ومنحنیهای جبری به‌طور عموم مورد بررسی قرار می‌گیرند. بررسی منحنی غیر جبری برای آخر این دوره نگهداری می‌شود، ودر برخی از دوره‌های تعلیماتی، تاوقتی شاگرد، اصول محاسبات‌را فرا نگرفته باشد، ازاین‌مطلب گفتگویی به‌میان نمی‌آید.

همهٔ اینها درست است. باقراردادن جبر در پیشاپیش تعلیمات ریاضی ناچاریم از عملیات گویا ومحدود شروع کنیم؛ این امر نظم وترتیب کارمارا معین می‌کند، حالا چه این کار دربارهٔ عدد باشد، چه‌در زمینهٔ تابع وچه در مورد منحنی نمایش معادله. بااینحال درکمال صداقت برای شاگردی‌که از همه چیز باخبر باشد، بایدگفت‌که توالی تاریخی همیشه از نظم وترتیب کار درکتب درسی تبعیت نمی‌کند.

کوادراتریکس یکی از آن موارد است. قاعدهٔ منحنی و محورتقارن آنرا به‌عنوان محورهای مختصات، و شعـاع دایرهٔ مولد را به‌مثابهٔ واحد طول درنظر می‌گیریم. دراینصورت بنا به تعریف $\overline{BM} = \overline{OP} = x$ قوس، و باز، اگرقبول‌کنیم که زاویه‌ها به‌رادیان اندازه گیری شوند، دراینصررت زاویهٔ $BOQ$ نیزبرابر با $x$ است ومثلث قائم‌الزاویه $POQ$ رابطهٔزیررا به‌ما می‌دهد:

$$y = x\cot g x \qquad (۳-۱۱)$$

این، معادلهٔ منحنی در دستگـاه مختصات خطی است و از آنجاکه $Cotgx$ **نمی‌تواند به‌شکل کثیرالجمله‌ای از x نمایش داده شود، کوادراتریکس منحنی است غیرجبری،**

**بنابراین پس ازخط مستقیم و دایره، اولین مکان هندسی‌که توسط ریاضیدانان مورد بررسی قـرار گرفت، یك منحنی غیرجبری بـود.** در حالیکه حتی ساده‌ترین منحنیهای جبری مانند مقاطع مخروطی تا یك قرن و نیم‌پس‌ازآن نیزدر صحنهٔ ریاضیات ظاهرنشدند ودرواقع تاریخ‌رعایت روشها وسلسهٔ مراتب را نمی‌کند.

# فصل دوازدهم

# آلگوریتم اقلیدس

در صورتی می‌گویند اندازه‌ها دارای نسبتی با یکدیگرند
که رقم کوچکتر بتواند چند برابر شود تا از رقم
بزرگتر تجاوز کند

**اقلیدس- کتاب پنجم**

۱

کتاب هفتم «مقدمات» شامل توضیحی دربارهٔ طرحی شمارشی است وگرچه احتمالاً حداقل یکصد سال بر اقلیدس تقدم داشته به‌نام **آلگوریتم اقلیدس** شناخته شده است. اقلیدس آلگوریتم را برای **تعیین بزرگترین مقسوم علیه مشترك دوعدد صحیح** به‌کار برده است. برای نشان دادن آن مثلاً عددهای ۲۶۰۱ و ۱۰۸۸ را در نظر بگیریم. یك سلسله تقسیمات متوالی تساویهای زیررا به‌وجود می‌آورند:

$$۲۶۰۱ = ۲ \times ۱۰۸۸ + ۴۲۵$$
$$۱۰۸۸ = ۲ \times ۴۲۵ + ۲۳۸$$
$$۴۲۵ = ۱ \times ۲۳۸ + ۱۸۷$$
$$۲۳۸ = ۱ \times ۱۸۷ + ۵۱$$
$$۱۸۷ = ۳ \times ۵۱ + ۳۴$$
$$۵۱ = ۱ \times ۳۴ + ۱۷$$
$$۳۴ = ۲ \times ۱۷$$

آخرین **باقیماندهٔ** ۱۷، بزرگترین مقسوم علیه مشترك مورد جستجو

است، زیرا هر مقسوم علیه مشترك برای ۲۶۰۱ و ۱۰۸۸ باید باقیماندهٔ ۴۲۵ را نیز عادکند، وبه‌همین اعتبار باقیمانده‌های ۲۳۸، ۱۸۷، ۵۱، ۳۴ و ۱۷ را.

وقتی چنین آلگوریتمی برای دوعدد صحیح مانند $A$ و $B$، که نسبت به‌یکدیگر اولند، به‌کار برده شود، نتیجهٔ آن‌چنین است‌که $\frac{A}{B}$ به‌یك سلسله کسرهای مسلسل منظم گسترش یابد و من این مطلب را در حالت $\frac{۴۱}{۱۶}$ نشان خواهم داد :

$$۴۱ = ۱۶ \times ۲ + ۹ \quad \text{یا} \quad \frac{۴۱}{۱۶} = ۲ + \frac{۹}{۱۶}$$

$$۱۶ = ۹ \times ۱ + ۷ \quad \text{یا} \quad \frac{۱۶}{۹} = ۱ + \frac{۷}{۹}$$

$$۹ = ۷ \times ۱ + ۲ \quad \text{یا} \quad \frac{۹}{۷} = ۱ + \frac{۲}{۷}$$

$$۷ = ۲ \times ۳ + ۱ \quad \text{یا} \quad \frac{۷}{۲} = ۳ + \frac{۱}{۲}$$

از اینجاگسترش زیر نتیجه می‌شود:

$$\frac{۴۱}{۱۶} = ۲ + \cfrac{۱}{۱ + \cfrac{۱}{۱ + \cfrac{۱}{۳ + \cfrac{۱}{۲}}}}$$

مشاهده‌می‌شود که خارج قسمتهائی‌که از آلگوریتم به‌وجود می‌آید جمله‌های گسترش فوق‌اند. باتوجه به‌اینکه کسرهای مسلسل کاملا توسط این خارج قسمتها معین می‌شوند، بدون ابهام می‌توان نوشت:

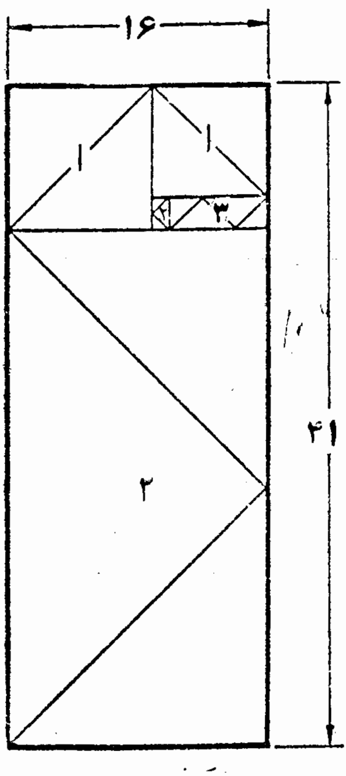
$$\frac{۴۱}{۱۶} = (۲:۱،۱،۳،۲)$$

به‌قدرکافی روشن‌است‌که روش نموده شده در این مثال، برای هردو عدد صحیحی قابل اعمال است. بنابراین هرعدد گویائی می‌تواند به‌تعدادی کسر پشت سرهم وپایان پذیرگسترش یابد، وچنین‌گسترشی منحصر به‌فرد است. به‌همین اعتبار، هرعددگویائی می‌تواند به وسیلهٔ آرایشی محدود از

عددهای صحیح مثبت نشان داده شود، درآنچه‌که می‌آید من این آرایش‌را طیف عدد خواهم خواند (*Spectrum*).

## ۲

آلگوریتم اقلیدس وطیفی‌که بدین ترتیب به‌وجود می‌آید، می‌تواند نمایشی‌ترسیمی وجالب توجه داشته باشدکه درشکل۲۵ نموده شده‌است. در این ترسیم نمایش صورت و مخرج‌کسر، اضلاع یك مستطیل‌اند. از این مستطیل آنقدر که می‌توانیم مربع خذف می‌کنیم، بدین ترتیب یك پس‌ـ ماند مستطیل شکل باقی می‌ماندکه آلگوریتم مجدداً درآن به‌کار برده‌می‌ـ شود، واین طرزکار ادامه می‌یابد تا وقتی مستطیل پس ماندی باقی نماند. تعداد مربعها در هر «رده» عنصر مربوط به‌طیف،ویا به‌عبارت دیگر جمله‌ای‌ازکسر مسلسل‌مربوطه را به‌وجودمی‌آورند.



شکل ۲۵

**گفتم‌که برای هرعددگویا طیفی متناظر با آن وجود دارد. برعکس، هر آرایش منظم از عددهای صحیح‌مثبت‌را می‌توان به‌مثابهٔ طیفی مربوط به‌عدد گویا تعبیرکرد.** برای‌محاسبهٔ‌این‌عددباید طیف را به‌صورت کسرهای‌مسلسل درآورد و پس از آن آلگـوریتـم اقلیدس را معکـوس کرد . یك وسیلهٔ مـؤثـر توسط جان والیس (*John wallis*) کشف شد. در جدول زیرآلگوریتم والیس برای طیـف (۲،۱،۱،۳؛۲) نشان داده شده است:

| جمله‌های طیف | ۲ | ۱ | ۱ | ۳ | ۲ |
|---|---|---|---|---|---|
| صورت همگراها | ۲ | ۳ | ۳ × ۱ + ۲ = ۵ | ۵ × ۳ + ۳ = ۱۸ | ۱۸ × ۲ + ۵ = ۴۱ |
| مخرج همگراها | ۱ | ۱ | ۱ × ۱ + ۱ = ۲ | ۲ × ۳ + ۱ = ۷ | ۷ × ۲ + ۲ = ۱۶ |

همگراهای‌پی‌درپی مقادیر تقریبی‌طیف‌اند وآخرین همگرا مقدارکسرمسلسل است. بدین ترتیب همگراهای مربوط به ۴۱/۱۶ عبارتند از:

۲/۱ ، ۳/۱ ، ۵/۲ ، ۱۸/۷ و ۴۱/۱۶

## ۳

اهمیت نظری آلگوریتم والیس دراینست که راه را برای بررسی دقیق **کسرهای مسلسل بینهایت** باز می‌کند. مطمئناً این روند مربوط به‌بینهایت سالها قبل از والیس به‌کار گرفته شده بود: به‌طور صریح توسط ریاضیدانان ایتالیائی قرن شانزدهم، و به‌طور ضمنی توسط فیبوناچی، هرو و ارشمیدس. با اینحال والیس وپس از آن هویگنس (*Huygens*). فرضیهٔ مزبوررا برپایه‌ای محکم‌استوارکرده وثابت نمودندکه **روند، برای‌هرطیف بینهایتی‌همگرا است،به‌عبارت دیگرتوالی تعدادی همگرا همیشه‌به حدی نزدیك می‌شود.**

باتوجه به‌اینکه طیف هرعددگویائی مسلماً محدود است **الزاماً این حد عددی است‌گنگ.**

نتیجه می‌گیریم‌که هرآرایشی از عددهای صحیح مثبت، محدود یا نامحدود را می‌توانیم به‌عنوان طیف یك عدد حقیقی مانند$\Gamma$ بیان‌کرد: **اگر طیف محدود باشد$\Gamma$ گویا، اگرطیف نامحدود باشد$\Gamma$گنگ خواهد بود** برعکس هرعددمثبتی مانند $\Gamma$،گویا ویاگنگ، می‌تواند به کسرهای‌مسلسل گسترش داده شود: این‌گسترش محدوداست،هرگاه $\Gamma$گویا باشد،ونامحدود است اگر $\Gamma$ **گنگ** باشد. بعلاوه قدمهای مستقیم وپی‌درپی در زمینهٔ بسط

یك عدد گنگ به کسر مسلسل، از الگوی آلگوریتم اقلیدس تبعیت می کند و **آلگوریتم نامحدود را می‌توان به مثابهٔ تعمیم مستقیم آلگوریتم محدود تلقی کرد.**

۴

عملیات عمومی این آلگوریتم تعمیم یافته را باعباراتی ساده به‌وسیلهٔ وارد کردن علامت $[\Gamma]$ که‌مبین **بزرگترین عددمثبت** $\Gamma$ **باشد می‌توان بیان کرد** حالت معمولی ساده را وقتی $\Gamma$ عددیست صحیح کنار بگذاریم، دراینصورت تفاضل $\Gamma-[\Gamma]$ عددیست بین صفر و یك، واین بدانمعنی است که همیشه مـی‌توان عددی مانند $x$ ، بزرگتـر از یك، یـافت به طوری که داشته باشیم:

$$\Gamma=[\Gamma]+\frac{1}{x} \qquad (۱-۱۲)$$

اگـر $\Gamma$ گویـا بـاشد، مثلا $\frac{A}{B}$، در اینصـورت $[\Gamma]$ خارج‌قسمت $A$ به $B$ است، و عمـل مامحدود می‌شود به‌بیان یك مرحله از آلگوریتم اقلیدسی. اما هرگاه $\Gamma$ عددی گنگ باشد، در اینصورت $x$ نیز عددیست گنگ. همان‌گونه‌که درمورد $\Gamma$ عمل‌کردیم‌هرگاه در بارهٔ $x$ نیز انجام دهیم خواهیم داشت: $x=[x]+\frac{1}{y}$، که در آن $y$ عددیست گنگـ و بزرگتر از ۱. بنابراین جریان کار تـابینهایت ادامه خـواهد یافت ویك توالی از عددهای صحیح‌به‌شکل زیر به‌جود می‌آید:

$$[\Gamma]\,،[x]\,،[y]\,،\,[z]،\ldots \qquad (۲-۱۲)$$

۵

ریاضیدان آلمانی، **هویگنس** را بـه‌عنوان اولین کسی‌کـه کسرهـای مسلسل را به‌مثابهٔ وسیله‌ای جهت بدست آوردن **تقاریب گویا** به‌کار برده است باید صاحب امتیاز دانست.

کارآئـی شیوهٔ عمل در دوخاصیت از آلگوریتم اقلیدس نهفته است که به‌شکل زیر می‌توان خلاصه‌کرد.

۱. هرگاه $\frac{A}{B}$ و $\frac{A'}{B'}$ دوهمگرای‌پشت‌سرهم‌درگسترش عددی مانند $\Gamma$

باشند، دراینصورت $\Gamma$ بین $\frac{A}{B}$ و $\frac{A'}{B'}$ قراردارد. بدین‌ترتیب دردنبالهٔ مربوط به گسترش $\sqrt{۳}$ خواهیم دید که $\frac{۲۶۵}{۱۵۳}$ و $\frac{۳۶۲}{۲۰۹}$ بـه ترتیب همگراهای نهم و دهم‌اند. و این بدانمعنی است که

$$\frac{۲۵۶}{۱۵۳}<\sqrt{۳}<\frac{۳۶۲}{۲۰۹}$$

۲. هرگاه $\frac{A}{B}$ در گسترش عدد $\Gamma$ یکی‌از همگراها باشد، دراینصورت خطای ناشی ازقبول $\frac{A}{B}$ به‌جای $\Gamma$ کمتراز $\frac{۱}{B^{۲}}$ خواهد بود. علیهذا، با قبول $\frac{۳۶۲}{۲۰۹}$ به‌جای $\sqrt{۳}$، با خطایی‌کمتر از $\frac{۱}{۴۰۰۰۰}$ تقریب، عدد فوق رابه‌جای $\sqrt{۳}$ به‌کار برده‌ایم.

درواقع، در مقایسهٔ کسر بـا مقادیر جـدول مربوط به $\sqrt{۳}$ معلوم می‌شودکه

$$\sqrt{۳}=۱/۷۳۲۰۵۱\ldots \quad \text{و} \quad \frac{۳۶۲}{۲۰۹}=۱/۷۳۲۰۵۲\ldots$$

بدبختانه، قابل اجرا بودن شیوهٔ فوق به‌مقدار زیـادی به‌وسیلهٔ کار پرزحمت و خسته‌کننده‌ای کـه برای تعیین طیف عـددگنگ باید انجام دا مخدوش می‌شود. از این نظرعددهای‌گنگ از نوع $M+\sqrt{N}$، که در آن $M$ و $N$ عددهایی‌گویا هستند، وضعی مخصوص به‌خود دارند. زیرابه‌طور که درمثالهای زیرمی‌بینیم، الگوی طیف آنها را می‌توان تاحدی قبلاپیش‌گوئی‌کرد.

## ۶

**مثال اول** . نسبت **تقسیم‌طلائی**. عکس «نسبت الهی» برابر است با $\Gamma=\frac{۱}{۲}(\sqrt{۵}+۱)$ (به‌فصل پنجم مراجعه شود). معلوم می‌شود کـه $[\Gamma]=۱$ و $\Gamma-[\Gamma]=\frac{۱}{۲}(\sqrt{۵}-۱)$. عکس‌این عبارت برابر است با :

$x=\frac{۱}{۲}(\sqrt{۵}+۱)$ ، بنا براین $\Gamma = x$ و $۱ = [x]$ و از آنجا

$$\frac{۱}{۲}(\sqrt{۵}+۱)=(۱،۱،۱،۱،۱،...) \qquad (۳-۱۲)$$

آلگوریتم والیس در اینجاچیزی‌راکه توالی فیبوناچی نامیده‌می‌شود به‌وجود می‌آورد

$$۱،۲،۳،۵،۸،۱۳،۲۱،۳۴،... \qquad (۴-۱۲)$$

**کــه در آن هرجمله، که از سومی شروع می‌شود، برابر است بـا جمع دوجملهٔ ماقبل خود.**

**مثال دوم.** گسترش ریشهٔ دوم $\Gamma = \sqrt{۳}$ را جستجو کنیم که نقش مهمی در بحــث تقریب ارشمیــدس ایفا می‌کند. در اینجا معلوم می‌شود $\Gamma-[\Gamma]=\sqrt{۳}-۱$ که عکس آن برابراست با $x=\frac{۱}{۲}(\sqrt{۳}+۱)$.

از آنجــا $x-[x]=\frac{۱}{۲}(\sqrt{۳}-۱)$ و $y=\sqrt{۳}+۱$. بنــابــرایــن $[y]=۲$ و $y-[y]=\sqrt{۳}-۱$ که معکوس عبارت آخر برابر است با $\frac{۱}{۲}(\sqrt{۳}+۱)$، یعنی همان $x$ ودر نتیجه:

$$\sqrt{۳}=(۱؛۱،۲،۱،۲،۱،۲،...) \qquad (۵-۱۲)$$

**مثال سوم.** فرض $\Gamma=\sqrt{۱۹}$ باشد. روش کار همان است که در مثالهای قبل‌گفته شد. جزئیات را به‌عهدهٔ خــواننده می‌گذاریــم. نتیجه عبارتست از:

$$\sqrt{۱۹}=(۲؛۲،۱،۳،۱،۲،۸،۲،۱،۳،۱،۲،۸،۲،۱،۳،۱،۲،۸،...) \qquad (۶-۱۲)$$

## ۷

گسترشهای مــذکور دربالا یك وجهٔ مشترك دارند: هر کدام دارای تعداد بینهایت بلوك با جمله‌های همانندند. چنین کسرهای پیوسته‌ای به‌نام کسرهای‌دوره‌ای(*Periodic*) معروفند. بلوکهای تکراری را**دوره یاسیکل** می‌نامند. تعداد عبارتهای موجود دریك سیکل را دورهٔ گسترش می‌گویند. بنابراین، برای مثال درگسترش $\sqrt{۱۹}$ ، (۲،۱،۳،۱،۲،۸) سیکل و پریود برابر است با۶.

روش به‌کار رفته برای بدست آوردن این گسترشها نشان می‌دهد که

وقتی در مـورد گنگهائی مانند $M + \sqrt{N}$ به کار برده شود، آلگوریتم اقلیدس باید همیشه یك طیف متنـاوب بـه وجود بیاورد، و در واقع چنین نیز هســت. طیف هر عدد گنگـی به‌شکل $M + \sqrt{N}$ که درآن $M$ و $N$ عددهایی گویا باشند، الزاماً دوره‌ای است وبرعکس، **حد هر کسر متناوب مسلسل ریشهٔ معادلهٔ درجهٔ دوم باضرایب گویا است**، یعنی عبارتست از: **دوجمله‌ای ازنوع** $M + \sqrt{N}$.

شباهت قابل توجهی بین **کسرهای دوره‌ای** مسلسل و **کسرهـای اعشاری دوره‌ای** وجـود دارد. اگر $\Gamma$ عـددی گویا و مثبت باشد، یعنی **ریشهٔ معـادلهٔ خطی** با ضرایب گویا؛ در اینصورت کسر اعشاری که $\Gamma$ را نشان می‌دهد یا**مختومه است** ویا **دوره‌ای**

به‌همین ترتیب، اگر $\Gamma$ ریشهٔ مثبت **معادله‌ای درجه‌دوم** با ضرایب گویا باشد، در اینصورت کسر پیوسته‌ای که $\Gamma$ را معین می‌کند یا مختومه است ویا دوره‌ای. درحالت معادلهٔ‌خطی، روند تولید ازراه تقسیم طولانی، ودر مورد معادلهٔ درجه دوم این روند آلگوریتم اقلیدس است. **هویگنس،** والیس وحتی بومبلی (*Bombelli*)، ریاضیدان قرن شانزدهم ایتالیا، اولین کسی‌که به‌طور صریـح‌کسـرهای مسلسل را مورد استفاده قرار داد، ازاین خواص تناوب و دوره‌ای‌گنگهای درجـهٔ دوم آگاهی داشتند. **اولر و لاگرانژ** نه‌تنها این قضایا را بابرهانی دقیق بیان‌کردند، بلکه نشان دادندکه چگونه برای حمله به‌پاره‌ای سئوالات مشکل در زمینهٔ نظریهٔ عددها می‌توان‌ازاین کسرهای مسلسل دوره‌ای استفاده‌کرد. میدان عمل به‌وسیلهٔ عده‌ای که از میان‌آنها‌بایدازلاگرانژ،گوس، ژاکوبی،گالوا (*Galois*) ولیوویل(*Liouville*) نام برد، گسترش یافت ـ تا به‌امروز که تعداد زیادی مجلد لازم است تا مجموعهٔ‌جامعی از نظریه ارائه شود. باهمهٔ اینها،پاره‌ای‌سئوالات‌که توسط این‌اساتیدپیش‌کشیده شده، بدون جواب مانده است. درمیان آنها مهمترینش رابطهٔ بین **خصلت یك عدد صحیح N و تناوب و دورهٔ طیف** $\sqrt{N}$ **است.**

# فصل سیزدهم

# تقریب ارشمیدسی

در واقع، مهمتر از نگهداری و حفظ حقیقت، حفظ شیوه‌ای است که به‌کشف حقیقت منجر شود.

پونسله (Poncelet)

## ۱

در رساله‌ای با عنوان سایکلومتری (*Cyclometry*)، ارشمیدس نابرابری زیر را به‌کار برده است:

$$\frac{۲۶۵}{۱۵۳} < \sqrt{۳} < \frac{۱۳۵۱}{۷۸۰} \qquad (۱-۱۳)$$

هردوی این کسرها تقاریب خوبی برای $\sqrt{۳}$ هستند. و این دقت بود که به‌استاد محاسب امکان‌داد تا نسبت محیط دایره به‌قطرآن، $\pi$ را، درمیان محدودهٔ باریك زیر بدست بیاورد:

$$۳\frac{۱۰}{۷۱} < \pi < ۳\frac{۱۰}{۷۰} \qquad (۲-۱۳)$$

ارشمیدس به‌طور مبسوط قدمهای بعدی را در ارزیابی این مقدار شرح داده است. اما اشاره‌ای به‌چگونگی دستیابی به‌تقریبهائی برای $\sqrt{۳}$ که نقطهٔ شروع حرکتش بوده، ننموده است. آیا ممکن است که این مقادیر درمیان هندسه‌دانانی که رساله خطاب به‌آنها است چنان روشن ودانسته‌بوده است که توضیح آن را زائد دانسته باشد؟ شاید! با اینحال تا به امروز نظریات بسیاری دربارهٔ انگیزه‌هایی حاکم بر انتخاب ارشمیدسی ابرازشده‌است.

هردوی این تقریبها همگراهائی از کسرهای مسلسل $\sqrt{۳}$ هستند، و بدین ترتیب طبیعی است گمان بریم که آلگوریتم اقلیدس راهنمای رسیدن به این مقادیر بوده باشد. با اینحال این حدس به‌این دلایل مورد مخالفت تاریخ‌نویسان قرارگرفته است که کسرهای مسلسل، تاقرن شانزدهم مطرح نشده ونظریه تاقرن هیجدهم مورد بهره‌برداری کامل قرار نگرفته است،و بدین ترتیب، این مسئله به طور کامل خارج از بصیرت ریاضیدانان بوده است. این دلیل آخر درخور تعمق بیشتری است.

## ۲

می‌دانیم که آلگوریتم اقلیدس درخاك یونان متولد شد وچیزی در آن وجود ندارد که آنرا در قالب عددهای گویا محدود کند، و مردانی مانند ادکسوس، اقلیدس و ارشمیدس مسلماً آنرا به‌عنوان **معیاری** در حد کمال پذیرفته بودند تا بدانند دومقدار **متوافق‌اند یانه**. من پا را از این فراتر نمی‌گذارم که مدعی شوم آلگوریتم اقلیدس به‌خصوص برای تعریف عددهای گنگ اختراع شده است، اماغیر محتمل نیست، آنکه این شیوه را کشف کرده است در عین حال به‌دنبال چنین ملاکی برای عددهای متوافق بوده باشد. البته دلیل مستندی دردست نیست که براین حدس صحه گذارد؛ اما با اینحال باید به‌خاطر داشت که هندسه‌دانان یونان سرسختانه‌ازکاربرد عبارتهایی‌مانند بینهایت یاحد، امتناع می‌ورزیدند.

یك حالت قضیهٔ ارشمیدس دربارهٔ سطح یك قطعهٔ سهمی است که‌اثبات آن به‌جمع جمله‌های یك تصاعد هندسی نامحدود زیربستگی دارد:

$$۱+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۴^{۲}}+\frac{۱}{۴^{۳}}+\dots$$

ارشمیدس، هیچگاه نگفت که مجموع تصاعد در **حد** خود به $\frac{۴}{۳}$ می‌رسد ویاکلماتی نظیر آنرا به‌کار نبرد؛ او فقط بیان داشته است که‌مهم آن است که هرتعداد ازجمله‌های فوق رادر نظربگیریم بازمجموع آنها از $\frac{۴}{۳}$ تجاوز نمی‌کند.

همچنین، به‌وسیلهٔ پاره‌ای تاریخ نویسان ادعا شده است که حتی اگر برخی ریاضیدانان یونانی مواجه باامکان به‌کار بردن آلگوریتم فیثاغورسی برای عددهای گنگ، به‌صورت جذر، می‌شوند انجام‌آن به‌علت فقدان‌شرایط

لازم فنی امکان‌پذیر نبود. چنین بحث و گفتگوئی نیز پایه‌ای ندارد: درواقع کتاب و هم «مقدمات» اقلیدس یك نظریهٔ جامع از دوجمله‌ایهائی به‌صورت $A + \sqrt{B}$ را ارائه می‌کند که شامـل همهٔ عملیات لازم برای گسترش این عددهای گنگ به‌صورت کسرهای مسلسل است.

## ۳

با اینحال، یك جنبه برای تقریب ارشمیدس وجود داردکه حدس در بارهٔ کسرهای مسلسل را مورد شکی منطقی قرار می‌دهد. در فصل گذشته دیدیم که گسترش $\sqrt{۳}$ به‌طیف متناوب (....،۲،۱،۲،۱،۱) منجرمی‌شود. دوازده همگرای اول این گسترش عبارتند از:

$$F_{۱} = ۱ \quad F_{۴} = \frac{۷}{۴} \quad F_{۷} = \frac{۷۱}{۴۱} \quad F_{۱۰} = \frac{۳۶۲}{۲۰۹}$$

$$F_{۲} = ۲ \quad F_{۵} = \frac{۱۹}{۱۱} \quad F_{۸} = \frac{۹۷}{۵۶} \quad E_{۱۱} = \frac{۹۸۹}{۵۷۱} \qquad (۳-۱۳)$$

$$F_{۳} = \frac{۵}{۳} \quad F_{۶} = \frac{۲۶}{۱۵} \quad F_{۹} = \frac{۲۶۵}{۱۵۳} \quad F_{۱۲} = \frac{۱۳۵۱}{۷۸۰}$$

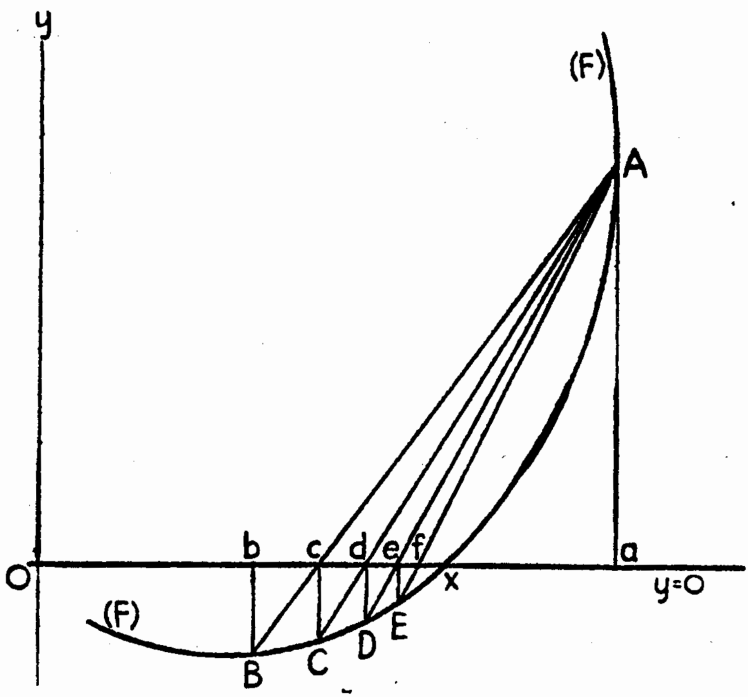
ملاحظه می‌شود بااینکه دوکسر مربوط به‌نابرابری (۱۳-۱)درمیان این همگراها وجوددارند، ولی همگراهای پی‌درپی نیستند. برای تعیین $F_{۱۲}$ توسط آلگوریتم اقلیدسی باید ابتدا $F_{۱۱}$ را محاسبه‌کرد. اما اگر ارشمیدس $F_{۱۱}$ را دردست داشت، چرا آنرابه‌کار نبرد تا بتواند **نابرابری** دقیقتر زیر را بدست آورد؟

$$\frac{۹۸۹}{۵۷۱} < \sqrt{۳} < \frac{۱۳۵۱}{۷۸۰}$$

## ۴

عبارتی از کتاب «متریکا» اثر هرو، کلیدی از این معما بدست می‌دهد. این کتاب در میان سایر مسائل تاریخی ارزشمند شامل **فرمول مساحت** مشهوری است‌که موضوع فصل آینده است. کاربرد این فرمول به‌طورکلی به‌**ارزیابی** تقریبی‌**ریشهٔ دوم** احتیاج دارد، وبدین ترتیب هرو موقع رابرای آنکه بخواننده بیاموزد چگونه چنین عملی را «بادقت وسرعت» باید انجام داد مغتنم شمرده است. آلگوریتم هرو روشی است‌که امروز می‌توان آنرا

درعداد **میان‌گذاری تکراری خطی** قرار داد.




شکل ۲۶

در حالیکه هرو آن را برای بدست آوردن ریشهٔ دوم و ریشهٔ سوم به‌کار برده است، شیوهٔ کارتا حد زیادی عمومی است، ودرحقیقت می‌توان ازآن برای‌حل معادلهٔ $F(x) = 0$، که درآن $F(x)$ **شامل‌همهٔ توابع‌گویای یك مجهوله است** استفاده کرد.

درشکل۲۶، منحنی $F$ نمایش تغییرات تابع $y = F(x)$ است. طول ازمبداء «قطب» $A$ عددی است گویاوتاحد «منطقی وممکن» به‌مقدارواقعی ریشهٔ $x$ نزدیك است، $b$ یکی دیگرازاین عددهای‌گویااست، و $B$ نقطهٔ‌متناظر آن بر روی منحنی $(F)$. خط $AB$ محور $x$ را درنقطه‌ای بـا طول $c$ قطع می‌کند:

ظرافت این اصل درآن است‌که $c$ برای $x$ تقریبی‌گویا ومناسبتر است تاعددهای‌گویای $a$ و $b$. بااجرای همین‌روش دربارهٔ $c$، عددگویای $d$ بدست

می‌آیدکه تقریبی‌است قابل قبولتر از $c$ برای $x$. نتیجه می‌شود که باتکرار عمل‌آلگوریتم، می‌توان‌باهرتقریب دلخواه به‌ریشهٔ $x$ نزدیك شد، **سرعت همگرا** به‌مقدار زیادی به‌انتخاب قطب $A$ بستگی دارد.

## ۵

برای بـدست آوردن مقدار $\sqrt{R}$، آلگوریتم بـه تکرار فرمول زیر منجرمی‌شود:

$$U_{n+1} = \frac{aU_n + R}{U_n + a} \qquad (۵-۱۳)$$

برای مثال به‌نمونه‌ای که در «متریکا» بررسی شده است توجه‌کنیم: $\sqrt{۷۲۰} = ۱۲\sqrt{۵}$. اگر $a = ۲$ باشد، دراینصورت

$$U_{n+1} = \frac{U_n + ۵}{U_n + ۲}$$

با انتخاب مقدار اولیه برای $U_1$ برابـر $U_1 = a = ۲$ به تساویهای زیرمی‌رسیم:

$$U_1 = ۲ ، U_2 = \frac{۹}{۴} ، U_3 = \frac{۳۸}{۱۷} ، U_4 = \frac{۱۶۱}{۷۲}$$

وآخرین جمله برای $\sqrt{۷۲۰}$ تقریب $\frac{۱۶۱}{۶}$ را می‌دهد کـه نتیجهٔ ارائه شده به‌وسیلهٔ هرو است.

استخراج $\sqrt[3]{R}$ به‌تکرار فرمول زیر مربوط می‌شود:

$$U_{n+1} = \frac{aU_n^2 + a^2U_n + R}{U_n^2 + aU_n + a^2} \qquad (۶-۱۳)$$

به‌عنوان مثال مقدار $\sqrt[3]{۱۰}$ را پیدا می‌کنیم. در اینجا $R = ۱۰$ و برای $a$ بزرگترین عدد صحیح که در $\sqrt[3]{۱۰}$ موجود است درنظر می‌گیریم و بدین ترتیب:

$$U_{n+1} = \frac{۲U_n^2 + ۴U_n + ۱۰}{U_n^2 + ۲U_n + ۴} \qquad (۷-۱۳)$$

اگر $U_1 = a = ۲$ باشد؛ در اینصورت $U_2 = \frac{۱۳}{۶}$ و $U_3 = \frac{۱۰۱۰}{۴۶۹}$، که‌انحراف

آن از مقدار جدول $\sqrt[3]{10}$ که ۲/۱۵۳۶ است کمتر از ۰/۰۰۰۱ خواهد بود.

## ۶

اینك باز گردیم به‌شیوهٔ هرو برای استخراج ریشهٔ دوم، و بررسی کنیم که چگونه‌درحالت $\sqrt{3}$ عمل می‌کند. بدین منظور درفرمول(۱۳-۵) می‌گذاریم $R=3$ وهردوجملهٔ متوالی را درتکرار جریان کار به‌وسیلهٔ $U_n$ و $U_{n+1}$ نمایش می‌دهیم؛ نتیجه رابطه به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$U_{n+1}=\frac{aU_n+3}{U_n+a} \qquad (13\text{--}8)$$

همانطورکه قبلا گفتم، دنبالهٔ مزبور برای هرمقدار انتخابی گویائی جهت **مقدار اولیه** $G$ همگرابا $\sqrt{3}$ خواهد بود. بااینحال، روشن است که انتخاب **عامل** $G$ اثر قطعی برسرعت بدست آوردن همگرا دارد. به‌دلائلی که ذکرشان در اینجا بیمورد است، هرو $a$ را برابر $\frac{5}{3}$ انتخاب کرد. این انتخاب به‌فرمول

$$U_{n+1}=\frac{5U_n+9}{3U_n+5} \qquad (13\text{--}9)$$

منجر می‌شودکه چهار جملهٔ اول آن عبارتنداز:

$$\frac{5}{3} \qquad \frac{26}{15} \qquad \frac{265}{153} \qquad \frac{1351}{780} \qquad (13\text{-}10)$$

اینك‌دوجملهٔ‌آخر همان است‌که **در نابرابری ارشمیدس برای** $\sqrt{3}$ واردمی‌شود. آیااین‌امراتفاقی‌بوده‌است؟ مشکل! مطمئناًهرو‌برای بیان‌روش کار خود اشاره‌ای به‌ارشمیدس ویا منابع قبلی آن دربارهٔ این موضوع‌نکرده است. وبا اینحال این مسئله‌کاملا غیر قابل درك است‌که عالم برجسته‌ای که کاملا به کتابخانه اسکندریه دسترسی داشته است بامسئله مهمی مانند **دایره سنجی** (*Cyclometry*) بیگانه‌باشد. بسیارمحتمل‌است‌که روش بیان شده در «متریکا»کشف خود هرو نبوده، وبرای ارشمیدس وحتی پیشینیان‌او نیز دانسته بوده است.

در حقیقت، پشت‌سر این روش اندیشه‌هائی است‌که به‌طورکامل‌درحد دانش ریاضیات‌کلاسیك می‌باشد. مثلا قدمهای مجزا دراین روند برپایهٔ‌میان

گذاری خطی است که رویهمرفته طبیعی‌ترین راه نزدیك شدن به‌فن تقریب است. اما دربارهٔ خود روند، یك «حدس منطقی خوب» زده می‌شود و این حدس درقضیه تکرار می‌شودتانتیجهٔ حاصله ازمقدار اولی که حدس زده‌شده به جواب نزدیکتـر باشد. این طرح به‌طور وسیع دردورهٔ کلاسیك مورد استفاده‌قرارمی‌گرفت‌ودرکتابهای درسی لاتین دربارهٔ ریاضیات به‌نام *Regula falsi* خوانده می‌شد.

## ۷

چهار تقریب مربوط به‌هرو برای $\sqrt{3}$ که در (۱۳-۱۰) ذکر شده، همگی همگراهائی در گسترش $\sqrt{3}$ به کسرهای مسلسل‌اند. علاوه‌براین، می‌توان نشان دادکه **دنبالهٔ بینهایت حاصل از تکرار (۱۳-۹) همگی از چنین همگراهایی به‌وجود آمده‌اند.** در واقع اگر همگراهای ردیف $n$را، مانند قبل، با $F_n$ نمایش دهیم، عبارتهای مربوط به‌دنبالهٔ بینهایت رامی‌توان به شکل زیر بیان داشت.

$$F_{۲}، F_{۶}، F_{۹}، F_{۱۲}، \ldots، F_{۳p}\ldots \qquad (۱۳\text{-}۱۱)$$

درپرتو این روشنائی، بررسی آلگوریتم هرونی، نوعی کمانه‌کردن سریع از روی آلگوریتم اقلیدس خودنمائی می‌کند، که‌نتیجهٔ خالص آن‌تسریع عمل آلگوریتم اقلیدس است. و این همهٔ مطلب نیست؛ تکرار به‌کاربرده شده به‌وسیلهٔ هرو درست‌کاربرد مخصوص خاصیت کلی موجود در رابطهٔ زیر است:

$$H(Fm، F_n)\frac{FmF_n+۳}{Fm+F_n}=Fm+n \qquad (۱۳\text{-}۱۲)$$

برای روشن شدن مطلب به $F_{۱۲}$ توجه‌کنیم. بنابر رابطهٔ (۱۳-۱۲) می‌توان این همگرا رابه‌چندین طریق‌اندازه‌گرفت. بدین ترتیب

$$F_{۱۲}=H(F_{۵}، F_{۷})=\frac{۱۹\times ۷۱+۳\times ۱۱\times ۴۱}{۱۹\times ۴۱+۱۱\times ۷۱}=\frac{۲۷۰۲}{۱۵۶۰} \qquad (\text{الف})$$

$$F_{۱۲}=H(F_{۶}، F_{۶})=\frac{۲۶\times ۲۶+۳\times ۱۵\times ۱۵}{۲\times ۱۵\times ۲۶}=\frac{۱۳۵۱}{۷۸۰} \qquad (\text{ب})$$

$$F_{۱۲}=H(F_{۴}، F_{۸})=\frac{۷\times ۹۷+۳\times ۴\times ۵۶}{۷\times ۵۶+۴\times ۹۷}=\frac{۱۳۵۱}{۷۸۰} \qquad (\text{ج})$$

بعلاوه، می‌توان همگراهای بیست‌وچهارم را بدون دخالت مراحل واسطه‌ای ازدوازدهمی بدست آورد:

$$F_{۲۴}=\frac{F_{۱۲}{}^{۲}+۳}{۲F_{۱۲}}=\frac{۱۳۵۱^{۲}+۳\times ۷۸۰^{۲}}{۲\times ۱۳۵۱\times ۷۸۰}$$

مخرج این همگرا از ردیف ۱۰۶ است، در نتیجه کسر فوق با تقریبی کمتر از $۱۰^{-۱۲}$ برابر است با $\sqrt{۳}$.

## ۸

قرابت جالب توجه بین آلگوریتمهای اقلیدس وهرو، نتیجهٔ قضیه‌ای مربوط به لاگرانژ دربارهٔ **کسرهای دوره‌ای مسلسل است**. اثبات این‌قضیه خارج از دیدگاه این‌کتاب است، بااینحال برای تکمیل موضوع باید اضافه کنم‌که قضیهٔ لاگرانژ شامل اکثریت دستهٔ گنگهای از نوع $\sqrt{R}$ می‌باشد، که درآن $R$ عددی است صحیح و مثبت. در نتیجه رابطهٔ بین دوآلگوریتم نیز می‌تواند به‌اغلب عددهای گنگ از دستهٔ فوق تعمیم داده شود، زیرا باقید احتیاط وبدون آنکه دراینجا بخواهیم براین امر پافشاری‌کنیم، رابطه

$$H\ (F_{\mathrm{m}}\ ,\ F_{\mathrm{n}})=\frac{F_{\mathrm{m}}F_{\mathrm{n}}+R}{F_{\mathrm{m}}+F_{\mathrm{n}}}=F_{\mathrm{m+n}} \qquad (۱۳-۱۳)$$

بـرای همگـراهای به شکـل عمومی گنگ $\sqrt{R}$ اعتبـار خود را حفظ می‌کند.

اثرلاگرانژ دراین‌باره درحدود سال ۱۷۷۵ به‌وجودآمد. بنابراین این دوحادثهٔ‌مهم‌را، که ذکرآن رفت، بیش‌ازدو هزارسال از یکدیگرجدا می‌سازد. استدلال‌وشکل‌عملی که لاگرانژبرای‌اثبات‌قضیهٔ خود به‌کاربرد، ونتیجهٔ‌قرابت بین‌این‌دوشیوه، شامل ملاحظاتی‌درزمینهٔ‌جبرونظریهٔ‌عددهااست‌که به‌طورکلی خارج از معرفت ریاضیدانان یونانی بوده است. به‌فرض‌آنکه‌به‌قول‌معروف فن محاسبه‌ای‌که به‌نامعادله منجر می‌شود خارج ازدانش ریاضی‌آنها نباشد، با اینحال یك سئوال گیج کننده باقی می‌ماند که انتخاب مقدار اولیهٔ $\frac{۵}{۳}$ از طرف آنها برچه پایه‌ای بوده است.

# فصل چهاردهم

## فرمول هرو (Hero)

ریاضیدان‌مانند یك فرانسوی‌است: به‌او چیزی‌میگوئی
او آن را به‌زبان خودش ترجمه می‌کند وفوراً مطلب
صورت دیگری پیدا کند.

گوته (Goethe)

۱

دربارهٔ زندگی هرو نیز مانند اقلیدس چندان چیزی نمی‌دانیم؛ و در واقع‌چیز کمتری. زیرا درحالیکه‌می‌توان ظهور «مقدمات» رابه‌طورمشخص در سال ۳۰۰ قبل از میلاد دانست؛ همهٔ آنچه را که در بارهٔ هرو می‌توان گفت آن است‌که اودرقرن‌اول در اسکندریه جلوه‌کرد. بدبختانه ماداری‌دو نوع قرن اولیم، وتاکنون نیز روشن نشده است‌که آیا فعالیتهای او مربوط به‌قرن اول قبل از میلاد بوده است یا به‌قرن اول بعداز میلاد. یك امر مسلم است‌که‌کتابهای «متریکا» ودیوپترا»ی (*Diobtra*) هرو از نظر زمان برمجسطی بطلیموس» پیشی داشته است، وخود بطلیموس درحدود ۱۵۰ بعداز میلاد می‌زیسته است.

فرمول مشهور هرو عموماً به‌شکل زیر ارائه می‌شود:

$$T = \sqrt{S(s-a)(s-b)(s-c)} \qquad (۱-۱۴)$$

که در آن $a$ و $b$ و $c$ ضلعها، $T$ مساحت مثلث و $s = \frac{۱}{۲}(a+b+c)$

**نصف مجموع ضلعها** است. برای اثبات قضیه، هرو برای مثلث خود ضلعهای زیـر را در نظر گرفت؛ $a=۷$ ، $b=۸$ و $c=۹$. در اینجـا $s=۱۲$ و $s-a=۵$ و $s-b=۴$ و $s-c=۳$ خواهد بود. از اینجا $T=\sqrt{۷۲۰}$ که هرو آنرا باشیوه‌ای که در فصل گذشته ذکر شد محاسبه کرد.

بهترین طریق رسیدن به‌این فرمول به‌وسیلهٔ قضیهٔ سطح مثلث است که برابراست **با نصف حاصل‌ضرب قاعده‌در ارتفاع**، واغلب کتابهای درسی‌از آن استفاده می‌کنند. برای محاسبه ارتفاع، ازقضیهٔ فیثاغورس استفاده می‌شود که قطعه‌های قاعده در آن وارد می‌گردد. و این خود بعدها با دستکاری پیچیدهٔ جبری حذف شده است. چنین اثباتی معمولاً همراه با این معذرت خواهی است که این راه مشکل نیست، بلکه فقط دست و پاگیر است. هر چند این برهان امروزه به‌نظرماکاملا ابتدائی می‌رسد، اما برای دوران هرو چیزی خارج از دانش زمان بوده است.

## ۲

دربرهان هرو، عنصر کمکی، ارتفاع مثلث نیست بلکه **شعاع دایرهٔ محاطی آن است.**

درشکل ۲۷ مرکز $J$ مربوط به‌دایرهٔ محاطی، به‌راسهای $A$، $B$ و $C$ وصل شده است.

سطحهای سه‌مثلث $BJC$، $CJA$ و$AJB$ به‌ترتیب برابرندبا، $\frac{۱}{۲}ra$، $\frac{۱}{۲}rb$و$\frac{۱}{۲}rc$؛ کـه در آنهـا $r$ شعاع دایرهٔ محـاطی است. از اینجـا

$$T=\frac{۱}{۲}r(a+b+c)=rs \qquad (۲-۱۴)$$

بنابراین، مسئله به‌بیان $r$ برحسب $a$، $b$ و $c$ تبدیل می‌شود. برای این منظور، هرو دایره‌ای محاطی خارجی مماس برامتدادهای $CA$، $CB$ و ضلع$AB$ راکه درداخل‌نقاط $A$ و $B$ قرارگرفته وارد عمل‌کرد. به‌این‌ترتیب توانست **قطعه‌های مماس** را برحسب ضلعهـای مثلث محاسبه کند که این خود معمای برهانش بود. به‌سادگی نشان داده شده است که

$$AV=AW=s-a \text{ و } BW=BU=s-b \text{ و } CU=CV=s-c$$

$$AV'=s-b \text{ و } CV'=s$$

وقتی این مطلب ثابت شد، بقیهٔ موضوع به‌مثلثهای متشابه مربوط

می‌گردد. مراکز $J$ و $E$ بر روی منصف الزاویهٔ $C$ قرار دارند و مثلثهای $JVC$ و $EV'C$ متشابه‌اند؛ ازآنجا، اگر شعاع دایرهٔ محاطی خارجی‌را باρ مشخص‌کنیم، خواهیم داشت

$$\rho : r = (s-c) : s$$

ازطرف‌دیگر $JAE$ زاویه‌ایست‌قائمه‌ودرنتیجه‌مثلثهای قائم‌الزاویهٔ $JVA$ و $EV'A$ نیز متشابه‌اند؛ به عبارت دیگر:

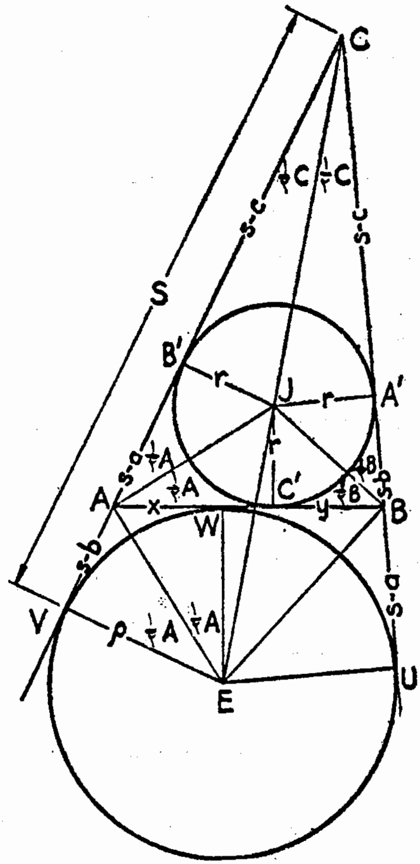
$$r : (s-a) = (s-b) : \rho$$

بین دورابطه ρ را حذف می‌کنیم، خواهیم داشت:

(۳-۱۴)

$$r^{۲} = \frac{(s-a)\ (s-b)\ (s-c)}{s}$$

و از ترکیب این رابطه با (۲-۱۴) فرمول هرو بدست می‌آید.

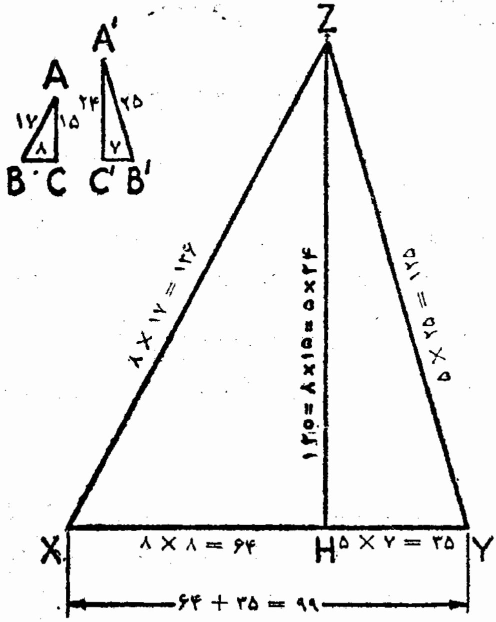


شکل ۲۷

۳

هرو شیوهٔ کار را با چند مثال نشان می‌دهد. در هریك از حالتها، ضلعهای مثلث‌عددهایی صحیح‌اند. او به‌طورکامل به‌این امرکه **سطح چنین مثلث صحیحی عموماً عددیست گنگ** آگاهی دارد. با اینحال، او بدون ارائه برهان، وجود بینهایت مثلث‌راکه اضلاعشان عددهایی‌گویا ودارای سطح‌گویا هستند تأیید می‌کند. امروز ماچنین مثلثهائی را **سه‌تائیهای هرو** می‌نامیم. **باتوجه به** $T = \frac{۱}{۲}ab$ **روشن‌است‌که تمام‌سه‌تائیهای‌فیثاغورس**

**سه‌تائیهای هرو نیز هستند.** در حال حاضر خواهیم دید که با ترکیبی صحیح از دوسه‌تائی فیثاغورسی می‌توان حداقل یك سه‌تائی هرو به‌وجود آورد. ترسیم مربوطه در شکل ۲۸ نمایش داده شده است، در این ترسیم $ABC$ و $A'B'C'$ دو مثلث فیثاغورسی‌اند و $zx$ و $zy$ به‌ترتیب موازی با




شکل ۲۸

$AB$ و $A'B'$. هرگاه فرض‌کنیم $h = oz$ **کوچکترین‌مضرب مشترك‌عددهای صحیح b و b' باشند:** دراینصورت می‌توان نوشت $h = Nb = N'b'$، که در آن $N$ و $N'$ نسبت به‌یکدیگر اول‌اند. بامثلثهائی متشابه می توان اضلاع $xyz$ را به‌شکل

$$x = N'c' \text{ و } y = Nc \text{ و } z = Na + N'a' \quad (۴\text{-}۱۴)$$

بدست‌آورد. این مثلث هرونی‌است، زیرا سطح آن $T = \frac{۱}{۲} hz$ عددی است صحیح ، درشکل ۲۸ سه‌تائیهای فیثاغورسی عبارتند از(۸، ۱۵؛ ۱۷) و(۷، ۲۵،۲۴)وخواننده‌تصدیق خواهدکردکه سه‌تائی هرونی منتج‌ازآن‌عبارتست از (۱۲۵ ، ۱۳۶ ، ۹۹).

## ۴

راه حل زیباتری برای قضیهٔ هرو توسط براهماگوپتا (*Brahmagupta*) ریاضیدان هندی قرن هفتم بعداز میلاد، ارائه شده است. اوپارامترهای $\alpha$ و $\beta$ و $\gamma$ را به‌صورت زیر درنظر گرفت:

$$\alpha=\frac{s-a}{r}=cotg\frac{A}{۲},\ \beta=\frac{s-b}{r}=cotg\frac{B}{۲},$$

$$\gamma=\frac{s-c}{r}=cotg\frac{C}{۲} \qquad (۵\text{-}۱۴)$$

فرض کنیم که $A$ و $B$ زاویه‌های حادهٔ مثلث باشند. در اینصورت $\alpha$ و $\beta$ بزرگتراز ۱، اما $\gamma$ بزرگتر، مساوی یاکوچکتراز۱ خواهد بود، برحسب آنکه $C$ حاده،قائمه یا منفرجه‌باشد. ازطرف دیگر $\alpha$،$\beta$و$\gamma$ مستقل‌ازیکدیگر نیستند. این سه‌پارامتر بارابطهٔ زیر به‌یکدیگر مربوطند:

$$\alpha\beta\gamma=\alpha+\beta+\gamma \text{ یا } \gamma=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta-۱} \qquad (۶\text{-}۱۴)$$

که این رابطه مسئله رابه **دودرجه آزادی** تبدیل خواهدکرد.

## ۵

این ملاحظات‌برای هرزاویهٔ قائمه‌ای معتبراست، اما درحالت‌سه‌تائی هرونی، شعاع $r$ گویا ودر نتیجه **پارامترهای** $\alpha$،$\beta$و$\gamma$ **عددهایی گویاهستند.** برعکس، هرگاه **مجموع سه‌عدد گویا برابر با حاصلضرب آنها، و دوتا از** این عددها بزرگتر از یک باشد، در اینصورت آنها را می‌توان به‌مثابهٔ **پارامترهای براهماگوپتا** جهت سه‌تائی هرونی درنظرگرفت. در واقع، تا حدی‌که تنها فرم مسئله مورد نظر باشد، این سه‌تائی به‌طور کامل توسط رابطهٔ زیر تعریف می‌شود:

$$\frac{a}{\beta+\gamma}=\frac{b}{\gamma+\alpha}=\frac{c}{\alpha+\beta} \qquad (۷\text{-}۱۴)$$

برای روشن شدن مطلب، فرض‌کنیم $\alpha=۲$ و $\beta=\frac{۷}{۴}$ باشد، نتیجه می‌شودکه $\gamma=\frac{۳}{۲}$. برای این سه کسر مخرج مشترك گرفته، آنرا حذف می‌کنیم وبدین ترتیب عددهای صحیح ۸، ۷ و۶، واز آنجاسه‌تائی(۶ + ۷، ۸ + ۶، ۷ + ۸) وبه‌عبارت دیگر (۱۳،۱۴،۱۵) بدست می‌آید.

مثال دیگر: فرض کنیم $\alpha = ۳$ و $\beta = ۷$ باشد، دراینصورت $\gamma = \frac{۱}{۲}$ و این به‌آنمعنی‌است که‌زاویهٔ $C$ منفرجه است؛ روش قبل‌را دنبال می‌کنیم و عددهای صحیح ۶،۱۴ و۱ بدست می‌آیدکه به‌سه‌تائی (۲۰،۱۵،۱۷) منجر خواهد شد.

وقتی بااین واقعیت روبرو می‌شویم که راه‌حل براهماگوپتا با قبول $\gamma = ۱$ همهٔ مجموعهٔ سه‌تائیهای فیثاغورسی را دربر می‌گیرد، این فرمول‌با شکوه بیشتری خودنمائی می‌کند.

درواقع هرگاه $\alpha = \frac{p}{q}$ باشد، در اینصورت $\beta$ برابر $(p+q)(p-q)$ می‌شود ومعادلهٔ (۱۴-۷) به‌رابطهٔ زیر منجر خواهد شد:

$$\frac{a}{۲pq} = \frac{b}{p^۲ - q^۲} = \frac{c}{p^۱ + q^۲} \qquad (۸\text{-}۱۴)$$

نتیجه‌آنکه $p$ و $q$ پارامترهای‌فیبوناچی مربوط به‌سه‌تائی فیثاغورسی‌اند (به فرمول (۹--۷) از فصل ۹ مراجعه شود).

## ۶

در میان سه‌تائیهای هرونی که در «متریکا» مورد بررسی قرار گرفته است به‌یک‌دسته عددهای متوالی صحیح (۱۵،۱۴،۱۳) برمی‌خوریم. هرو به‌سه‌تائیهای دیگری از عددهای متوالی دسترسی پیدا کرد، واحتمالا باید حدس زده باشد که تعداد این نوع «سه‌تائیها» بینهایت است. بااینحال، نتوانست روشی‌بااسلوب برای به‌وجودآوردن چنین سه‌تائیها ارائه دهد.در این زمینه، ریاضیدانان هندی و عرب نیز بیش از این پیشرفت نکردند. در زمان حاضر، تحقیق دراین‌باره به‌گسترشی چشم‌گیر ومهم در زمینهٔ حساب عالی منجر شده است. دراین موردنیز مانند سایر فصول تاریخ نظریهٔعددها کاربا فرما شروع شده است.

می‌بینیم که جملهٔ میانی در دسته عددهای هرونی باید زوج باشد،در غیر اینصورت نصف محیط $s$ از سه‌تائی عددی صحیح نخواهد بود. در این حال خواهیم داشت $b = ۲x$ ونتیجه آنکه:

$$a = ۲x - ۱ \text{ ،} b = ۲x \text{ ،} c = ۲x + ۱ \text{ ،} ۲s = ۶x$$
$$s - a = x + ۱ \text{ ،} s - b = x \text{ ،} s - c = x - ۱ \text{ ،} s = ۳x \qquad (۹\text{-}۱۴)$$
$$T = x\sqrt{۳(x^۲ - ۱)}$$

بنابراین، مشکل دراینجاست که $x$ را طوری انتخاب کنیم که $۳(x^۲-۱)$ مجذور کامل باشد؛ یا آنکه با بیانی مشابه $x^۲-۱$ به‌شکل $۳y$ درمی‌آید، که در آن $y$ نیز عددی است صحیح. بنابراین به‌این نتیجه‌می‌رسیم که تمام جوابهای صحیح معادلهٔ زیر را بدست آوریم:

$$x^۲ - ۳y^۲ = ۱ \qquad (۱۰-۱۴)$$

معادله‌هائی از این نوع به‌نام معادلات پل ($Pell$) مشهورند وشکل کلی‌آن به‌صورت زیر است:

$$x^۲ - Ry^۲ = ۱$$

و در آن $R$ عددیست که **مجذورکامل نیست**، مطلب جالب آن است که جان پل ریاضیدان گمنام انگلیسی، که این معادله نام اورا به‌خود گرفته است، هیچ‌کاری درزمینهٔ فرمول‌بندی وحل این مسئله صورت نداده‌است. این کاررا فرما اندکی قبل ازمرگش پیشنهادکردوبا آن ریاضیدانان انگلیسی را به‌مبارزه طلبید. ما از راه حل خود فرما نیز سابقه و مدرکی در دست نداریم وراه‌حلی‌که به‌والیس نیز نسبت داده می‌شود، به‌هیچوجه قانع‌کننده نیست. درست برخلاف آن راه حلی‌کـه صد وچند سال بعد از طرح مسئله توسط لاگرانژ پیشنهـاد شده، نمونه‌ای از زیبائی، سادگی و دقت در کار است.

## ۷

لاگرانژجواب‌معادلهٔ پل-فرما رااز پاره‌ای خواص اولیه‌درجمله‌ایهای از نوع $x + y\sqrt{R}$ بدست آورد؛ که در آن $R$ عددی است غیر مجذور کامل و$x$ و$y$ عددهایی غیرمشخص و گویا هستند. به‌خصوص $x$ و $y$ ممکن است عددهایی صحیح باشند ودر آنچه‌که درزیر می‌آید ماچنین موردی‌رادر نظر می‌گیریم. به سهولت می‌توان این خواص را در لمهای زیر ارائه داد.

لم‌الف. **حاصلضرب دو دوجمله‌ای بامدول R دوجمله‌ای است با همان‌مدول.** اگر این گفته رابا علامتهانشان دهیم، داریم:

$$(x + y\sqrt{R})(x' + y'\sqrt{R}) = (xx' + Ryy') + (xy' + x'y)\sqrt{R} \qquad (\text{الف})$$

لم‌ب: باکاربرد تکراری‌لم‌الف بدست می‌آیدکه توان یك دوجمله‌ای با مدول $R$ دو جمله‌ای است با همان مدول. بیان این مطلب با علامتها اگر $n$ عددی غیر مشخص، ولی صحیح ومثبت باشد، چنین است:

$$(x + y\sqrt{R})^n = X + Y\sqrt{R} \qquad (\text{ب})$$

که درآن $X$ و $Y$ وهمچنین $x$ و $y$ باید عددهایی صحیح باشند.

لم‌ج-هرگاه دودوجمله‌ای مزدوج به‌توان معین $n$ برسند، دوجمله‌ایهای حاصل مزدوج‌اند یعنی:

$$\left.\begin{aligned}(x+y\sqrt{R})^n=X+Y\sqrt{R}\\(x-y\sqrt{R})^n=X-Y\sqrt{R}\end{aligned}\right\}\qquad (ج)$$

لم‌د- با ترکیب این خواص نتیجه می‌شود که: هرگاه داشته باشیم: $(n+y\sqrt{R})^n=X+Y\sqrt{R}$ ، دراینصورت خواهیم داشت: $(x^2-Ry^2)^n=X^2-RY^2$.

آخرین لم امکان می‌دهد تا بینهایت جواب برای معادلهٔ پل بدست آوریم؛ به‌شرط آنکه یك جواب آن معلوم باشد.

در واقع، فرض کنیم که $p$ و $q$ دوعدد صحیح‌اندکه در معادلهٔ پل با مدول $R$ صادق‌اند؛ به عبارت دیگرآنکه $p^2-Rq^2=1$. اینك یك توالی بینهایت از دوجمله‌ای را به‌شکل زیردر نظر می‌گیریم:

$$p_2+q_2\sqrt{R}=(p+q\sqrt{R})^2 و p_3+q_3\sqrt{R}=(p+q\sqrt{R})^3،\ldots.$$

$$\ldots\ldots\text{ و غیره}\ldots\ldots\text{ وغیره}\ldots\ldots\qquad (۱۲-۱۴)$$

در اینصورت به‌اتکای لم‌د:

$$p_2^2-Rq_2^2=1\ldots\ldots p_n^2-Rq_n^2=1،\ldots$$

بنابراین، گروههای $(p_2،q_2)$، $(p_3،q_3)$، ...، $(p_n،q_n)$ ریشه‌های معادلهٔ پل بامدول $R$اند.

جهت روشن شدن مطلب در معادلهٔ $x^2-7y^2=1$ عددهایی $x=8$ و $y=3$ صادق‌اند. معلوم می‌شود

$$(8+3\sqrt{7})^2=127+48\sqrt{7}$$

بنابراین به‌روشنی محقق است که $x=127$ و $y=48$ نیزریشه‌های معادله‌اند.

علیهذا، اگر معادلهٔ $x^2-Ry^2=1$ **بتواند یك جواب راپذیرد، می‌تواند بینهایت جواب داشته باشد.** اما با اینحال نیزمسئله به‌هیچوجه حل نشده است. دوسئوال باقی می‌ماند: **اول،** آیـا ریشه‌ها همیشه وجود دارند؟ **دوم،** اگر وجود داشته باشند، آیا آلکوریتم لاگرانژ (۱۴-۱۲) می‌تواندهمهٔ جوابهارا از یك **پایهٔ واحد** به‌وجود بیاورد ؟ لاگرانژ به‌وسیلهٔ یك استدلال زیرکانه، که بعدها توسط گوس و دیریکله ساده شد، ثابت کرد **که ریشه‌ای به‌مثابهٔ پایه همیشه وجود دارد. واین پایه برای تمام مقادیر R منحصر به‌فرد است.**

تعیین این ریشهٔ پایه، و یا **حداقل**، برای هریك ازمقادیر $R$ مسئلهٔ دیگری است. درحالت $R=۱۳$، ریشهٔ حداقل عبارت است از $x=۶۴۹$، $y=۱۸۰$؛ درصورتیکه برای $R=۹۴$، $x$ و $y$ شش رقمی خواهند بود. با اینحال، با دنبالـه روی از قضیهٔ بنیادی اولر، جواب آسانتـر بدست می‌آید:

اگر $x$ و $y$ جوابهـای معـادلهٔ $x^۲-Ry^۲=۱$ باشند، در اینصورت $\frac{x}{y}$ درگسترش $\sqrt{R}$ به کسرهای مسلسل، همگرا خواهد بود.

## ۸

اینك به‌مسئلهٔ‌تعیین تمام دسته‌های‌متوالی هرونی بپردازیم. درقسمت ۶دیدیم‌که مسئله به‌معادلهٔ پل منجر می‌شود:

$$x^۲-۳y^۲=۱$$

که‌درآن$x$۲عبارت‌میانی سه‌تائی‌است؛روشن است‌که جواب‌**حداقل**این‌معادله عبارتست از $x=۲$ و $y=۱$. آلگوریتم لاگرانژ دو جمله‌ایهای زیر را به‌ما می‌دهد:

$(۲+\sqrt{۳})^۲=۷+۴\sqrt{۳}$، $(۲+\sqrt{۳})^۳=۲۶+۱۵\sqrt{۳}$ و...

جدول زیر نتیجهٔ مورد نظر را برای شش سه‌تائی نشان می‌دهد:

| $x$ | $r=y$ | $a$ | $b=۲x$ | $c$ | $T=۳xy$ | $\frac{x}{y}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ۲ | ۱ | ۳ | ۴ | ۵ | ۶ | $F_۲$ |
| ۷ | ۴ | ۱۳ | ۱۴ | ۱۵ | ۸۴ | $F_۴$ |
| ۲۶ | ۱۵ | ۵۱ | ۵۲ | ۵۳ | ۱۱۷۰ | $F_۶$ |
| ۹۷ | ۵۶ | ۱۹۳ | ۱۹۴ | ۱۹۵ | | $F_۸$ |
| ۳۶۲ | ۲۰۹ | ۷۲۳ | ۷۲۴ | ۷۲۵ | | $F_{۱۰}$ |
| ۱۳۵۱ | ۷۸۰ | ۲۷۰۱ | ۲۷۰۲ | ۲۷۰۳ | | $F_{۱۲}$ |

باید یادآوری کرد که **پارامتر $\gamma$ شعاع دایرهٔ محاطی را نشان می‌دهد.**

ستون آخر نمایانگر پیوستگی سه‌تائیهای هرونی باهمگراهای حاصل از بسط $\sqrt{3}$، که درفصل قبل ارائه شد، می‌باشد.

# فصل پانزدهم

# وترهای هیپارك

حقیقت، توقفی است کوتاه بین دو دورهٔ کسالت بارو طولانی، که در طول دوران اول به‌نام سفسطه محکوم می‌گردد، ودر دوران دوم به‌مثابهٔ چیزی پیش‌پاافتاده نادیده گرفته می‌شود.

شوپنهاور (Schopenhouer)

## ۱

برای آدم ناآشنا به‌حالت‌دماغی وفکری ریاضیدانان یونان، داستانی که من آن رابیان می‌کنم، به‌نظر کاملاً غیر حقیقی می‌رسد. بااینحال، این داستان تاکید مجدد بر آن است کـه تاریخ به نظم و ترتیب احترام نمی‌گذارد.

در یکی از فصول اولیه، این گمان راکه دانش بابلی، درطول مراحل ساختمانی هندسه، از راههائی به‌یونان نفوذکرده است، بررسی کرده‌ام؛ این فرضیهٔ اخیراً تاآنجا پیش رفته‌که معین نفوذ حیرت‌آور آن درسه‌قرن ماقبل اقلیدس است. من این گمان را به‌کناری می‌گذارم، زیرا لوحه‌های گلی، تا آنجا که خوانده شده‌اند، بیش از پاپیروسهای مصری دلیلی برصحت این استدلال قیاسی ارائه نمی‌کنند.

در حقیقت دانش بابلی مآلاً در تفکر یونانی نفوذکرده است؛ اماتا آنوقت هندسهٔ کـلاسیك حتی به‌عنوان افتخار بابل، نیز به‌وسیلهٔ یونانیان

حذف شده بود. در واقع آن مرد یونانی که این واقعهٔ تاریخی را انجام داد هیپارك ستاره‌شناس بود که در ۱۵۰ سال قبل از میلاد به‌بارآمد، یعنی در زمانیکه آپولونیوس، ارشمیدس و هیپارك‌در عداد وقایع تاریخی گذشته بودند و خاطره‌ای بیش از آنهاباقی نمانده بود. اما دربارهٔ بابل، آخرین یادگار گذشتهٔ درخشان آن مجموعه‌ای از سالنامه‌های ستارگان بود که توسط کشیشهای کلدانی جمع‌آوری شده‌و به‌زمانهای گذشتهٔ دوردست، که‌خاطره‌ای بیش‌از آنها باقی نمانده بود، بازمی گشت.

هیپارك از این مدارك بابلیها در نوشتن رساله‌ای دربارهٔ نجوم بهرهٔ زیادی برده‌است. این رساله نیزمانند اثر مشابهی، که بعدها توسط منلائوس (*Menelaus*) نوشته شد، مفقودگردیده است. بااینحال اعتقاد برآن است که جنبه‌های‌اساسی هردو رساله در «مجسطی»، اثر بطلیموس‌که ۱۵۰ سال بعدازمیلاد ارائه‌گردید، وارد شده است. بدبختانه اصل یونانی«مجسطی» نیز مفقود شده، وآن قسمتهائی ازکتاب‌که بدست مارسیده شکل لاتینی آن است که از نسخهٔ عربی ترجمه شده است! وشاهدی در دست نیست‌تابدانیم که مفسرین مشتاق عرب‌زبان، از خود چه‌مقدار برنسخهٔ اصلی یونانی‌آن افزوده‌اند.

تاچه حداین تردیدها باواقعیت‌سازگاراست، ازکلمهٔ «الجسطی»معلوم می‌شودکه مرکب است از حرف تعریف عربی الف ولام وترکیب خارجی ناموزون عنوان یونانی کتاب *Megale Syntaxis* به‌معنای «تألیف بزرگ».

محتمل است‌که درجریان حوادث، بسیاری ازنوآوریها، چه‌درزمینهٔ ریاضیات و چه در عرصهٔ نجوم، که به بطلیموس نسبت داده شده است، دستاوردهای دیگران باشد.

بدین ترتیب، شکی نیست که اولین کسی که سیستم بابلی را در اندازه‌گیریهای زمان و زاویه به‌کاربرد هیپارك بود. این واحدهای ۶۰ قسمتی بعداً به صورت *partes minutae primae gradi* و *partes minutae secundue* به‌شکل‌لاتین درآمده است؛ وآنها نیز به نوبهٔ‌خودبه *degree* (درجه) *minutes* (دقیقه) و *Secondes* (ثانیه) تبدیل شدند که خوشبختانه ویا بدبختانه تابه امروز باقی مانده‌اند.

## ۲

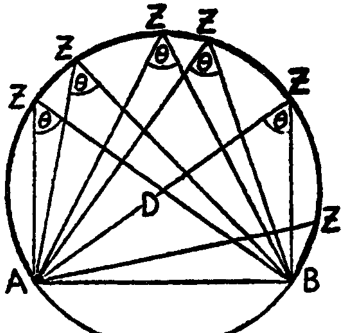
دراینجا بااین‌واقعیت گیج کننده روبرو هستیم که‌هندسهٔ یونان، زمانی

که هنوز اولین فصل مثلثات نوشته نشده بود، محصولی تکامل یافته بود. از همین نظر باید بگوئیم که اولین فصل مثلثات نیز دریونان نوشته نشد. «مجسطی» مشتمل بررساله‌ای جامع از **مثلثات کروی** است، امانه بطلیموس ونه جانشینان هنـدی و عرب زبـان او اشاره به کتابهای درسی در زمینهٔ **مثلثات مسطحه** نکرده‌اند.

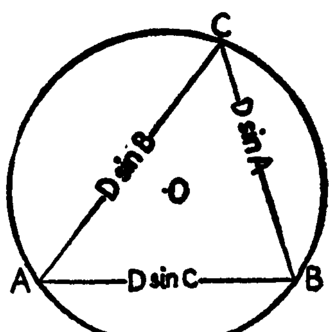
اما، هیپارك، منلائوس وبطلیموس ستاره‌شناس بودند و علاقهٔ آنها دربارهٔ مسائل کروی قابل درك است. موضوع گمراه‌کننده آن است که این مردان آشکارا، شتابزده وبی‌پروا در مثلثات کروی غوطه‌ور شده‌اند، بدون آنکه از مثلثات مسطحه، به‌مثابهٔ میانجی، استفاده کرده باشند. وبا اینهمه، در حالیکه‌سه‌نقطه برروی کره نمایانگر مثلثی کروی است، آنها همچنین به تعریف **مثلث مسطحه** نیـز پرداخته‌اند، و مطالعهٔ رابطه بین این دونوع بوده است که به قوانین مثلثات کروی منجر شده است

## ۳

با دقت بیشتر به‌این نتیجه می‌رسیم که بطلیموس آنچه‌را ما امروزه **مثلثات مسطحه** می‌نامیم مورد استفاده قرارداد، اما توفیق نیافت تاآنرابا عنوانی مفتخرکند. درواقع او همیشه، آنطور که اقلیدس آموخته بود، از قضایا و ساختمانهای هندسهٔ کلاسیك در بارهٔ مثلث کمك می‌گرفت؛ و در تحلیل آخر قواعد رسمی، که چنین برجسته درکتب درسی ماارائه شده‌اند، چیزی جز تأویل ماهرانهٔ این قضایای کـلاسیك بر حسب عبارتهایی از نسبتهای مثلثاتی نیستند.




شکـل ۲۹ الف




شکـل ۲۹ ب

بنابراین، همانطورکه من‌در فصل مربوط به‌**قضیهٔولر** نشان داده‌ام، آنچه که قاعدهٔ کسینوس نامیده می‌شود، به‌جز شکلی از قضیهٔ فیثاغورس نیست، **قانون‌نصف زاویه‌ها**نوعی المثنای عددی از خاصیت دایرهٔ محاطی است.

و همانطورکه دیده‌ایم به‌طور ضمنی در بدست آوردن فرمولی،که‌نام هرو را به خود گرفته، توسط خود او به‌کار رفته است. اما در بارهٔ قانون سینوسها، محتاج به‌بحث بیشتری هستیم. زیرا سینوس اساس و پایهٔ درك بطلیموس برای رسیدن به‌مثلثات بود.

در واقع، سینوس فقط یکی از شش نسبت مثلثاتی است که یونانیها به‌نامگذاری آن توفیق یافتند. این نام $\chi o\rho\delta\eta$ و یا به عبارت دیگر *The-chord* به‌معنای وتر، بود. پشت سر این عنوان، قضیهٔ **زاویهٔ محاطی** قرار داشت‌که به‌اقتضای‌موقعیت قبلاً[1] اشاراتی‌بدان شده است. درشکل۲۹ الف. *UW* وتری ثابت از دایره‌ای به‌قطر*D* است؛ رأس *V* از زاویهٔ محاطی می‌تواند برروی قوسی‌از دایره‌که‌وترمزبوررا دربردارد حرکت‌کند. به‌طوریکه مقدار زاویهٔ محاطی در ضمن این حرکت **ثابت بماند.**

نتیجه آنکه‌این‌مقدار به‌طور کامل‌به‌وسیلهٔ **نسبت وتر به‌قطر** مشخص می‌شود، وبرعکس نسبت $k$ منحصرا به‌وسیلهٔ زاویهٔ $\theta$ معین می‌گردد. کوتاه سخن، با استفاده از عبارتهای معمولی، $k$ **تابعی است‌از**$\theta$. این تابع را یونانیان $\chi o\rho\delta\eta$ می‌نامیدند. این عبارت تبدیل به‌ترجمهٔ لاتین‌آن *Chord* گردید وتا قبل از جانشینی آن به‌وسیلهٔ سینوس عبارتی متداول و مشخص کنندهٔ تابع مزبور بود.

بااین دیدگاه، قانون سینوسها نتیجهٔفرعی وبلاواسطهٔ این قضیه‌است که‌هرسه‌نقطهٔ غیرواقع‌بریك امتداد مشخص‌کنندهٔ فقط یك دایره هستندوبس. در نتیجه‌زاویه‌های*A*،*B*و*C* از هرمثلث‌را می‌توان به‌مثابهٔ**زاویه‌های‌محاطی** دایرهٔ معینی دانست، واضلاع متناظر *a*،*b* و*c* را **وترهای‌چنین دایره‌ای.**

در اینصورت هرگاه *D* قطر این دایره باشد، می‌توان نوشت:

$$a = D\sin A \quad b = D\sin B \quad C = D\sin C \qquad (۱-۱۵)$$

واین قانون سینوسها است (شکل۲۹-ب).

این تفسیر نمایشگر آن است که قانون سینوسها صفت انحصاری‌مثلث نیست، و اکنون خواهم دید که بطلیموس کاملا واقف به‌این امر بود، در واقع بحث قبلی‌رابه هرچند ضلعی محاطی، یعنی به‌هرچند ضلعی که رأسهای

آن برروی یك دایرۀ مشخص قرار نگرفته باشد، می‌توان سرایت داد. یکی از حالتهای مورد نظر **چهار ضلعی محاطی** است که نقش مهمی در روش بطلیموس دارد.

۴

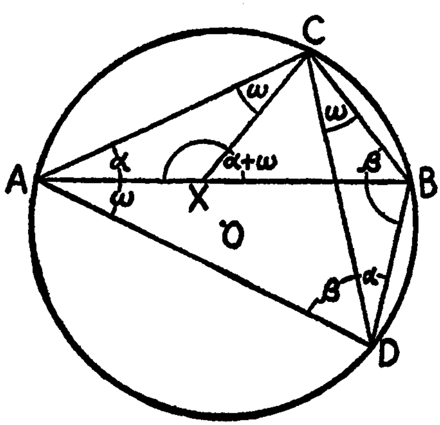
نتیجه می‌گیریم که هندسۀ کلاسیك دارای تمام عناصر لازم برای «حل» مثلثها و اشکال مستقیم الخط به طور عموم است. اما در بارۀ توابع مثلثاتی تحلیلی، وضع از چه قرار است؟ یعنی توابع مثلثاتی مجموع یا تفاضل دوزاویه؛ مضرب زاویه‌ها ویانصف‌آنها؟

اما نه‌تنها این روشها برای بطلیموس شناخته شده بودند، بلکه با نتیجه‌ای مؤثر از طرف او به‌کار گرفته شده‌اند مهمتر آنکه تمام‌این‌محاسبه‌ها واسطه‌ای تنها از یك قضیه که امروز نام **قضیۀ بطلیموس** را به‌خود گرفته، و در «مجسطی» با فروتنی به عنوان یك لم از آن یاد شده؛ ناشی گردیده است.

خود قضیه چنین است: **هرگاه چهار رأس یك چهار ضلعی برروی دایره‌ای معین قرار گرفته باشند، دراینصورت مجموع حاصل ضربهای اضلاع مقابل دراین چهار ضلعی برابر است با حاصل‌ضرب قطرهای آن** درشکل ۳۰ داریم

$$\overline{AC} \cdot \overline{BD} + \overline{BC} \cdot \overline{AD} = \cdot \overline{AB} \cdot \overline{CD} \qquad (۲-۱۵)$$

مهمتر ازنتیجه‌ای که بطلیموس ازخاصیت **چهارضلعی محاطی** گرفت طرز اثبات قضیه است. زیرا در اینجا ما به‌همان ذوق هنری و استادی مواجه می‌شویم که برهان هرو در موردفرمول **سطح** یابرهان **قضیۀ وتراقلیدس** ما را در مقابل خود قرارداده است. این مهارت مبین آن است که قضیه از مغز یك منجم تراوش نکرده، بلکه کشف آن‌تراویدۀ فکر هندسه‌دانی برجسته‌تر ازآپولونیوس‌بوده



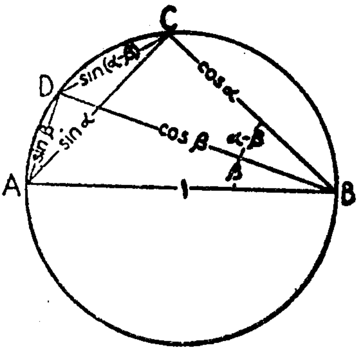

شکل ۳۰

است.

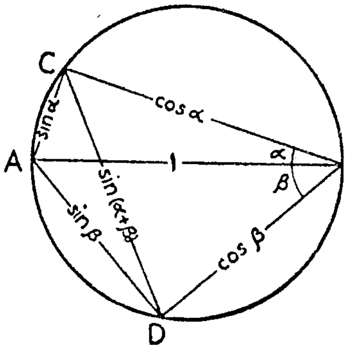
مانند قضیه‌هائی که ذکر آن رفت، فهم برهان دشوار نیست، بلکه حیلهٔ به‌کار رفته در پشت‌سر این استدلال اهمیتی به‌سزا دارد. حیلهٔ مربوطه در این حالت آن است که قاطعی مانند $CX$ را چنان درنظر بگیریم که $ABC$ را به‌دو مثلث که اولی $ACX$، مشابه با $CDB$ ودومی $BCY$ مشابه با $CDA$ باشد، تقسیم کند. اینکار باایجاد زاویهٔ $ACX$ برابر $DCB$ امکان‌پذیر است. به‌همین شکل زاویهٔ $BCX$ مساوی $ACD$ خواهد شد. بقیهٔ برهان روش متداول است: ازتشابه دوزوج مثلث دونسبت بدست می‌آید که به‌نوبهٔ خود به‌رابطه‌های زیر منجر می‌شوند:

$$\overline{CD}\cdot\overline{AX}=\overline{AC}\cdot\overline{BD} \text{ و } \overline{CD}\cdot\overline{BX}=\overline{BC}\cdot\overline{AD}.$$

وقتی این دورابطه را جمع کنیم، وضمناً به‌خاطر داشته باشیم که: $\overline{AX}+\overline{BY}=\overline{AB}$ ، بقیهٔ مورد پژوهش بدست می‌آید




شکل ۳۱ الف




شکل ۳۱ ب

بطلیموس در به‌کاربردن این لم‌جهت محاسبهٔ وترها ازچهارضلعیهای مخصوصی که در آنها یکی از ضلعها یا یکی از قطرها منطبق برقطردایره محیطی است، استفاده می‌کند.

بدین‌ترتیب، در حالت مجموع دوزاویه (شکل ۳۱ الف) قطر $AB$ قطر دایره است. درآنچه‌که درزیر می‌آید به‌جای عبارتهای «جیب وجیب تمام» (*Complementary chord* و *chord*) که در «مجسطی» به‌کار برده شده است $sin$ و $cos$ را جایگزین کرده‌ایم. هم چنین فرض کرده‌ایم که قطر دایره برابراست بایك.

به‌این ترتیب، یك زوج از ضلعهای مقابل از $sin\alpha$ و $cos\beta$ و زوج دیگر از ضلعهای مقابل از $cos\alpha$ و $sin\beta$ تشکیل شده‌اند؛ در حالیکه قطر دیگر چهارضلعی برابر است با $sin(\alpha+\beta)$. کاربرد مستقیم قضیهٔ بطلیموس به‌فرمول زیر منتهی می‌شود:

$$sin(\alpha+\beta) = sin\alpha cos\beta + sin\beta cos\alpha \qquad (۳-۱۵)$$

درشکل ۳۱ـ ب، قطعه‌دایره را برای یکی از ضلعها درنظرگرفته‌ایم. دراینصورت، قضیهٔ بطلیموس فرمول تفاضلها را بدست می‌دهد:

$$sin(\alpha-\beta) = sin\alpha cos\beta - sin\beta cos\alpha \qquad (۴-۱۵)$$

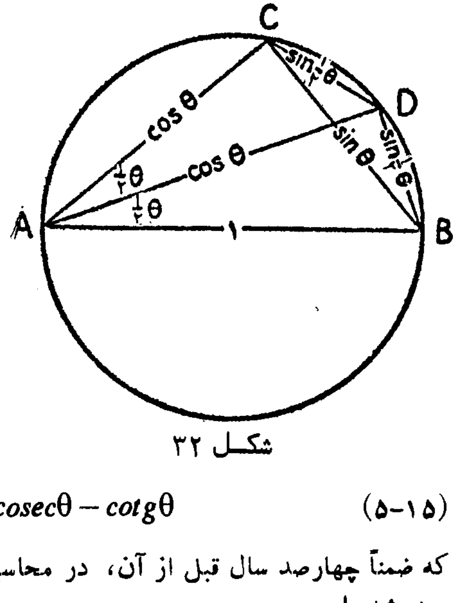
بالاخره شکل ۳۲ نمایانگر آن است که چگونه بطلیموس با مسئلهٔ تنصیف‌زاویه مواجه شده است؛ **وترزاویهٔ معینی در دست است، وترنصف زاویهٔ مفروض رابدست آورید.**

در اینجا وترهای $\overline{DB}$ و $\overline{DC}$ برابرند وطول مشترك آنها $sin\frac{۱}{۲}\theta$ و قطر همان $cos\theta$. بنابراین:

$$sin\frac{۱}{۲}\theta + sin\frac{۱}{۲}\theta cos\theta =$$

$$= Cos\frac{۱}{۲}\theta sin\theta$$

که‌این رابطه به‌نوبهٔ‌خود منجر به‌فرمول تنصیف می‌شود:



شکل ۳۲

$$tg\frac{۱}{۲}\theta = cosec\theta - cotg\theta \qquad (۵-۱۵)$$

که ضمناً چهارصد سال قبل از آن، در محاسبهٔ $\pi$ به‌وسیلهٔ ارشمیدس به‌کار برده شده است.

## ۶

درمجسطی برای محاسبهٔ جدول‌وترها این اصول به‌کار برده شده‌است، که تا حدود زیادی از هرحیث نسخهٔ بدل جدول‌ضمیمهٔ رسالهٔ مفقودهٔ هیپارك

است، واقعه‌ای که باعث مزید شك دربارهٔ اصالت ارتباط این فرضیه با نام بطلیموس می‌شود.

جدول از نظر تاریخی بسیار جالب توجه است، نه‌تنها به‌خاطرآنکه در نوع خود اولین آن؛ بلکه از آنجهت کـه فکر تشکیل آن نیز انحراف اساسی از سنتهای کلاسیك بوده‌است. بعلاوه این امر نشان دهندهٔمشکلاتی که محاسبین آن دوران باآن دست به گریبان بوده‌اند، نیز می‌باشد.

برای آنکـه موانع فوق را برجسته‌تر نشان دهیم، در اینجا رئوس مطالبی که در محاسبهٔبطلیموس برای سینوس **یك درجه آمده است** بیان می‌کنیم. قدم اول سینوس وکسینوس ۱۸۰ درجه مستقیماً از مثلث تقسیم طلائی بدست آمده است (به‌فصل پنجم شکل ۸ مراجعه شود). قدم دوم: تـوابع ۱۵ درجه با تنصیف از توابع ۳۰ درجه بدست آمده‌اند. قدم سوم: توابع ۳ درجـه از توابع ۱۸ درجه و ۱۵ درجـه به وسیلهٔ فرمول تفاضل (۴-۱۵) حاصل شده‌اند. قدم چهارم: توابع$\frac{۱}{۲}$۱درجه و $\frac{۳}{۴}$درجه به‌وسیلهٔ توابع ۳درجه بادو **تنصیف پی‌درپی** حاصـل شده‌اند. قدم پنجم: بالاخره سینوس یك درجه ازسینوس$\frac{۱}{۲}$۱درجه و $\frac{۳}{۴}$درجه ازراه **میانگداری** بدست آمده است.

شکل عمل درمرحلهٔ پنجم برپایهٔ نابرابری است‌که توسط آریستارك ستاره‌شناس هم‌عصر ارشمیدس، به‌کار گرفته شده‌است.درواقع یکی‌ازمفسرین آن را به هیپیاس، اهل‌اله، نسبت داده وظاهراً نیز نباید آن را زیاد دست کم‌گرفت؛ زیرا به‌یك مفهوم این شکل‌کار، توسطمنحنی کوادراتریکس‌ارائه شده است. درحقیقت‌کوادراتریکس نمایشی از تابع$\frac{x}{tgx}$بوده، در حالیکه نامعادله‌ای‌که پشت‌سر میانگداری بطلیموس قراردارد، سر وکارش با تابع خویشاوند آن$\frac{sinx}{x}$است.

## ۷

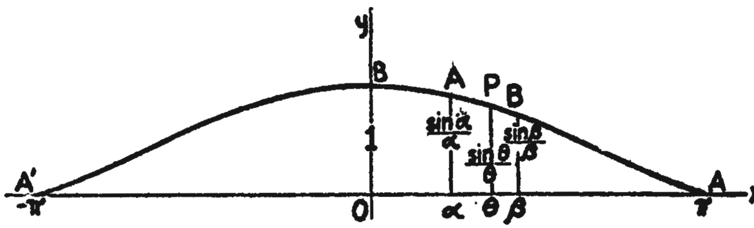
شکل ۳۳ منحنی نمایش$y=\frac{sinx}{x}$ است. می‌بینیم‌وقتی $x$ بین صفرو $\pi$ تغییر می‌کند تابع به‌شکلی پیوسته و یکنواخت قوسی نزولی را می‌پیماید.

مفهوم این آن است که اگر $\alpha$، $\theta$ و $\beta$ سه مقدار متوالی برای $x$ باشند، در اینصورت داریم:

$$\frac{\sin\alpha}{\alpha} > \frac{\sin\theta}{\theta} > \frac{\sin\beta}{\beta}$$

که از آن می‌توان نابرابری به‌کار برده **شده توسط بطلیموس رابدست آورد:**

$$\frac{\theta}{\alpha}\sin\alpha > \sin\theta > \frac{\theta}{\beta}\sin\beta \qquad (۱۵-۶)$$




**شکل ۳۳**

ثانیاً تابع برای $x=0$ **یك ماکزیمم** خواهد داشت، و این بدانمعنی است که برای تمام مقادیر کوچکتر از $x$، منحنی کاملاً **«تخت است»** بنابراین هرگاه $\alpha$ و $\beta$ مقادیری کوچك باشند، فاصلهٔ بین $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ و $\frac{\sin\beta}{\beta}$ نیز کوچك بوده، واین همان چیزی است که دقت بسیار زیاد شیوهٔ به‌کار رفته راتضمین می‌کند.

در حقیقت با به‌کاربردن نابرابری برای $\alpha = ۹۰^\circ$، $\theta = ۶۰^\circ$ و $\beta = ۴۵^\circ$ معلوم می‌شود که:

$$۰/۰۱۷۴۵\ \ldots > \sin ۱^\circ > ۰/۰۱۷۴۵$$

بدین‌ترتیب، حقانیت‌ما درانتخاب $\sin ۱^\circ = ۰/۰۱۷۴۵$ کاملاً روشن است؛ زیراخود این‌عددباعددجدول تا **۵ رقم اعشار** مطابقت دارد. همچنین این عدد کاملاً نزدیك به‌مقداریست که درجدول «مجسطی» آمده است:

$$\sin ۱^\circ = ۱'۳''$$

اجازه بدهید به‌خاطر احتمال تعجبی که به‌خواننده دست می‌دهد گفته شود به‌همراه اندازه‌هائی که بابلیها برای زمان و زاویه به‌کار می‌بردند، هیپارك کسرهای شصتگانی را به‌کار برده‌است، بنابراین معنای $۱'\,۳''$

عبارتست از $\frac{۳}{۳۶۰۰}+\frac{۱}{۶۰}$.

بطلیموس به‌همان تأسی کرد ودرواقع این شیوهٔ نگارش کسرها حتی در زمان کپرنیك نیز متداول بود. گرچه امروزه ممکن است این علامتگذاری کسل کننده و پر دردسر به‌نظر رسد، ولی باروح زمان سازگاری داشت و باید به‌آن به‌چشم سلف **کسر دهگانی** نگریست که در شکل موجود خود، در نهایت، بیش از سیصد سال ازعمرش نمی‌گذرد. *

واما در بارهٔ موضوع عدد نویسی اجازه بدهید اضافه کنم که اصطلاحات و علامتهایی که امروزه در مثلثات به کار گرفته شده‌اند، به‌مقدار زیادی همانهائی هستند که اولر در حدود دویست سال پیش ارائه نمود. فهرستها و علامت گذاریهای قبل ازآن تاحد زیادی، به‌اندازهٔ فهرستها و علامتهای به کار رفته توسط بطلیموس وجانشینان عرب زبان وهندی او، دست و پا گیر ناراحت کننده بودند.

## ۸

فرق اساسی بین هندسهٔ کلاسیك مثلث، آنطور که اقلیدس آموخته است، ومثلثات هیپارك را می‌توان در یك کلمهٔ «گونومتری» (زاویه سنجی) خلاصه کرد. بدون زاویه سنجی نسبتهای مثلثاتی چیزی جز علامتهایی تو-خالی، وقوانین مثلثات جز فرمولهای بدون ثمر نخواهند بود.

**به‌وسیلهٔ اصلی که اندازه گیریهای زاویه‌ای را با اندازه گیریهای طول خطها هم‌آهنگ می‌سازد، نسبتها شایستگی تابع بودن را یافته و مفهوم کلی وهمه جانبه پیدا می‌کنند. این اصل به‌نوبهٔ خود برپایهٔ این فرض استوار است که می‌توان اندازه‌های یك ـ به‌ـ یك متناظری بین طول هرقوس از دایره وطول هرقطعه خط مستقیم پیداکرد.**

هندسهٔ کلاسیك شامل مفهومی به‌این وسعت از زاویه سنجی نبود، «مقدمات» اقلیدس به‌شرح زاویه‌های متوافق، جمع وتفریق زاویه‌ها، چند برابر کردن وتنصیف آنها پرداخته است. این کتاب تقسیم یك دوران کامل را به ۳، ۵ و ۱۵ قسمت آموخته، وبیان داشته است که چگونه هر زاویه را می‌توان به $۲n$ بخش تقسیم کرد. معهذا، تمام این تعاریف وساختمانها به طور دقیق جنبهٔ **عملی** داشته واعمال مربوط فقط محدود به کار برد **خط کش**

* به کتاب «عدد زبان علم» اثرهمین مولف مراجعه شود.

**وپرگار** بوده است. حل یك مثلث مسئله‌ای بود **ترسیمی**، که به‌طور کلی **المثالی حسابی** برای آن وجود نداشت.

هندسهٔ کلاسیك واحدی برای زاویه داشت: زاویهٔ قائمه یاربع‌دایره. اما فقط آنچنان کسرهائی از ربع دایره که می‌توانستند توسط «تقطیع دایره» در دسترس‌قرار گیرند، به‌عنوان زاویه‌های **معقول** مورد قبول‌قرارمی گرفتند، وسایر تقسیمات مانند $\frac{1}{7}$ ، $\frac{1}{9}$ یا $\frac{1}{90}$ خارج از مرز زاویه‌ای قرار داشتند. ونیروی بازدارنده‌ای که به‌وسیلهٔ «ابزار الهی» اعمال می‌شد چنان بود، که حتی ادوکسوس و ارشمیدس نتوانستند از ممنوعیتهای آن خلاصی یابند.

اما یك ستاره‌شناس ومنجم به‌جائی حمله برد که هندسه‌دانان جرأت قدم‌گذاردن بدانجا را نداشتند. او تنها به تحمیل زاویه سنجی برهندسهٔ کلاسیك راضی نشد، بلکه باقوانین مقدس سایکلوتمی نیز مخالفت کرد و بدین ترتیب کار را به‌جای بدکشاند. عمل زاویه سنجی هرگاه‌زاویه را در شکل عمومی خود با «سایکلوتمی» برابر می‌دانست، انحراف اساسی از سنت یونانی محسوب می‌شد. معهذا هیپارك توانسته است با به‌کار بردن واحدی برای زاویه، در حدو حدود چشم‌انداز **وسائل وابزارمقدس**، مانند $\frac{1}{60}$ ، $\frac{1}{80}$ یا $\frac{1}{96}$ از ربع‌دایره، به‌جای‌واحد $\frac{1}{90}$ بابلی که خارج از **مرز** قرار دارد، مقدارکمی از آداب کلاسیك را رعایت‌کند. مسئله برسر انتخاب بین بدعت بابلی و انشعاب یونانی بود. هیپارك بدعت بابلی را انتخاب‌کرد.

# آخرین بخش

بشر هنوز نیاموخته‌است که چگونه بزرگداشت بالاترین دستاوردهای خود را برگزار کند.

نیچه

## ۱

دامنهٔ سهم یونان چیست؟ تاریخ نویسان در تحول تفکر ریاضی و تکنیك چه مقامی را باید به‌یونان اختصاص دهند؟ آیا بیان اینکه «در ریاضیات همهٔ راهها به‌یونان باز می‌گردد» فقط تمجید است یا ارزیابی موجه؟ آیا پیشرفت اعجاب‌آور چند قرن گذشته مدیون تکیه بر اصول یونانی‌است یا مرهون‌کنارگذاردن ممنوعیتهای آنهادر ریاضیات؟

وقتی من دربحراین سئوالها غوطه می‌خورم، به‌یاد گفتهٔ پوآنکاره می‌افتم: «شك نسبت به‌همه چیز یا یقین نسبت به‌همه چیز دوراه حل سهل وساده است، زیرا هیچیك از آنها به‌اندیشیدن نیازی ندارند».

## ۲

ارزیابی دربارهٔ میراث‌یونان بابسیاری از مسائل وموضوعات‌مواجه شده است ،که در ریاضیات زمان حال انعکاسی مخصوص به‌خود را داشته است؛ و با اینحال این تمام داستان نیست. بیان دستاوردهای زیادی که اهمیت آنهاکمتر از آنچه‌گفته شده نیست، به‌جلد دیگر این سه‌کتاب‌محول شده است. کمی‌صفحات یکی از دلایل این تعویق است. موضوع دیگر احساس من است که حکم می‌کند هرگاه این مطالب را بتوان در فرصت مناسبتری، یعنی باتوجه به‌زمان و مکانی‌که به‌ثمر رسیده‌اند، طراحی کرد،

نمایان‌تر و برجسته‌تر به‌نظر خواهند رسید.

در میان این سرفصلها دستاوردهای مهمی را می‌توان نام برد که از آنجمله‌اند چهار ضلعیهای ارشمیدس که دو هزار سال **برحساب انتگرال** نیوتون پیشی دارد؛ **مخروطات** آپولونیوس که **هندسهٔ تحلیلی** دکارت را پیش‌گوئی کرده‌است؛ **پوریسم** اقلیدس‌وپاپوس که‌جرثومه‌های**هندسهٔ ترسیمی** دزارگ را درخود دارند؛ اریتمتیکای دیوفان که به‌کشف فرما در **نظریهٔ عددها** الهام‌بخشیده‌است؛ اصل‌افناء، اصل موازیها، **منحنیهای دیوکلس‌و نیکومد**؛ بررسی هوشمندانهٔ اقلیدس دربارهٔ **عددهای اول وعددهای کامل** فصولی جالب ودر عین حال همهٔ آن قسمتهای ریاضیات که از یونان به‌ما به‌ارث رسیده است. هرگاه این سرفصلها در کنار آنچه‌که امروز ثبت شده است به‌رشتهٔ تنظیم درآید می‌توان آنرا به‌دیدهٔ جدولی از مندرجات دایرة‌المعارف ریاضیات نگریست. بدین دلیل کلمات «تمام راهها به‌یونان باز میگردد» به‌صورت بیانی سازگار برای‌ارتباط بین‌ریاضیات‌کهنه‌ونوخودنمائی می‌کند.

### ۳

وبا اینحال وقتی به‌بررسی دقیق‌تر حدود دوازده قرنی‌که آخردوران کلاسیک را از شروع عصر جدید جدا می‌سازد بپردازیم، می‌بینیم‌که‌حداقل این تمجید و ستایش استعاری موجه است. هشت قرن اول این دوران به‌نام «دوران سیاه» شناخته شده است. در سالهای اخیر تمایلی وجود داشته‌که‌از بیان این عبارت پرهیزشود. اما من عنوانی بهتراز **شب بی‌پایان**نمی‌توانم به‌آن بدهم. دراین‌وادی‌لم‌یزرع راهی‌که‌به‌یونان برمی‌گشت وجودنداشت. تنها رویائی محو شده، که درآن خرابه‌های فرهنگ یونان‌ریخته وپاشیده‌به چشم می‌خورد وموجود بود. به‌طور اتفاقی راهبی سرگردان، برای‌توجیه وسواسی‌که فکرش را به‌خود مشغول داشته بود، در جستجوی **معقولات** یونان، درمیان این خرابه‌ها، دزدانه راه می‌پیماید. وهمهٔ آنچه که در این دوران انجام شده همین است.

در نهایت، وقتی این وسوسهٔ فکری راه‌خود را به پایان می‌رساند، موجی‌باشکوه وعظیم به‌نام «رنسانس»اروپای غربی‌را دربرمی‌گیرد. نیروی دربندکشیده آزاد می‌شود وراههای فراری به‌سوی دنیای هنر، نویسندگی موسیقی وفلسفه می‌گشاید. با اینحال درآن زمان این موج نتوانست به‌-

دنیای ریاضی راهگشا شود، کوششهای عاجزانه به کار رفت تا به وسیلهٔ ترجمه‌های لاتین، از نسخه‌های عربی، دراین زمینه تجدید حیات شود، اما این کوششها تأثیری پایدار نیافرید.

در حقیقت، تنها ریاضیدان آن عصر، فیبوناچی بود، واو به جای احیای مجدد افتخار یونان، علاقهٔ زیادی به گسترش ایده‌های عربی داشت.

۴

پس از آن **قرن هفدهم** فرا رسید و باآن موجی فرا گیرنده، که از نظر عظمت و وسعت، نظیری در سالنامه‌های ریاضیات نداشت. اغلب عناوینی که به‌دورهٔ درسی ریاضیات جدیدشکوه‌می‌بخشد دراین زمان به‌وجود آمدند.

**هندسهٔ تحلیلی، ترسیمی، بینهایت کوچك، نظریهٔ معادلات، نظریهٔ عددها، حساب انتگرال، نظریهٔ توابع، سریهای بینهایت، نظریهٔ منحنیها، احتمالات، مکانیك نظری ومکانیك سماوی.**

وهمهٔ اینها دردوره‌ای کوتاه‌تر از یکصد سال به‌وجود آمد. درواقع، گرچه ایزاگوگهای ویت که عصری جدید در ریاضیات را بشارت داد، در سال ۱۵۹۲ ارائه گردید، اما اهمیت کامل علامت‌گذاریهای او تابعدازمرگ مشکوکش، به‌سال ۱۶۰۳، درك نگردید. ازطرف دیگر در۱۶۸۶، هنگامیکه «اصول ریاضیات» نیوتن منتشر شد، ریاضیات نو تقریباً کامل شده بود. علیهذا وقتی بامعیارهای معاصر بسنجیم، ریاضیات نو **در این اولین قرن** بیش از یکهزار سالی که طالس را از پاپوس جدا می‌سازد طی طریق کرده است. چرا؟

محققاًنمی‌توان این پیشرفت‌اعجاب‌آور را به‌قابلیت‌فوق‌العادهٔریاضیدانان قرن هفدهم، ویا ژرف اندیشی آنان، ارتباط دارد. ذوق هنری شگفت‌انگیز اساتیدیونان و مکاشفهٔ هوشمندانهٔ آنها خود جوابگوی این امر است. در واقع، شیوه‌های عصرکلاسیك چنان بسته و محدود بودکه تقریباً هرمسئلهٔ جدید به‌آنچنان نیروئی محتاج بود که فقط یك نبوغ فنی می‌توانست آنرا اعمال‌کند. باز اگر بگوئیم فرما، دکارت و نیوتن ابزاری در اختیار داشتند که بریونانیان پوشیده بود، استدلال غلطی است‌که ازخود موضوع به‌عنوان حجت‌کمك‌گرفته‌ایم، زیرا این ابزاربه‌وسیلهٔ همان‌کسانی‌که از آنهااستفاده

کردند، ساخته و پرداخته شده بود. وسیلهٔ‌محرکی که شوق این مردان بود چه بوده است، وسیله‌ای که، ظاهراً در دوران یونان وجود نداشته است؟

## ۵

آنچه راکه‌ریاضیات کلاسیك بدان‌احتیاج داشت تابه‌صورت‌مجموعه‌ای منظم و در عین حال، از نقطه نظر کیفی موجه در آید؛ چیزیکه سخنگوی علوم برای راهنمائی وتأیید بدان تکیه می‌کند؛ نه‌تعداد بیشتری ازمردان هوشمند بود و نه اصول نو ویا ادراکها، ریاضیات به‌زبانی نو احتیاج داشت.

آیا معنای آن اینست‌که‌برای بیان اندیشهٔ ریاضی، زبان لاتین‌دکارت و نیوتن قابلیت بیشتری از زبان یونانی آپولونیوس و پاپوس داشت؟ مسلماً خیر! مسئلهٔ اینکه‌کدامیك از زبانهای‌گوناگون،که در جریان تمدن به وجود آمده است، بیشتر می‌توانست خدمتگزار احتیاجات ریاضیات باشد، دارای اهمیتی تاریخی‌نیست؛ زیرا داوری تاریخ چنین است‌که‌هیچیك ازاین زبانها تقاضای واقعی ریاضیات را برآورد، نکرده‌اند. اینك که من این سطور را رقم می‌زنم به‌جملهٔ بدبینانهٔ تالیران می‌اندیشم. «به‌انسان قدرت خطابه داده شده‌است‌تاافکارش رادگرگون جلوه دهد». تاریخ‌نویسی تند مراج می‌تواند این جمله را چنین تفسیرکند: **«قدرت خطابه به انسان تحمیل شده‌است تافکر راگنگ و نامعلوم وعمل را فلج‌کرده، پیشرفت را به‌تأخیر اندازد».**

و می‌تواند برای‌قوت بخشیدن به‌این بیان، تاریخ‌ریاضیات را شاهد مثال بیاورد. مفسر خیرخواه‌تر در زمینهٔ تاریخ بشر می‌تواند درمقابل آن چنین‌بگوید: «زبان موهبتی الهی نیست، زائیدهٔ احتیاجات موجود اجتماعی است تابتواند به‌سایرموجودات، امیال‌خود، درخواستهای خود ودستورات خود را صادر نماید؛ به‌وسیلهٔ آن سایر موجودات اجتماعی را در امیدها و ترسهایش شریك‌کند: تضرع نماید. همگام‌کند، تملق بگوید و از نیروهای سری ومرموزکه حاکم برسرنوشت اوست استمداد جوید. زبان به قرنهای متمادی پیش از دورانی‌که بشر به‌قیاس واستنتاج دست یافت بازمی‌گردد و نشانهائی پاك نشدنی برپیشانی‌داردکه میراث تیرگیهای درهم‌وبرهمی‌است که ازمیان‌آن، درك مستقیم بشر،کورمال راه‌خود را یافته‌ومتعلق به‌اعصار قبل‌از پیدایش استدلال عقلانی اوست.

طالس ملطی درك مستقیم بشر را باسلاح اندیشه مسلح کرد،وبدان وسیله ریاضیات از میان غبار تیرهٔ سمابی سربـرآورد. اما نه طالس، و نه پیروانش، انسان متفکر رابا وسیلهٔ بیانی کـه هم شایستهٔ ارائه تفکرات او باشد، وهمدارای ظرافت ودر عین حال دقت‌باشد ویا بتواند اشکال‌بیشماری راکه اندیشهٔ او می‌تواند مجسم کنـد شرح دهد، مجهز نکردند. ریاضیات یونان ناچار بود به‌زبان متداول وابسته باشد، واین وسیله‌ای بود مملواز ابهام ودر عین حـال غیر قابل انعطاف، ومساعد برای تناقضاتی که خود زبان قابل به‌کشف آنها نیست‌وبالاخره درآن تقاطی‌کلمات، مفاهیم رادچار مخاطره می‌کرد وتنها از راه لحن صدا امکان داشت مطلبی رامؤکداً تأکید کنند. اینها موانعی بودند که ریاضیات یونان درطول هزار سال‌از زندگی خود باآنها سروکار داشت.

پس از آن، گوئـیَ **جادوئـی** به کار گرفته شده باشد، ریاضیات از بلهوسیهای کلام بشری رهائی جست و زبانی خاص خود یافت. من کلمهٔ **جادو** را آگاهانه به‌کاربردم،زیرا سیمای‌برجستهٔ واقعه، ایجادخودبه‌خودی وسرعت انتقال از ریاضیات قدیم به‌ریاضیات نوبود. واقعه درآستانهٔ قرن روی داد وتا ۱۶۵۰، وسیلهٔ جدید، تقریباً وعملاً درتمام زمینه‌های‌ریاضیات چه‌محض و چه عملی، نفوذکرد.

هنگامیکه من به این تحول می‌اندیشم، افسانهٔ هزیود (*Hesiod*) از خاطرم می‌گذرد، کـه بنا بر روایت زئوس (*Zeus*) متیس (*Metis*) همسر خود را هنگامی کـه آتنا (*Alheno*) را باردار بود بلعید: چون آگاهی یافته بود که فرزندش، برخوردار از قدرت مادری قویتر از اوست واو را از تاج وتخت محروم خواهدکرد. اما پرومیتوس (*Prompetheus*) کلهٔ زئوس را شکافت و از آن آتنا سرتا یا غرق در سلاح بیرون جست و فریادی ظفر نمون برکشید. پرومیتوس از نیروی مکنون وشگرف الههٔآزاد شده بیخبر بود. بـه‌همین ترتیب، ویت، پرومیتوس ریاضیات، از انقلابی که بادستاوردش درشرف تکوین بود خبری نداشت. درواقع، هرگاه به‌چنین نیروئی آگاه بودبه‌جای آنکه نام بیروح لوجستیکااسپسیوزا (*Logestica Speciosa*) را به اکتشاف خـود دهد، بـا نام **زبان ریاضی** به آن درود می‌فرستاد.

«هنوز بشر نیاموخته است کـه چگونه از دستاوردهای بزرگ خود تجلیل کند». چقدراین کلمات نیچه را، در بارهٔ تاریخ ریاضیات می‌توان با شایستگی به‌کار برد! دراین تاریخ دو واقعهٔ قرن‌ساز عبارت بودند از اصل **استدلال قیاسی** که‌آغاز رسمی‌آن باطالس بود و**جبر سمبلیك** ویت.

بااینحال، نه‌تنها این وقایع را به‌خاطر نمی‌آوریم، و نه‌تنها نام مردانی که این دستاوردها را به‌آنها مـدیونیم ازیاد برده‌ایم، بلکه این دستاوردها حتی نامی راکه وافی به‌مقصود باشد نیز برخود ندارند.

در واقع، کمترکتابی از کتب درسی ما اشاره‌ای به‌کشف ویت دارد، و آنها هم کـه اشاره‌ای دارنـد آنرابا **علامتگذاری حرفی** تعیین هویت کرده‌اند، و حال آن که این عبارت نه‌تنها بیان کنندهٔ مقصود نیست، بلکه واقعاً فریب‌آمیز است، زیراکاربرد حروف الفبا به عنوان علامات به‌هیچ وجه مورد نظر نبوده و این زبان در واقع بیش ازیك علامتگذاری محض است. در حقیقت، حتی عبارت زبان، باشایستگی، رسائی نیروی این‌وسیلهٔ بیان را توضیح نمـی‌دهد. زیرا در عین حال‌که این زبان مخصوص وظایف اصلی همـهٔ زبانها را انجام می‌دهد، شاهکارهائی را نیز نمایش می‌دهد که حتـی فصیـح‌ترین سخنـوران و یـا نام‌آورترین شعرا از دستیـابی بدان عاجزند.

به‌این ترتیب، قاعدتاً، حتی اگر همهٔ قواعد دستوری رعایت شوند، تغییر استخوان‌بندی یك جمله، آنچه را که‌منظور ما از معنای عبارت بوده است تغییر می‌دهد، یادر حدنهائی یك **جناس** به‌وجود می‌آورد. وحال آن که در یك رابطهٔ سمبلیك تغییری‌که **با قوانین جبر** مطابقت داشته باشد هم ارزی‌بین دوشکل معین را نشان می‌دهد،واین خود درزمینه‌ای که‌ازعلامات کمك می‌گیرد به‌معنی یك «قضیه» است.

باز، هنگامی که کلمات در یـك جمله مفاهیمی ضمنی داشته باشند، نتیجه‌اش یك **ابهـام**، و یـا در بهترین وضع یك استعاره است. اما اگر یك رابطهٔ سمبلیك برای دو میدان عمل متمایز معتبر باشند، در اینصورت هـر نتیجـه‌ای از رابطه در یك میدان، دارای المثنائی در میدان دیگر است. این همنوائیها بـه اکتشافهـائی ارزشمنـد در ریاضیـات عملی منجر شده است.

بالاخره، هرگاه‌کلمات یك عبارت در معرض پاره‌ای قیدها واحتیاطها قـرار گیرند، در اینصورت بی‌اعتنائی به این محدودیتها نتایج بدی به‌بار

می‌آورد؛ درواقع، مابیشتر اشتباهات خود را ناشی از این کاربردهای غلط می‌دانیم. وحال‌آن‌که، وقتی‌که دریك‌رابطهٔ سمبلیك، که درآن‌عناصرمربوطه اصولا چه از نظر نوع وچه‌از نظر دامنه محدود شده باشند، این‌محدودیت برداشته شود نه تنها مفهوم خود را حفظ می‌کنند، بلکه حـالت عمومی پیداکرده، تعمیم می‌یابند و کاربرد بیشتری پیدا می‌کنند. تحول درك عدد از عدد صحیح به‌عدد برداری یکی ازاین موارد است.

بنابراین، اهمیـت تاریخی کشف ویت این است: این کشف نه تنها ریاضیات را واجد زبان‌کرد، بلکه‌آن راباسلاحهای قدرتمندی مانند **تفسیر**، **قیاس وتعمیم** مسلح‌کرد.

از این‌رو ویت یك متفکر بی‌زبان را به گوینده‌ای روان و متقاعد کننده تبدیل‌کرد، ودر عین حال، این متفکر را بااستعدادهای فکری‌انتقادی خلاق غنی ساخت.

## ۸

انتشار اثر گالیله در ۱۶۳۰ به نام «مکالمات در بارهٔ دو علم جدید» (*Dialogues on the Two New Sciences*) بـرای ریاضیات قرن هفدهم دومین محرك قدرتمند بود. دراین اثر، **گالیله** درجستجوی گسترش مفهوم سـرعت برای **حرکت غیر یکنواخت**بود. او سئوال می‌کند: برای **سرعت متوسط** یك نقطهٔ مادی متحرك، وقتی فاصلهٔ زمانی کم‌کم کاهش‌یابد چه‌اتفاقی می‌افتد؟ این امر اورا به‌مفهوم سرعت لحظه‌ای راهبری‌کرد.

این سرعت را به مثابهٔ گرایش سرعت متوسط به طرف حدی تعریف کردکه وقتی فاصلهٔ زمانی **بینهایت‌کوچك** می‌شود این سرعت به طرف آن حدمیل می‌کند، که البته تاحدودی همان **مشتق فاصله نسبت به زمان**است.

اینهم یکی دیگر از مواردی بودکه ستاره‌شناس به‌جائی حمله بردکه هندسه‌دانان‌می‌ترسیدند به‌آنجا قدم گذارند. طلسم شکسته شد: فرما برای پیاده‌کردن اندیشه‌های‌جدید درهندسه چالاکی به‌خرج داد: این‌کاربردجشنی حقیقتاً باشکوه‌به‌همراه‌داشت. **وآنالیزبینهایت‌کوچك به‌دنیا آمد. روندهای بینهایت، بینهایت‌کوچکها، حدها**ـ مفاهیمی که هندسه‌دانان یـونان بـا احتیاطی که نشانی از ترس با خود داشت از آنها طفره می‌رفتندـ از آن به بعد به‌عنوان‌ابزار شرعی استدلال وفن ریاضیات می‌بایست به‌کار برده‌شوند. بدین ترتیب، گره‌کور ممنوعیتهائی که ریاضیات را از زمانی که نطفهٔ آن

بسته شد، به‌ستوه آورده بود، سهوا به‌دست گالیله قطع شد.

با این حال کامیابی بزرگ آنالیز بینهایت کوچك نباید باعث شود تا تاریخ نویس این واقعیت را نادیده بگیرد که وجود این رشته از علم مدیون یك ادراك جدید نیست، بلکه مرهون قطع رابطهٔ آشکار و شجاعانه با یك سنت قدیمی است. هم چنین باید به خاطر داشته باشیم که تاریخ ریاضیات یونان باکوششهائی برای رهائی از ممنوعیتهائی که این سنت به‌آن تحمیل کرده بود مزین است؛ و این کوششها گرچه در وهلهٔ اول باترس خود را نشان داده‌اند، ولی با پیشرفت ریاضیات شکلی جدی و مصمم به خود گرفته‌اند؛ و «مجموعهٔ» پاپوس شامل مسائلی است که در آنها بینهایت با شاخه‌های متنوع خود، حتی اگر آشکار را هم نباشد، باز به‌شکلی مستقیم به‌کار گرفته شده است.

## ۹

عنوان یونانی اثر پاپوس «سینوگوگ» (*Synagogs*) بود، که به‌جای «مجموعه» یا «مجمع» آمده است. این عنوان کاملا مناسب است، زیرا در اینجا پاپوس مجموعه‌ای از نمایش با شکوه مسائل کلاسیك را جمع‌آوری کرده، که از اولین روزهای هندسهٔ یونان تا عصر خودش رادربر می‌گیرد. برخی از آنها سئوالاتی قدیمی بودند به‌صورتی جدید؛ پاره‌ای دیگر، بدون شك، مربوط به خود پاپوس‌اند؛ اما همهٔ آنها مهر باشکوه استاد ریاضی و معلم ماهر را برپیشانی خوددارند. در واقع، شیوه وشکل تنظیم موضوعها نمایانگر آن است که او در رأس مکتبی که دارای مقامی والا بوده جای داشته است.

اهمیت تاریخی «سینوگوگ» آن است که به‌مثابهٔ بهترین منبع قابل دسترسی برای چشم انداز و بصیرت ریاضیات کلاسیك، که در **دوران سیاه** نابود شده است، کمك می‌کند، ودر عین حال بروضع ریاضیات درغروب خود، که روبه‌نیستی می‌رود، پرتو می‌افکند. اما کار او بیش از اینها است. زیرا با پرده‌برداری ازروند تفکر و فن ریاضیات مربوط به عصر کلاسیك، دورنمای واقعی گذار ریاضیات را ازکهنه به‌نو به‌نمایش می‌گذارد.

وقتی دواثر یکی «سینوگوگ» پاپوس، که آوای قوی ریاضیات راسر می‌دهد، ودیگری «ایساغوجی» (*Isagogs*) دیت، اولین کتاب بااهمیت عصر جدید، را در کنار یکدیگر بگذاریم، ریشهٔ بسیاری از اندیشه‌های جاری

آفتابی می‌شوند، ودر عین حال بسیاری ازسئوالات تاریخی گیج کننده روشن می‌گردند. چنین است که مرا واداشت تابررسی دوران آخر ریاضیات‌یونان را به‌جلد آینده این سه‌کتاب محول کنم. معهذا، این دوران قسمتی است‌از صحنهٔیی در پی از ریاضیات کلاسیك: و از این بابت، نقطهٔ اوجی است در تاریخ **میراث یونان**. بدین ترتیب با اشاره‌ای به‌این دوران دشوار ازتاریخ بشری، هنگامی که سرنوشت اندیشه معلق مانده است، به داستان پایان می‌بخشم.

## ۱۰

تاریخ را می‌توان همانند پرده‌ای رنگارنگ بابافت پیچیده دانست‌که درآن‌چشم انسان همه‌گونه نقش می‌بیند،هم نقشهائی‌که از پیش طرح‌ریزی شده‌اند، و هم نقشهائی که با دیگران تفاوت دارند، اما هیچ‌کدام آنها با یکدیگر تنافر ندارند.

می‌توان صحنهٔ مرگ مکتب یونان را چنین ترسیم کردکه‌گروهی از مقدسین برمزار بت‌پرستی که در نا امیدی و فساد ناشی از رشد ناموزون عقل ولاغری نامتعادل روح مرده است نوحه‌سرائی می‌کنند. ویا می‌توان آن را بمانند خیلی از متعصبان مذهبی طراحی نمودکه درزیر لوای«نابود باد منطق» گردآمده، باخوشحالی به‌پرومتوس درمانده،که درعنفوان‌جوانی به‌زمین افتاده‌است خیره می‌نگرند. بین این دوحد می‌توان طرحهای دیگری را جای دادکه هیچکدام بادیگری توافقی نداشته باشند و در عین حال هر کسی بتواند از اوصاف آشفتهٔ عصری باگرمای زیاد وبدون روشنی‌کمك و تسلای خاطر بگیرد.

سرگشتگی سختی است در انتخاب آزاد، اما درواقع آزادی نیست، زیرا انتخاب هر کس باطبیعت او، پرورش او و محیط اطراف او بستگی دارد. تاریخ‌دان نیز از چنین تعصبی آزاد نیست، و من نیز، به‌عنوان یك فرد، این وابستگی خود را پنهان نداشته‌ام.

قرنها، ما و آن روزهای غم‌انگیز را از یکدیگر جدا می‌سازند، اما برخوردایدئولوژیك بین طرفداران‌یونان ومدافعان ایمان‌کاهش نیافته‌است. یکی از واقعه به‌مثابهٔ ظلمتی که روشنی را در خود فرو برده است، سخن می‌گوید و پیشرفت عصر جدید را به‌چشم ظهور مجدد هلنیسم می‌نگرد، دیگری پایان فرهنگ یونان راباعبارات فساد نژادی، افول، نزول‌وتباهی

توصیف می‌کند. من خود را شایستهٔ آن نمی‌دانم که در میدان مجادله‌ای، که درصلاحیت من نیست، وارد شوم. با این حال. کوششی شرافتمندانه به خرج داده‌ام تاریاضیات آن عصر را مورد ارزیابی قرار دهم. من متریکای هرو را چندین بارخواندم همینطور مجسطی بطلیموس، آریتمتیکای دیوفان، مجموعهٔ پاپوس و آثار گوناگونی راکه از دید مقدسین درامان مانده‌بودند من درآنجا درك رو به‌رشدی برای موضوعها یافتم که اسلاف ریاضی خود رامتوقف‌کرده‌بود، وباشکلی‌کورمال به‌دنبال‌وسائلی جهت‌حل این‌موضوعها می‌گشت. من غرور رسیدن به کاری بزرگ را یافتم، و غرورانگیزتر به تخیلاتی از فتوحات آینده برخوردکردم. اما درهیچ‌کجا دلیلی برتباهی ویا آثاری از سراشیبی نیافتم. آری، من هم چنین آن پردهٔ پر نقش و نگار را مطالعه‌کردم وصحنه‌ای را به‌نظر آوردم‌که آخرین ساعات ریاضیات کلاسیك درآن جریان یافته بود، و درجائی‌که ایستاده بودم آنچه را که دیدم چنین است:

یك روز روشن می‌درخشید منظره‌ای والاوبلند از دور نمودار بود، نسیمی‌خنك تار عنکبوت مناهی دیرین راپراکنده می‌کرد، که ناگهان‌چراغها خاموش شد وپردهٔ تاریخ برروی درام بزرگ یونان فرو افتاد.

# فهرست نامها

# با پوزشخواهی

| صفحه | سطر | نادرست | درست |
|---|---|---|---|
| ۲۹ | آخر | هرون | هرو |
| ۵۱ | ۱۶ | پنجره | پنجره‌ها |
| ۵۱ | ۲۵ | فخنا | فخر |
| ۵۱ | ۳۰ | یا | تا |
| ۶۶ | ۳ | صنحهٔ | صفحهٔ |
| ۶۶ | ۷ | حرفه | حرفه‌ای |
| ۶۸ | ۳ | *Sudgeof* | *Budgeof* |
| ۷۷ | ۴ | موقعیت | موفقیت |
| ۱۰۸ | ۱۸ | عدهای | عددهای |
| ۱۱۲ | ۶ | هرعدد صحیح | هرتعداد عدد صحیح‌فرد |
| ۱۱۷ | ۱۶ | قاتل | قابل |
| ۱۲۱ | ۲۱ | شریك | متریك |
| ۱۲۶ | ۱۴ | راههای | رأسها |
| ۱۳۲ | ۴ | مربع | ربع |
| ۱۴۰ | ۲۶ | (۲، ۱، ۱، ۳؛ ۲) | (۲، ۳، ۱، ۱؛ ۲) |
| ۱۴۳ | ۷ | $\frac{۱}{۴۰۰۰}$ | $\frac{۱}{۴۰۰۰۰}$ |
| ۱۴۳ | ۱۵ | طور | طوری |
| ۱۴۷ | آخر | شوند | شدند |
| ۱۴۸ | ۲ | وهم | دهم |
| ۱۴۸ | ۵ | وجور | وجود |
| ۱۶۲ | آخر | ۸۷۰ | ۷۸۰ |
| ۱۶۴ | ۱۴ | معین | مبین |